ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 37, 2, 211–228, 1989
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

O PEWNYM UZUPEŁNIENIU RÓWNAŃ TEORII PŁYT E. REISSNERA

ANDRZEJ KUCZYŃSKI (KIELCE)

W pracy przedstawiono równania teorii sprężystości dotyczące warstwy o stałej grubości z materiału izotropowego, jednorodnego i liniowo sprężystego, poddanej działaniu obciążeń powierzchniowych. Zaproponowane ujęcie zagadnienia pozwala na bezpośrednie nawiązanie do modelu warstwy, jaki opisują równania teorii płyt E. Reissnera i osłabienie jego założeń upraszczających. Otrzymano w efekcie równania prowadzące do rozwiązań bliższych ścisłym, zwłaszcza wówczas, gdy obciążenie stanowią siły skupione.

Oznaczenia

α, β, γ	wskaźniki, które przybierają wartości 1, 2,
i, j	wskaźniki przybierające wartości $1, 2, 3, \ldots,$
k	wskaźnik przybierający wartość 1, 2, 3
$D = Eh^3/[12(1\text{-}\nu^2)]$	sztywność płytowa,
E	moduł Younga,
ν	liczba Poissona,
G	moduł ścinania,
Δ	operator Laplace'a,
$\delta_{\alpha\beta}$	symbol Kroneckera.

1. Wstęp

Zastosowanie klasycznej teorii płyt jak i teorii płyt E. Reissnera do obliczeń wytrzymałościowych, dotyczących elementów konstrukcji cienkościennych, w znacznym stopniu ogranicza ich niewystarczająca dokładność w tych obszarach, w których oddziaływania zewnętrzne mają charakter obciążeń skupionych. Odnosi się to w szczególności do składowych tensora naprężenia.

W niniejszej pracy przedstawiono taki opis warstwy sprężystej, którego rezultatem końcowym są równania porównywalne z równaniami teorii płyt E. Reissnera, a jednocześnie umożliwiające rozbudowanie tej teorii tak, by uzyskane w wyniku jej zastosowania rezultaty obliczeniowe dotyczące obciążeń skupionych były dokładniejsze.

2. Sformułowanie zadania

Przeprowadzone w pracy rozważania dotyczą warstwy sprężystej [1], wykonanej z materiału jednorodnego, izotropowego, liniowo sprężystego. Rozpatrywana warstwa wypełnia przestrzeń między dwiema płaszczyznami, które w kartezjańskim układzie współrzędnych (x_1, x_2, x_3) opisują równania $x_3 = \pm h/2$. Na powierzchnie ograniczające warstwę działa obciążenie powierzchniowe o składowych:

$$\begin{aligned} &p_i^+(x_1, x_2) \quad \text{dla} \quad x_3 = h/2, \\ &p_i^-(x_1, x_2) \quad \text{dla} \quad x_3 = -h/2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Zadanie polega na wyznaczeniu przemieszczeń i naprężeń w warstwie, wywołanych działaniem tego obciążenia. Zadanie to traktowane będzie jako suma dwóch prostszych, nazywanych dalej antysymetrycznym i symetrycznym, odpowiednio do podziału obciążenia (2.1) na część symetryczną i antysemetryczną względem płaszczyzny $x_3 = 0$.

Współrzędne wektora przemieszczenia oraz składowe tensorów odkształcenia i naprężenia będą przedstawiane w formie sumy szeregu o ogólnej postaci

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(x_1, x_2)\eta^m, \tag{2.2}$$

w której

$$\eta = \frac{2}{h}x_3, \qquad -1 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

3. Podstawowe równania warstwy

Składowym tensora naprężenia nadaje się postać:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{h}\left[N_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{\infty} n_{\alpha\beta}^{(k)}\left(\eta^{2k} - \frac{1}{2k+1}\right)\right] + \\
&\qquad + \frac{6}{h^2}\left(M_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{\infty} m_{\alpha\beta}^{(k)}\left(\eta^{2k} - \frac{3}{2k+3}\right)\right)\eta, \\
\sigma_{3\alpha} &= \frac{3}{2h}\left(Q_\alpha^{(2)} - Q_\alpha^{(1)}\eta^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+2} q_\alpha^{(k)}\eta^{2k+2}\right) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(T_\alpha^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} t_\alpha^{(k)}\eta^{2k}\right)\eta, \\
\sigma_{33} &= \frac{h}{2}\left(P^{(2)} - \frac{1}{4}P^{(1)}\eta^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^{(k)}}{(2k+1)(2k+2)}\eta^{2k+2}\right) + \\
&\qquad + \frac{3}{4}\left(R^{(2)} - \frac{1}{3}R^{(1)}\eta^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{(k)}}{(2k+2)(2k+3)}\eta^{2k+2}\right)\eta.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

W (3.1) wprowadzono oznaczenia

$$N_{\alpha\beta} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3,$$

$$M_{\alpha\beta} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3,$$

$$Q_\alpha = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3\alpha} dx_3,$$

(3.2)
$$\begin{aligned}
Q_\alpha^{(1)} &= Q_\alpha - \frac{h}{2} R_\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k+3} q_\alpha^{(k)},\\
Q_\alpha^{(2)} &= Q_\alpha - \frac{h}{6} R_\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(2k+2)(2k+3)} q_\alpha^{(k)},\\
T_\alpha^{(1)} &= S_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} t_\alpha^{(k)},\\
P^{(1)} &= S_{\alpha,\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} s^{(k)},\\
P^{(2)} &= \frac{1}{h} R_3 + \frac{1}{4}\left(S_{\alpha,\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(2k+1)(2k+2)} s^{(k)} \right),\\
R^{(1)} &= S_3 + \frac{h}{2} R_{\alpha,\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k+3} r^{(k)},\\
R^{(2)} &= S_3 + \frac{h}{6} R_{\alpha,\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(2k+2)(2k+3)} r^{(k)}\\
S_i &= p_i^+ + p_i^-,\\
R_i &= p_i^+ - p_i^-.
\end{aligned}$$

Wykorzystując wzory (3.1), z równań równowagi

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

uzyskuje się:

(3.3)
$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta,\alpha} + S_\beta &= 0,\\
M_{\alpha\beta,\alpha} + \frac{h}{2} R_\beta - Q_\beta &= 0,\\
Q_{\alpha,\alpha} + S_3 + S_\omega &= 0
\end{aligned}$$

oraz

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} t_\alpha^{(k)} - n_{\beta\alpha,\beta}^{(k)} &= 0, \\ s^{(k)} - t_{\alpha,\alpha}^{(k)} &= 0, \\ q_\alpha^{(k)} - m_{\beta\alpha,\beta}^{(k)} &= 0, \\ r^{(k)} - q_{\alpha,\alpha}^{(k)} &= 0. \end{aligned}$$

Składowe tensora naprężenia, wyrażone wzorami (3.1), spełniają warunki brzegowe na powierzchniach warstwy $x_3 = h/2$ i $x_3 = -h/2$. W przypadku, gdy spełnione są równania równowagi (3.3) i (3.4), wyznaczają one statycznie dopuszczalny stan naprężenia. W związku z tym, że występuje zarówno antysymetryczne (S_3, R_α) jak i symetryczne (R_3, S_α) względem płaszczyzny $x_3 = 0$ obciążenie, przewiduje się konieczność użycia równań równowagi dotyczących warstwy odkształconej. Wprowadzono zatem do równania (3.3) składnik S_ω reprezentujący rzut sił przekrojowych $N_{\alpha\beta}$ na kierunek osi Ox_3 [2], [3], [4].

Podobnie jak w przypadku naprężeń, składowe wektora przemieszczenia U_i specyfikuje się zgodnie z (2.2). Wygodną w dalszych przekształceniach okazuje się następująca ich postać:

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} U_\alpha &= u_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} u_\alpha^{(k)}\left(\eta^{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) + \left[w_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} w_\alpha^{(k)}\left(\eta^{2k} - \frac{3}{2k+3}\right)\right]\eta, \\ U_3 &= w_3 + \frac{1}{4}\left[w_3^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} w_3^{(k)}\left(\frac{1}{k+1}\eta^{2k} - \frac{3}{2k+3}\right)\right]\eta^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[u_3^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} u_3^{(k)}(\eta^{2k}-1)\frac{1}{2k+1}\right]\eta. \end{aligned}$$

Do wyznaczenia składowych tensora odkształcenia ε_{ij} przez pochodne składowych wektora przemieszczenia U_i stosuje się typowe w teorii płyt [2, 4] wzory uproszczone

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha} + V_{3,\alpha}V_{3,\beta}), \\ \varepsilon_{3i} &= \frac{1}{2}(U_{3,i} + U_{i,3}). \end{aligned}$$

Występująca w (3.6) funkcja $V_3(x_1, x_2)$ jest pewną uśrednioną ze względu na współrzędną x_3 składową U_3.

Wykorzystując prawo Hooke'a (np. [1]) oraz związki (3.5) i (3.6), można składowe tensora naprężenia σ_{ij} wyrazić przez pochodne składowych wektora przemieszczenia U_i. Zależności te będą miały postać daną wzorem (2.2) i będą wyznaczać stan naprężenia kinematycznie dopuszczalny.

Rzeczywisty stan naprężenia charakteryzuje równość wszystkich współczynników przy kolejnych potęgach zmiennej niezależnej η w wyrażeniach, opisujących składowe tensora naprężenia, (3.1) z jednej strony, z drugiej zaś wyrażonych przez składowe U_i. Porównanie odpowiednich współczynników, w przypadku obciążenia antysymetrycznego, daje następujący układ równań:

$$M_{\alpha\beta} = (1-\nu)\frac{D}{h}\left[w_{\alpha,\beta}+w_{\beta,\alpha}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{\alpha\beta}\left(w_{\gamma,\gamma}+\frac{1}{h}w_3^{(0)}\right)\right], \tag{3.7}$$

$$m_{\alpha\beta}^{(k)} = (1-\nu)\frac{D}{h}\left[w_{\alpha,\beta}^{(k)}+w_{\beta,\alpha}^{(k)}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{\alpha\beta}\left(w_{\gamma,\gamma}^{(k)}+\frac{1}{h}w_3^{(k)}\right)\right], \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{h}^2}{20}R^{(3)} = \frac{1-\nu D}{1-2\nu h}\left((1-\nu)\frac{1}{\mathrm{h}}w_3^{(0)}+\nu w_{\gamma,\gamma}\right),\\ -\frac{h^2}{48}R^{(1)} = \frac{1-\nu D}{1-2\nu h}\left((1-\nu)\frac{1}{h}w_3^{(1)}+\nu w_{\gamma,\gamma}^{(1)}\right),\\ \frac{h^2}{8}r^{(k)} = \frac{1-\nu D}{1-2\nu h}\left((1-\nu)\frac{1}{h}w_3^{(k+1)}+\nu w_{\gamma,\gamma}^{(k+1)}\right)(2k+2)(2k+3);\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered}\frac{h^2}{6}\frac{1}{1-\nu}Q_\alpha = D\left[w_{3,\alpha}+\frac{1}{12}\left(w_{3,\alpha}^{(0)}-3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{(2k+2)(2k+3)}w_{3,\alpha}^{(k)}\right)+\right.\\ \left.+\frac{2}{h}\left(w_\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k+3}w_\alpha^{(k)}\right)\right],\\ -\frac{h^2}{4}\frac{1}{1-\nu}Q_\alpha^{(1)} = D\left(\frac{1}{4}\bar{w}_{3,\alpha}^{(0)}+\frac{6}{h}w_\alpha^{(1)}\right),\\ -\frac{h^2}{2}\frac{1}{1-\nu}q_\alpha^{(k)} = D\left(\frac{1}{2}w_{3,\alpha}^{(k)}+(2k+2)(2k+3)\frac{2}{h}w_\alpha^{(k+1)}\right),\end{gathered} \tag{3.10}$$

przy czym

$$\bar{w}_3^{(0)} = w_3^{(0)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{2k+3}w_3^{(k)},$$

$$\mathrm{R}^{(3)} = S_3+\frac{h}{12}R_{\alpha,\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{(2k+3)(2k+5)}r^{(k)}.$$

Równania (3.7) i (3.8) wynikają z żądanej równości współczynników występujących w wyrażeniach, które opisują składowe $\sigma_{\alpha\beta}$, (3.9) składowe σ_{33}, a (3.10) składowe $\sigma_{3\alpha}$ z tym zastrzeżeniem, że $(3.9)_1$ i $(3.10)_1$ uzyskano przez porównanie odpowiednich całek $\int_{-1}^{1} \sigma_{33}\eta d\eta$ oraz $\int_{-1}^{1} \sigma_{3\alpha} d\eta$.

Analogiczne postępowanie w przypadku obciążenia symetrycznego prowadzi do następujących równań:

$$N_{\alpha\beta} = Gh\left[u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}+V_{3,\alpha}V_{3,\beta}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{\alpha\beta}\left(u_{\gamma,\gamma}+\frac{1}{2}V_{3,\gamma}V_{3,\gamma}+\frac{1}{h}u_3^{(0)}\right)\right], \tag{3.11}$$

$$n_{\alpha\beta}^{(k)} = Gh\left[u_{\alpha,\beta}^{(k)}+u_{\beta,\alpha}^{(k)}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{\alpha\beta}\left(u_{\gamma,\gamma}^{(k)}+\frac{1}{h}u_3^{(k)}\right)\right], \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}\frac{h^2}{2}P^{(3)} = \frac{2Gh}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{1}{h}u_3^{(0)}+\nu\left(u_{\gamma,\gamma}+\frac{1}{2}V_{3,\gamma}V_{3,\gamma}\right)\right]\\ -\frac{h^2}{8}P^{(1)} = \frac{2Gh}{1-2\nu}\left((1-\nu)\frac{1}{h}u_3^{(1)}+\nu u_{\gamma,\gamma}^{(1)}\right),\\ \frac{h^2}{4}s^{(k)} = \frac{2Gh}{1-2\nu}\left((1-\nu)\frac{1}{h}u_3^{(k+1)}+\nu u_{\gamma,\gamma}^{(k+1)}\right)(2k+1)(2k+2),\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}T_\alpha^{(1)} = G\left(u_{3,\alpha}^{(0)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}u_{3,\alpha}^{(k)}+\frac{8}{h}u_\alpha^{(1)}\right),\\ -t_\alpha^{(k)} = G\left(u_{3,\alpha}^{(k)}+\frac{4}{h}(2k+1)(2k+2)u_{3,\alpha}^{(k+1)}\right).\end{gathered} \tag{3.14}$$

W $(3.13)_1$ wprowadzono oznaczenie

$$P^{(3)} = \frac{1}{h}R_3+\frac{1}{6}\left(S_{\alpha,\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{(2k+1)(2k+3)}s^{(k)}\right).$$

Równania (3.11) i (3.12) uzyskano przez porównanie współczynników, które występują w wyrażeniach opisujących składowe $\sigma_{\alpha\beta}$, (3.13) — składowe σ_{33} i (3.14) — składowe $\sigma_{3\alpha}$ z tym zastrzeżeniem, że $(3.13)_1$ otrzymano porównując całki $\int_{-1}^{1}\sigma_{33}d\eta$.

3.1. Równania warstwy obciążonej antysymetrycznie

Wykorzystując równania równowagi (3.3) i (3.4), układy równań (3.7) do (3.10) można doprowadzić do następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{h}\bar{w}_\alpha = -w_{3,\alpha}+\frac{3}{2Gh}Q_\alpha^{(2)},\\
&\frac{2}{h}w_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{12}\bar{w}_{3,\alpha}^{(0)}-\frac{1}{2Gh}Q_\alpha^{(1)},\\
&\frac{2}{h}w_\alpha^{(k+1)} = -\left(\frac{1}{2}w_{3,\alpha}^{(k)}+\frac{3}{Gh}q_\alpha^{(k)}\right)\frac{1}{(2k+2)(2k+3)},\\
&\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}kw_\alpha^{(k)} = -\frac{1}{12}w_{3,\alpha}^{(0)}-\frac{1}{2Gh}\left(Q_\alpha-\frac{h}{2}R_\alpha\right);
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&D\Delta w_3^{(0)} = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{2}\left(S_3+S_\omega+\frac{h}{2}R_{\alpha,\alpha}\right)+\frac{h^4}{20}\Delta R^{(3)},\\
&D\Delta w_3^{(1)} = -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{2}r^{(1)}-\frac{h^4}{48}\Delta R^{(1)},\\
&D\Delta w_3^{(k+1)} = -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{2}r^{(k+1)}+\frac{h^4}{8(2k+2)(2k+3)}\Delta r^{(k)};
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{M}_{\alpha\beta} &= -\frac{D}{2}[(1-\nu)(w_{3,\alpha\beta}+w_{3,\beta\alpha})+2\nu\delta_{\alpha\beta}w_{3,\gamma\gamma}]+\\
&\qquad+\frac{h^2}{8}\left[Q_{\alpha,\beta}^{(2)}+Q_{\beta,\alpha}^{(2)}-\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{\alpha\beta}(R^{(2)}+2S_\omega)\right],\\
m_{\alpha\beta}^{(1)} &= -\frac{D}{24}[(1-\nu)(\bar{w}_{3,\alpha\beta}^{(0)}+\bar{w}_{3,\beta\alpha}^{(0)})+2\nu\delta_{\alpha\beta}\bar{w}_{3,\gamma\gamma}^{(0)}]-\\
&\qquad-\frac{h^2}{24}\left[Q_{\alpha,\beta}^{(1)}+Q_{\beta,\alpha}^{(1)}-\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{\alpha\beta}(R^{(1)}+2S_\omega)\right],\\
m_{\alpha\beta}^{(k+1)} &= -\left\{\frac{D}{4}[(1-\nu)(w_{3,\alpha\beta}^{(k)}+w_{3,\beta\alpha}^{(k)})+2\nu\delta_{\alpha\beta}w_{3,\gamma\gamma}^{(k)}]+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{h^2}{4}\left(q_{\alpha,\beta}^{(k)}+q_{\beta,\alpha}^{(k)}+\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{\alpha\beta}r^{(k)}\right)\right\}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)},\\
\sum_{k=1}^{\infty}km_{\alpha\beta}^{(k)} &= -\frac{D}{24}[(1-\nu)(w_{3,\alpha\beta}^{(0)}+w_{3,\beta\alpha}^{(0)})+2\nu\delta_{\alpha\beta}w_{3,\gamma\gamma}^{(0)}]-\\
&\qquad-\frac{h^2}{24}\left[Q_{\alpha,\beta}+Q_{\beta,\alpha}-\frac{h}{2}(R_{\alpha,\beta}+R_{\beta,\alpha})-\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{\alpha\beta}\left(S_3+\frac{h}{2}R_{\gamma,\gamma}+2S_\omega\right)\right].
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Występujące w (3.15) wielkości $\bar{w}_\alpha$ oraz w (3.17) wielkości $\bar{M}_{\alpha\beta}$ wyznacza się za pomocą wzorów

$$\bar{w}_\alpha = w_\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k+3} w_\alpha^{(k)},$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k+3} m_{\alpha\beta}^{(k)}.$$

Z (3.17) oraz $(3.3)_2$ i $(3.4)_3$ otrzymujemy

$$Q_\alpha^{(1)} = -D\Delta w_{3,\alpha} + \frac{h^2}{8}\left[\Delta Q_\alpha^{(2)} - \frac{1}{1-\nu}(R^{(2)}+(1+\nu)S_\omega)_{,\alpha}\right],$$

$$(3.18)\quad \begin{aligned} q_\alpha^{(1)} &= -\frac{1}{12} D\Delta \bar{w}_{3,\alpha}^{(0)} - \frac{h^2}{24}\left[\Delta Q_\alpha^{(1)} - \frac{1}{1-\nu}(R^{(1)}+(1+\nu)S_\omega)_{,\alpha}\right], \\ q_\alpha^{(k+1)} &= \left[-\frac{1}{2} D\Delta w_{3,\alpha}^{(k)} - \frac{h^2}{4}\left(\Delta q_\alpha^{(k)} + \frac{1}{1-\nu} r_{,\alpha}^{(k)}\right)\right]\frac{1}{(2k+2)(2k+3)}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} kq_\alpha^{(k)} &= -\frac{1}{12} D\Delta w_{3,\alpha}^{(0)} - \frac{h^2}{24}\left[\Delta\left(Q_\alpha - \frac{h}{2}R_\alpha\right) - \frac{1}{1-\nu}\left(S_3 + \frac{h}{2}R_{\beta,\beta} + (1+\nu)S_\omega\right)_{,\alpha}\right]. \end{aligned}$$

Z równań (3.18) oraz $(3.3)_3$ i $(3.4)_4$ wynika

$$(3.19)\qquad D\Delta\Delta w_3 = R^{(1)} + S_\omega - \frac{h^2}{8}\Delta\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}R^{(2)} + \frac{2}{1-\nu}S_\omega\right),$$

$$(3.20)\quad \begin{aligned} r^{(1)} &= -\frac{1}{12} D\Delta\Delta \bar{w}_3^{(0)} + \frac{h^2}{24}\Delta\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}R^{(1)} + \frac{2}{1-\nu}S_\omega\right), \\ r^{(k+1)} &= -\left(\frac{1}{2} D\Delta\Delta w_3^{(k)} + \frac{h^2}{4}\frac{2-\nu}{1-\nu}\Delta r^{(k)}\right)\frac{1}{(2k+2)2k+3)}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} kr^{(k)} &= -\frac{1}{12} D\Delta\Delta w_3^{(0)} + \frac{h^2}{24}\Delta\left[\frac{2-\nu}{1-\nu}\left(S_3 + \frac{h}{2}R_{\alpha,\alpha}\right) + \frac{2}{1-\nu}S_\omega\right]. \end{aligned}$$

Wykorzystując (3.16), z równań (3.20) otrzymuje się

$$(3.21)\quad \begin{aligned} r^{(k)} &= \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k}\Delta^k\left[(k+1)R^{(1)} - k\left(\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta R^{(2)} - \frac{2-\nu}{1-\nu}S_\omega\right)\right], \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{kr}^{(k)} &= \frac{h^2}{24}\Delta\left[2\left(S_3 + \frac{h}{2}R_{\alpha,\alpha}\right) + \frac{2-\nu}{1-\nu}S_\omega - \frac{h^2}{10}\Delta R^{(3)}\right]. \end{aligned}$$

Eliminując z $(3.2)_9$ i $(3.2)_{10}$ wielkości $r^{(k)}$ opisane wzorem $(3.21)_1$ otrzymujemy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi $R^{(1)}$ i $R^{(2)}$ w następującej postaci

$$
\begin{aligned}
R^{(1)} &= S_3+\frac{h}{2}R_{\alpha,\alpha}+3\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k+2}{(2k+3)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k}\Delta^k\Bigg[(k+1)R^{(1)}-\\
&\qquad -k\left(\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta R^{(2)}-\frac{2-\nu}{1-\nu}S_\omega\right)\Bigg],\\
R^{(2)} &= S_3+\frac{h}{6}R_{\alpha,\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k}{(2k+3)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k}\Delta^k\Bigg[(k+1)R^{(1)}-\\
&\qquad -k\left(\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta R^{(2)}-\frac{2-\nu}{1-\nu}S_\omega\right)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Rozwiązanie zadania wymaga w pierwszej kolejności wyznaczenia niewiadomych $R^{(1)}$ i $R^{(2)}$ spełniających układ równań (3.22), a następnie wielkości $r^{(k)}$ z $(3.21)_1$, w_3 i $w_3^{(k-1)}$ z (3.19) i (3.16) oraz $q_\alpha^{(k)}$ i Q_α z (3.18). Ostatnią operacją jest wyznaczenie wielkości $w_\alpha^{(k-1)}$ za pomocą (3.15) oraz $m_{\alpha\beta}^{(k)}$ i $M_{\alpha\beta}$ z (3.17).

3.2. *Uproszczenie równań zadania antysymetrycznego*

Postać przedstawionego w 3.1 układu równań i naszkicowana tam kolejność działań prowadzących do jego rozwiązania wskazuje na bliskie jego pokrewieństwo z równaniami teorii płyt E. Reissnera. Wyraźniej to widać, gdy wprowadzi się pojęcie średniego przemieszczenia U_3, definiowanego w tej teorii wzorem

$$
w=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}U_3(1-\eta^2)d\eta.
\tag{3.23}
$$

Z (3.23) i $(3.5)_2$ uzyskuje się

$$
w=w_3+\frac{1}{20}w_3^{(0)}-\frac{3}{20}\sum_{k=1}^{\infty}w_3^{(k)}\frac{2k(2k+7)}{(2k+2)(2k+3)(2k+5)}.
\tag{3.24}
$$

Wykorzystując (3.24) i (3.20), równanie (3.19) można przekształcić do postaci

$$
D\Delta\Delta w=S_3+\frac{h}{2}R_{\alpha,\alpha}+S_\omega-\frac{h^2}{10}\Delta\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}R^{(3)}+\frac{2}{1-\nu}S_\omega\right).
\tag{3.25}
$$

Równanie (3.25) jest identyczne z odpowiednim, uzyskiwanym przy założeniu E. Reissnera równaniem, dotyczącym postaci wzoru określającego składową σ_{33}. Zgodność z tym założeniem otrzymuje się po wprowadzeniu warunku

$$
r^{(k)}=0.
\tag{3.26}
$$

Stosunkowo prosty model warstwy, prowadzący do wyników dokładniejszych niż daje teoria E. Reissnera, uzyskuje się przez wprowadzenie w miejsce (3.26) słabszego założenia upraszczającego, mianowicie

$$r^{(k+1)} = 0. \tag{3.27}$$

Wykorzystując (3.27) z $(3.21)_2$, uzyskuje się równanie z jedną niewiadomą $r^{(1)}$ w postaci następującej:

$$r^{(1)}+\frac{h^4}{8400}\Delta\Delta r^{(1)} = \frac{h^2}{24}\Delta\left[2\left(S_3+\frac{h}{2}R_{\alpha,\alpha}\right)+\frac{2-\nu}{1-\nu}S_\omega-\frac{h^2}{10}\Delta\left(S_3+\frac{h}{12}R_{\alpha,\alpha}\right)\right]. \tag{3.28}$$

Jeżeli przywiązuje się większą wagę do spełnienia warunków równowagi niż do zgodności odkształceń, to wielkości $w_3^{(k-1)}$ należy wyznaczyć na podstawie (3.20), a nie (3.16). Wykorzystując (3.27), z (3.20) można otrzymać

$$\begin{gathered} D\Delta\Delta w_3^{(0)}+12r^{(1)}-\frac{h^2}{2}\Delta\left[\frac{2-\nu}{1-\nu}\left(S_3+\frac{h}{2}R_{\alpha,\alpha}\right)+\frac{2}{1-\nu}S_\omega\right] = 0,\\ D\Delta\Delta w_3^{(1)}+\frac{h^2}{2}\frac{2-\nu}{1-\nu}\Delta r^{(1)} = 0,\\ \Delta\Delta w_3^{(k+1)} = 0. \end{gathered} \tag{3.29}$$

W rozpatrywanym zagadnieniu brzegowym z $(3.29)_3$ otrzymuje się

$$w_3^{(k+1)} = 0. \tag{3.30}$$

W miejsce w_3 wygodnie jest wprowadzić nową wielkość $w = U_3(\eta = \pm 1/5^{1/2})$. Po uwzględnieniu (3.30), z $(3.5)_2$ otrzymuje się

$$w = w_3+\frac{1}{20}w_3^{(0)}-\frac{1}{40}w_3^{(1)}. \tag{3.31}$$

Taką samą postać przybiera wzór (3.23) po wprowadzeniu (3.26). Za pomocą (3.31) i (3.29) równanie (3.19) można przedstawić w następującej postaci:

$$D\Delta\Delta w = S_3+\frac{h}{2}R_{\alpha,\alpha}+S_\omega-\frac{h^2}{10}\Delta\left[\frac{2-\nu}{1-\nu}\left(S_3+\frac{h}{12}R_{\alpha,\alpha}\right)+\frac{2}{1-\nu}S_\omega\right]. \tag{3.32}$$

Opierając się na równaniach teorii E. Reissnera przedstawionej przez St. Łukasiewicza w [4] przyjmuje się, że średnia wartość składowej wektora przemieszczenia V_3, występująca w (3.6) jest równa wielkości w, zdefiniowanej wzorem (3.31). Wielkość w wykorzystuje się również specyfikując składnik S_ω, występujący w równaniu $(3.3)_1$. Jego konkretną postać opisuje wzór

$$S_\omega = H_{\alpha,\alpha}, \tag{3.33}$$

w którym

$$H_\alpha = N_{\alpha\beta}w_{,\beta}.$$

3.3. Równania warstwy obciążonej symetrycznie

Wykorzystując równanie $(3.13)_1$, z (3.11) otrzymuje się

$$2Gh(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}+V_{3,\alpha}V_{3,\beta}) = N_{\alpha\beta}+N_{\beta\alpha}-\frac{\nu}{1+\nu}\delta_{\alpha\beta}(2N_{\gamma\gamma}+h^2P^{(3)}). \tag{3.34}$$

Eliminacja wielkości u_1 i u_2 z (3.34) prowadzi do równania

$$N_{\alpha\alpha,\beta\beta}-(1+\nu)N_{\alpha\beta,\alpha\beta} = \nu\frac{h^2}{2}\Delta P^{(3)}-EhL_\omega, \tag{3.35}$$

w którym

$$L_\omega = \frac{1}{2}[(V_{3,\alpha}V_{3,\beta})_{,\alpha\beta}-(V_{3,\alpha}V_{3,\alpha})_{,\beta\beta}].$$

Wprowadzenie funkcji naprężeń ϕ takiej, że

$$N_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\phi_{,\alpha\beta}+\phi_{,\beta\alpha})+\delta_{\alpha\beta}\left(\phi_{,\gamma\gamma}-\int S_\alpha dx_\beta\right) \tag{3.36}$$

do równania (3.35), daje

$$\Delta\Delta\phi = -(1+\nu)S_{\alpha,\alpha}+\Delta\int S_\alpha dx_\alpha-EhL_\omega+\nu\frac{h^2}{2}\Delta P^{(3)}. \tag{3.37}$$

Równania (3.14) można przedstawić w następującej postaci

$$\begin{gathered} u_\alpha^{(1)} = \frac{h}{8}\left(\frac{1}{G}T_\alpha^{(1)}-\bar{u}_{3,\alpha}^{(0)}\right), \\ u_\alpha^{(k+1)} = -\frac{h}{4}\left(\frac{1}{G}t_\alpha^{(k)}+u_{3,\alpha}^{(k)}\right)\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} ku_\alpha^{(k)} = \frac{h}{8}\left(\frac{1}{G}S_\alpha-u_{3,\alpha}^{(0)}\right). \end{gathered} \tag{3.38}$$

W równaniach (3.38) wprowadzono oznaczenie $\bar{u}_3^{(0)}$ zdefiniowane wzorem

$$\bar{u}_3^{(0)} = u_3^{(0)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}u_3^{(k)}.$$

Wykorzystując równania równowagi (3.3) i (3.4) oraz związki (3.38) z (3.11), (3.12) i (3.13) można otrzymać

$$2G\Delta u_3^{(0)} = \nu(S_{\alpha,\alpha}+2GhL_\omega)+(1-\nu)\frac{h^2}{2}\Delta P^{(3)},$$

(3.39)
$$2G\Delta u_3^{(1)} = -\nu s^{(1)}-(1-\nu)\frac{h^2}{8}\Delta P^{(1)},$$

$$2G\Delta u_3^{(k+1)} = -\nu s^{(k+1)}+(1-\nu)\frac{h^2}{4(2k+1)(2k+2)}\Delta s^{(k)}.$$

oraz

$$n_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{3D}{4h}[(1-\nu)(\bar{u}_{3,\alpha\beta}^{(0)}+\bar{u}_{3,\beta\alpha}^{(0)})+2\nu\delta_{\alpha\beta}\bar{u}_{3,\gamma\gamma}^{(0)}]+ \\ +\frac{h^2}{8}\left[T_{\alpha,\beta}^{(1)}+T_{\beta,\alpha}^{(1)}+\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{\alpha\beta}P^{(1)}\right],$$

(3.40)
$$n_{\alpha\beta}^{(k+1)} = -\frac{3D}{2h}\left\{[(1-\nu)(u_{3,\alpha\beta}^{(k)}+u_{3,\beta\alpha}^{(k)})+2\nu\delta_{\alpha\beta}u_{3,\gamma\gamma}^{(k)}]- \right. \\ \left. -\frac{h^2}{4}\left[t_{\alpha,\beta}^{(k)}+t_{\beta,\alpha}^{(k)}+\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{\alpha\beta}s^{(k)}\right]\right\}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kn_{\alpha\beta}^{(k)} = -\frac{3D}{4h}[(1-\nu)(u_{3,\alpha\beta}^{(0)}+u_{3,\beta\alpha}^{(0)})+2\nu\delta_{\alpha\beta}u_{3,\gamma\gamma}^{(0)}]+ \\ +\frac{h^2}{8}\left[S_{\alpha,\beta}+S_{\beta,\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{\alpha\beta}S_{\gamma,\gamma}\right].$$

Z równań (3.40) i $(3.4)_1$ otrzymuje się

$$t_\alpha^{(1)} = -\frac{3}{2h}D\Delta\bar{u}_{3,\alpha}^{(0)}+\frac{h^2}{8}\Delta T_\alpha^{(1)}+\frac{1}{1-\nu}\frac{h^2}{8}P_{,\alpha}^{(1)},$$

(3.41)
$$t_\alpha^{(k+1)} = -\left(\frac{3}{h}D\Delta u_{3,\alpha}^{(k)}+\frac{h^2}{4}\Delta t_\alpha^{(k)}+\frac{1}{1-\nu}\frac{h^2}{4}s_{,\alpha}^{(k)}\right)\frac{1}{(2k+1)(2k+2)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kt_\alpha^{(k)} = -\frac{3}{2h}D\Delta u_{3,\alpha}^{(0)}+\frac{h^2}{8}\Delta S_\alpha+\frac{1}{1-\nu}\frac{h^2}{8}S_{\beta,\beta\alpha}.$$

Wykorzystując $(3.4)_2$, ze wzorów (3.41) uzyskuje się

$$
\begin{aligned}
& s^{(1)} = -\frac{3}{2h} D\Delta\Delta\bar{u}_3^{(0)} + \frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{8}\Delta P^{(1)}, \\
(3.42)\qquad & s^{(k+1)} = -\left(\frac{3}{h} D\Delta\Delta u_3^{(k)} + \frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{4}\Delta s^{(k)}\right)\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}, \\
& \sum_{k=1}^{\infty} k s^{(k)} = -\frac{3}{2h} D\Delta\Delta u_3^{(0)} + \frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{8}\Delta S_{\alpha,\alpha}.
\end{aligned}
$$

Eliminując za pomocą (3.39) wielkości $u_3^{(k-1)}$, z (3.42) otrzymujemy układ równań, w którym jedynymi niewiadomymi są wielkości $s^{(k)}$. Układ ten można napisać w następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
& s^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k}\Delta^k\left[(k+1)P^{(1)} - 2k\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta P^{(2)} + \frac{\nu}{1-\nu}GhL_\omega\right)\right], \\
(3.43)\qquad & \\
& \sum_{k=1}^{\infty} k s^{(k)} = \frac{h^2}{4}\Delta\left(S_{\alpha,\alpha} - \frac{\nu}{1-\nu}GhL_\omega - \frac{h^2}{4}\Delta P^{(3)}\right).
\end{aligned}
$$

Wprowadzając wielkości $s^{(k)}$ dane wzorem $(3.43)_1$ do wzorów $(3.2)_7$ i $(3.2)_8$, otrzymuje się następujący układ równań

$$
\begin{aligned}
& P^{(1)} = S_{\alpha,\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k}\Delta^k\left[(k+1)P^{(1)} - 2k\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta P^{(2)} + \frac{\nu}{1-\nu}GhL_\omega\right)\right], \\
(3.44)\qquad & P^{(2)} = \frac{1}{h}R_3 + \frac{1}{4}S_{\alpha,\alpha} + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}\frac{k}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^{2k}\Delta^k\left[(k+1)P^{(1)} - 2k\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta P^{(2)} + \frac{\nu}{1-\nu}GhL_\omega\right)\right],
\end{aligned}
$$

w którym jedynymi niewiadomymi są $P^{(1)}$ i $P^{(2)}$. Rozwiązanie zadania wiąże się z koniecznością wyznaczenia w pierwszej kolejności niewiadomych $P^{(1)}$ i $P^{(2)}$ na podstawie (3.44), a następnie $s^{(k)}$ z równań $(3.43)_1$. W następnej kolejności należy wyznaczyć funkcje ϕ z (3.37), wielkości $N_{\alpha\beta}$ z (3.36) oraz u_α z (3.34). Równolegle z (3.39) można wyznaczyć $u_3^{(k-1)}$, a następnie $t_\alpha^{(k)}$ z (3.41), $u_\alpha^{(k)}$ z (3.38) i $n_{\alpha\beta}^{(k)}$ z (3.40), co kończy zadanie.

3.4. Uproszczone równania zadania symetrycznego

Przyjęcie założenia $s^{(k)} = 0$ sprowadza równania przedstawione w 3.3 do równań opisujących płaskie zagadnienie teorii sprężystości [4], [5].

Uzyskanie wyników bliższych ścisłym można otrzymać gdy przyjmiemy słabsze założenia upraszczające, mianowicie

$$s^{(k+1)} = 0. \tag{3.46}$$

Przy tym założeniu, podobnie jak to miało miejsce w przypadku obciążenia antysymetrycznego, z równania $(3.43)_2$ wynika równanie z jedną niewiadomą $s^{(1)}$ o postaci:

$$s^{(1)} + \frac{h^2}{720}\Delta\Delta s^{(1)} = \frac{h^2}{4}\Delta\left[S_{\alpha,\alpha} - \frac{\nu}{1-\nu}GhL_\omega - \frac{h^2}{4}\Delta\left(\frac{1}{h}R_3 + \frac{1}{6}S_{\alpha,\alpha}\right)\right]. \tag{3.47}$$

Wielkości $u_3^{(k-1)}$ wyznacza się ze wzorów (3.42), które, po uwzględnieniu (3.46), prowadzą między innymi do

$$\begin{gathered} \frac{3}{h}D\Delta\Delta u_3^{(1)} + \frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{4}\Delta s^{(1)} = 0, \\ \Delta\Delta u_3^{(k+1)} = 0. \end{gathered} \tag{3.48}$$

W rozpatrywanym zagadnieniu brzegowym z (3.48) wynika

$$u_3^{(k+1)} = 0.$$

4. Przykład

W celu zilustrowania charakteru różnic w rozwiązaniach konkretnych zadań, do których prowadzi uzupełnienie równań teorii płyt w sposób zaproponowany w 3.2 i 3.4 w porównaniu z rozwiązaniami uzyskanymi na podstawie równania E. Reissnera, przedstawiono niżej fragmentaryczne wyniki dotyczące warstwy obciążonej siłą skupioną.

Przyjmuje się, że odkształcenia warstwy są na tyle małe, iż można pominąć wielkość V_3 w równaniach $(3.6)_1$ oraz S_ω w równaniu $(3.3)_3$. W przypadku obciążenia danego równaniami $p_\alpha^+ = 0$, $p_i^- = 0$, $p_3^+ = p$, zależność $(3.1)_3$ przybiera następującą postać:

$$\sigma_{33} = \frac{3}{4}p\left(\frac{2}{3} + \eta - \frac{1}{3}\eta^3\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{h}{6}s^{(1)} + \frac{3}{5}r^{(1)}\eta\right)(1-\eta^2)^2. \tag{4.1}$$

Pierwszy składnik sumy w wyrażeniu (4.1) opisuje rozkład naprężeń σ_{33}, zakładany w teorii E. Reisnnera [3], drugi zaś jest wynikiem rozszerzenia modelu warstwy w myśl założeń poczyniowych w (3.2) i (3.4).

Wielkości $s^{(1)}$ i $r^{(1)}$ wyznacza się z równań (3.47) i (3.28), które w rozpatrywanym przypadku przybierają postać:

$$
\begin{aligned}
&s^{(1)}+\frac{h^4}{720}\Delta\Delta s^{(1)} = -\frac{h^3}{16}\Delta\Delta p,\\
(4.2)\qquad &r^{(1)}+\frac{h^4}{8400}\Delta\Delta r^{(1)} = \frac{h^2}{24}\Delta\left(2p-\frac{h^2}{10}\Delta p\right).
\end{aligned}
$$

Równanie $(3.5)_2$ w rozpatrywanym zadaniu upraszcza się do

$$
(4.3)\qquad u_3 = w+\frac{1}{4}\left(w_3^{(0)}-\frac{1}{2}(1-\eta^2)w_3^{(1)}\right)\left(\eta^2-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(u_3^{(0)}+\frac{1}{2}u_3^{(1)}(\eta^2-1)\right)\eta.
$$

Występujące w (4.3) wielkości w, $w_3^{(0)}$ i $u_3^{(0)}$ wyznacza się ze wzorów (3.32), $(3.29)_1$ i $(3.42)_3$.

Obciążenie warstwy stanowić będzie siła skupiona P przyłożona w punkcie $(0, 0, h/2)$, zrównoważona obciążeniem liniowym stałym co do wartości, przyłożonym do warstwy wzdłuż okręgu leżącego w płaszczyźnie $x_3 = h/2$ o środku w punkcie $(0, 0, h/2)$ i promieniu l. Oddziaływania te modelowane są za pomocą obciążenia powierzchniowego $p^+ = p$. Zadanie tak postawione charakteryzuje symetria osiowa, w związku z czym wprowadza się zmienną niezależną ϱ, związana z x_1 i x_2 wzorem

$$\varrho = [(x_1/l)^2+(x_2/l)^2]^{1/2}.$$

Za pomocą całki Fouriera, ze wzoru (3.32) uzyskuje się

$$
(4.4)\qquad \bar{w} = \frac{Pl^2}{8\pi D}\left(\Lambda^{(4)}-\frac{2}{5}\left(\frac{h}{l}\right)^2\frac{2-\nu}{1-\nu}\Lambda^{(2)}\right).
$$

We wzorze (4.4) symbolem $\bar{w}$ oznaczono względne przemieszczenie średnie w. Przyjęto, że $w = 0$ dla $\varrho = 1$. Wielkości $\Lambda^{(2)}$ i $\Lambda^{(4)}$ dane są następującymi wzorami

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{(2)} &= \ln\varrho\\
\Lambda^{(4)} &= \varrho^2(\ln\varrho-1)+1 \qquad \text{dla } \varrho < 1.
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie równań (4.2), a następnie $(3.29)_1$ i $(3.48)_1$ prowadzi do

$$
\begin{aligned}
&w_3^{(0)} = \frac{Pl^2}{2\pi D}\left[105\Lambda_\alpha^{(4)}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{l}\right)^2\frac{2-\nu}{1-\nu}\Lambda_\alpha^{(2)}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{l}\right)^2\frac{\nu}{1-\nu}(\Lambda^{(2)}+\Lambda_\alpha^{(2)})\right],\\
(4.5)\qquad &u_3^{(0)} = \frac{Pl^2}{4\pi D}15\Lambda_\alpha^{(4)}.
\end{aligned}
$$

Wielkości $\Lambda_\alpha^{(2)}$, $\Lambda_\alpha^{(4)}$ i $\Lambda_s^{(4)}$ występujące w (4.5) są dane wzorami

$$\Lambda_\alpha^{(2)} \cong \ker(\omega_\alpha \varrho),$$

(4.6)
$$\Lambda_\alpha^{(4)} \cong \frac{4}{\omega_\alpha^2}\operatorname{kei}(\omega_\alpha \varrho),$$

$$\Lambda_s^{(4)} \cong -\frac{4}{\omega s^2}\operatorname{kei}(\omega_s \varrho),$$

w których

$$\omega_\alpha = (8400)^{1/4}\frac{l}{h},$$

$$\omega_s = (720)^{1/4}\frac{l}{h}.$$

Pojawienie się w (4.5) składników zależnych od $\Lambda_\alpha^{(2)}$, $\Lambda_\alpha^{(4)}$ i $\Lambda_s^{(4)}$ jest konsekwencją rozszerzenia modelu warstwy zgodnie z (3.27) i (3.46). Składniki te mają charakter lokalny i praktycznie można je pominąć gdy $\varrho > 2h/l$; natomiast nabierają dominującego znaczenia w bezpośrednim otoczeniu punktu przyłożenia siły P. Przybliżony charakter rozwiązania zasygnalizowany w (4.6) wiąże się z tym, że dane tymi wzorami funkcje nie zawierają składników o podobnym lokalnym znaczeniu a pochodzących od obciążenia równoważącego siłę P.

Określone wzorami (4.4) i (4.5) wielkości wystarczają do wyznaczenia przemieszczeń punktów górnej ($x_3 = h/2$) i dolnej ($x_3 = -h/2$) powierzchni warstwy. Ze wzoru (4.3) otrzymuje się

$$\bar{U}_3(\varrho, \eta = \pm 1) = \frac{Pl^2}{8\pi D}\left[\Lambda^{(4)} + 84\Lambda_\alpha^{(4)} - \frac{4}{5}\left(\frac{h}{l}\right)^2 (\Lambda^{(2)} + \Lambda_\alpha^{(2)}) \pm 15\Lambda_s^{(4)}\right].$$

Przedstawione powyżej rozwiązanie daje skończoną wartość przemieszczenia $\bar{U}_3(\varrho, \eta = \pm 1)$ dla $\varrho \to 0$.

Rozwiązanie pozostałych równań prowadzi między innymi do następującego związku, dotyczącego naprężeń w otoczeniu punktu przyłożenia siły P:

(4.7)
$$\begin{aligned}\sigma_{rr} = &-\frac{3}{2\pi}\frac{P}{h^2}\left((1+\nu)\ln\varrho - \frac{\nu}{5}\left(\frac{h}{l}\right)^2\frac{1}{\varrho^2}\right)\eta - \\ &-\frac{1}{4\pi}\frac{P}{h^2}\left(210(1+\nu)\ln\varrho + \frac{\nu}{2}\left(\frac{h}{l}\right)^2\frac{1}{\varrho^2}\right)\eta\left(\eta^2 - \frac{3}{5}\right) + \\ &+\frac{6}{h^2}m_{rr}^{(2)}\eta(1-\eta^2)^2 + \frac{1}{4\pi}\frac{P}{h^2}\nu\left(\frac{h}{l}\right)^2\frac{1}{\varrho^2} - \\ &-\frac{1}{4\pi}\frac{P}{h^2}[45(1+\nu)\ln\varrho]\left(\eta^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{h}n_{rr}^{(2)}(1-\eta^2)^2.\end{aligned}$$

Wzór (4.7) jest fragmentem zależności dokładnej, w której pominięto niezależne od ϱ składniki oraz te, które osiągają wartość zerową gdy $\varrho \to 0$. Traktując tę dokładną zależność jako rozwiązanie podstawowe, można za jej pomocą drogą całkowania uzyskać zależność, obowiązującą w przypadku p, działającego na powierzchni koła o danej średnicy i środku w punkcie $(0, 0, h/2)$.

Jak wiadomo z [4], ścisłe rozwiązanie tego zagadnienia charakteryzuje nieciągłość naprężeń σ_{rr} w punktach górnej powierzchni warstwy na krawędzi koła i ciągłość naprężeń σ_{rr} na powierzchni dolnej. W punktach na brzegu warstwy z (4.7) uzyskuje się

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{rr}(\varrho, \eta = 1) = -\frac{P}{\pi h^2}\left(30(1+\nu)\ln\varrho - \frac{\nu}{2}\left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{1}{\varrho^2}\right),\\
&\sigma_{rr}(\varrho, \eta = -1) = \frac{P}{\pi h^2} 15(1+\nu)\ln\varrho.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Rząd osobliwości występujących w (4.8) zapewnia jakościową zgodność z teorią ścisłą w wyżej zasygnalizowanym sensie.

5. Wnioski końcowe

Zaproponowany wzorami (3.1) i (3.5) opis składowych tensora naprężenia i wektora przemieszczenia pozwala przedstawić równania teorii sprężystości, dotyczące warstwy w postaci umożliwiającej bezpośrednie porównanie tych równań, z równaniami teorii przybliżonych (płyt i tarcz). Pierwszoplanowa rola w tym porównaniu przypada związkom (3.37) i (3.19) lub (3.25) W p. 3.2 i 3.4 zaproponowano pewien uproszczony model warstwy, który można potraktować jako rozszerzenie teorii płyt E. Reissnera, opisującej również zjawiska lokalne towarzyszące obciążeniom o dużym gradiencie. Z punktu widzenia oceny bezpieczeństwa konstrukcji, waga tych lokalnych efektów wydaje się być decydująca, co sygnalizuje porównanie dwóch pierwszych składników sumy po prawej stronie znaku równości we wzorze (4.7). Można wykazać, że, o ile w myśl teorii E. Reissnera zginanie płyt opisuje układ równań różniczkowych cząstkowych łączenie rzędu szóstego, to zaproponowane w 3.2 rozszerzenie podwyższa ten rząd trzykrotnie. Z tego między innymi powodu, wydaje się bardziej celowe formułowanie zadań dotyczących płyt o skończonych wymiarach w sposób prowadzący do układu równań całkowych, a nie różniczkowych. Aby stało się to możliwe, konieczne jest uzyskanie rozwiązań podstawowych (funkcji Greena). Rozwiązania podstawowe będą przedstawione w odrębnej pracy. Zaproponowany tu sposób uproszczenia równań prowadzi w istocie do ograniczenia liczby wyrazów wielomianu opisującego składową σ_{33} tensora naprężenia. Inną, jakościowo różną drogę konstrukcji modelu przybliżonego, stwarzają układy równań (3.22) i (3.44).

Literatura cytowana w tekście

1. W. Nowacki, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
2. S. Timoszenko, S. Woinowsky-Krieger, *Teoria płyt i powłok*, Warszawa 1962.
3. K. Girkmann, *Dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1957.
4. St. Łukasiewicz, *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, Warszawa 1976.
5. W. Nowacki, *Dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1979.

Резюме

О НЕКОТОРОМ ПОПОЛНЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛИТ Э. РЕЙСНЕРА

В работе обсуждены уравнения теории упругости, описывающие деформации изотронной и однородной полосы, состоящей из упругого материала, под действием поверхностных нагрузок. В частном случае представленное решение проблемы непосредственно сводится к уравнениям Рейснера в теории пластин. В результате получены уравнения, способные решать рассматриваемые проблемы, особенно при сосредоточных нагрузках. Предлагаемый способ решения проблемы позволяет ослабить принятые Рейснером предположения, что приводит к более точным решениям.

Summary

COMPLEMENTARY REMARKS ON E. REISSNER'S PLATE THEORY

Fundamental equations of the elasticity theory are presented for the case of an isotropic, homogeneous, linearly elastic layer of constant thickness loaded at the surfaces. The approach proposed makes it possible to apply the model of the layer known from the Reissner theory and to disregard certain simplyfying assumptions used in that theory. The equations derived yield the results which are closer to the accurate solutions, first of all in the cases when the load consists of concentrated forces.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 sierpnia 1988 r.