

K O M U N I K A T Y

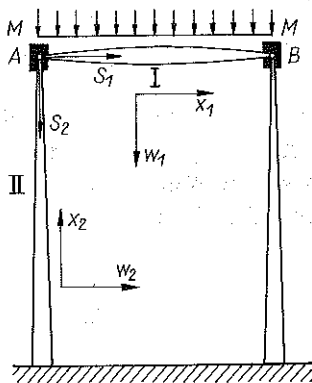
OPTIMALIZACJA UKŁADU PRĘTÓW Z UWZGLĘDNIENIEM WPLYWU KSZTAŁTU NA FORMY DRGAŃ*)

ANNA F O R Y Ś (KRAKÓW)

Praca dotyczy optymalizacji parametrycznej układu trzech prętów w stanie rezonansu wewnętrznego. Pręty są połączone za pomocą przegubów, w których znajdują się dodatkowe masy. Całkowita masa układu jest stała. Celem optymalizacji jest osiągnięcie minimalnej amplitudy drgań. Wpływ kształtu na formy drgań uwzględniono za pomocą metody Ritz'a. Otrzymane wyniki zostały przedstawione na wykresach.

1. UWAGI WSTĘPNE

W pracy [1] rozważono układ trzech prętów o zmiennych przekrojach, z masami skupionymi umieszczonymi w połączeniach przegubowych (rys. 1). Układ znajdował się w stanie ustalonym rezonansu wewnętrznego. W opisie uwzględniono sprzężenie elementów przez wewnętrzne siły podłużne. W wymienionej pracy przeprowadzono analizę wpływu kształtu prętów na amplitudy rezonansowe, poszukując optymalnego kształtu ze względu na minimum



Rys. 1. Układ drgający

*) Praca została wykonana w ramach CPBP 02.01/6.3.

amplitudy. W rozważaniach zaniedbano jednak wpływ współczynników charakteryzujących kształt prętów na formy drgań, które przyjęto takie, jak dla prętów pryzmatycznych.

Niniejszy komunikat ma na celu parametryczną optymalizację zagadnienia z uwzględnieniem wpływu kształtu na formy drgań. Zastosowano metodę Ritza. Zależność amplitudy rezonansowej od kształtu pręta jest inna niż przedstawiona w pracach [1 i 2]. Minimum amplitudy nie występuje zawsze dla $\kappa_2 = 1$, jak poprzednio. Zmniejsza się również przedział zmienności współczynnika κ_2 .

2. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Dokładny opis układu drgającego oraz układ równań różniczkowych ruchu zostały podane w pracy [1]. Pręty posiadają przekroje kwadratowe, bok a_1 pręta poziomego I jest opisany kwadratową funkcją współrzędnych, natomiast bok a_2 pręta pionowego II zmienia się liniowo:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} a_1(x_1) &= \alpha_1 \left[4\kappa_1 \left(\frac{x_1^2}{l_1^2} - \frac{x_1}{l_1} \right) + 1 \right], \\ a_2(x_2) &= \alpha_2 \left[1 - \kappa_2 \frac{x_2}{l_2} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1}, & a_1(0) &= \alpha_1, & a_1\left(\frac{l_1}{2}\right) &= \beta_1, & \kappa_1 &\in (-\infty, 1), \\ \kappa_2 &= \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2}, & a_2(0) &= \alpha_2, & a_2(l_2) &= \beta_2, & \kappa_2 &\in (-\infty, 1). \end{aligned}$$

Na podstawie powyższych wzorów podano zależności współczynników układu równań od parametrów kształtu κ_1 , κ_2 , α_1 , α_2 ; por. [1].

Aby określić dodatkowo wpływ współczynników kształtu na formy drgań prętów I i II przyjmujemy jako funkcje wyjściowe formy drgań prętów pryzmatycznych:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} Y_1(x_1) &= \sin \frac{\pi x_1}{l_1}, \\ Y_2(x_2) &= -\cos \lambda_1 \left[\sin \lambda_1 \frac{x_2}{l_2} - \operatorname{sh} \lambda_1 \frac{x_2}{l_2} - \operatorname{tg} \lambda_1 \left(\cos \lambda_1 \frac{x_2}{l_2} - \operatorname{ch} \lambda_1 \frac{x_2}{l_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Metodę Ritza stosujemy do każdego pręta oddzielnie, pomijając wpływ sprzężenia, tak samo jak w pracy [1]. Skorzystamy z faktu, że podczas

ustalonych drgań wymuszonych, a w szczególności w rezonansie wewnętrznym, całkowita energia mechaniczna jest ustalona:

$$(2.3) \quad E = T + V = \text{const} \quad \text{lub} \quad V_{\max} = T_{\max}.$$

Obecnie przyjmujemy wychylenia poprzeczne w postaci

$$(2.4) \quad w_i(x_i, t) = U^{(i)}(x_i) \sin\left(\frac{N_i \omega}{n_i} t + \varphi\right),$$

dla $i = 1, \quad N_1 = 1, \quad n_1 = 1, \quad \text{dla} \quad i = 2, \quad N_2 = 1, \quad n_2 = 2,$

gdzie $U^{(i)}(x_i)$ są poszukiwanymi funkcjami, które będą zależę od parametrów kształtu. Są to zmodyfikowane formy drgań prętów niepryzmatycznych. Dla każdego pręta obliczamy maksymalną energię potencjalną i kinetyczną, otrzymując funkcjonały

$$(2.5) \quad \frac{N_i^2 \omega^2}{n_i^2} = \frac{V_i \left[U^{(i)}(x_i), \frac{\partial}{\partial x_k} U^{(i)}(x_i), \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} U^{(i)}(x_i) \right]}{T_i [U^{(i)}(x_i)]} = F_i [U^{(i)}(x_i)].$$

Dalsze postępowanie jest standardowe. Funkcje $U^{(i)}$ przedstawiamy w postaci szeregów

$$(2.6) \quad U^{(i)}(x_i) = \sum_{k=1}^n a_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(x_i) = a_{1l}^{(i)} \sum_{k=1}^n \mu_{kl}^{(i)} \varphi_k^{(i)}(x_i),$$

gdzie wskaźnik i numeruje pręty, k oznacza liczbę funkcji wziętą do obliczeń, l numeruje częstości. Jako funkcje $\varphi_k^{(i)}$ przyjmujemy funkcje typu (2.2). Współczynniki $\mu_{kl}^{(i)} = \frac{a_{kl}}{a_{1l}}$ będą zależę od parametrów charakteryzujących kształt pręta, $k = 2, 3, \dots, n$, $\mu_{1l} = 1$. Częstości własne elementów układu wyznaczamy na podstawie równań

$$(2.7) \quad \frac{\partial V_i(a_1, \dots, a_n)}{\partial a_r^{(i)}} - \frac{N_i^2 \omega^2}{n_i^2} \frac{\partial T_i(a_1, \dots, a_n)}{\partial a_r^{(i)}} = 0, \quad i = 1, 2, r = 1, 2, \dots, n.$$

Zajmiemy się prętem I, dla którego

$$(2.8) \quad U^{(1)}(x_1) = a_1^{(1)} \varphi_1^{(1)}(x_1) + a_2^{(1)} \varphi_2^{(1)}(x_1) = a_1 \sin \frac{\pi x_1}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x_1}{l}.$$

Układ równań (2.7) ma postać

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 a_1 + \tilde{\alpha}_2 a_2 &= 0, \\ \tilde{\beta}_1 a_1 + \tilde{\beta}_2 a_2 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\beta}_1 = 0$, co można wykazać, natomiast

$$\tilde{\alpha}_1 = \int_0^l \left[E \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 J(x) - \omega^2 m(x) \right] \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx, \quad (2.10)$$

$$\tilde{\beta}_2 = \int_0^l \left[E \left(2 \frac{\pi}{l} \right)^4 J(x) - \omega^2 m(x) \right] \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx.$$

Równania (2.9) sprowadzają się zatem do równań

$$\begin{aligned} a_1 \tilde{\alpha}_1 &= 0, \\ a_2 \tilde{\beta}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Jeżeli $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, to $U^{(1)}(x_1) = a_1 \sin(\pi x_1/l)$. Z warunku $\tilde{\alpha}_1 = 0$ otrzymujemy częstość drgań elementu I:

$$\omega^2 = \frac{E\pi^2 \int_0^l J(x) \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx}{I^4 \int_0^l m(x) \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx} = \frac{E\alpha_1^2}{I_1^4 \varrho} \frac{f_2(x_1)}{f_1(x_1)} = \frac{B}{A}. \quad (2.12)$$

W tym przypadku pierwsza częstość obliczona metodą Ritz'a jest równa częstości drgań własnych pręta pryzmatycznego [1]. Równania (2.11) są spełnione również, jeśli $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$. Wówczas $U^{(1)}(x_1) = a_2 \sin 2(\pi x/l)$. Ponieważ $\tilde{\beta}_2 = 0$, przeto uzyskujemy drugą częstość własną taką, jak dla pręta pryzmatycznego. Dla pręta I o przekroju poprzecznym, który zmienia się zgodnie z pierwszym wzorem (2.1) oraz dla $U^{(1)}$ jest postaci (2.8), współczynnik kształtu nie ma wpływu na formy drgań i można je przyjąć takie, jak dla pręta pryzmatycznego.

Zajmiemy się z kolei elementem II układu prętów. Funkcje $U^{(2)}(x_2)$ przyjmujemy w postaci

$$U^{(2)}(x_2) = a_1^{(2)} Y_2(x_2, \lambda_1) + a_2^{(2)} Y_2(x_2, \lambda_2). \quad (2.13)$$

Układ równań (2.7) jest następujący:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 a_1 + \tilde{\alpha}_2 a_2 &= 0, \\ \tilde{\beta}_1 a_1 + \tilde{\beta}_2 a_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \alpha_2^4 k(x_2) - \frac{\omega^2}{4} l(x_2) \alpha_2^2, \\ \tilde{\alpha}_2 &= \alpha_2^4 m(x_2) - \frac{\omega^2}{4} n(x_2) \alpha_2^2 = \tilde{\beta}_1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\tilde{\beta}_2 = \alpha_2^4 q(\kappa_2) - \frac{\omega^2}{4} p(\kappa_2) \alpha_2^2.$$

Natomiast k, l, m, n, p i q są wielomianami stopnia czwartego lub drugiego ze względu na κ_2 . Z warunku istnienia niezerowych rozwiązań równań (2.14) otrzymujemy równanie charakterystyczne na częstość drgań własnych elementu II, którego rozwiązanie jest następujące:

$$(2.16) \quad \omega^2 = \alpha_2^2 \frac{-(2mn - lq - kp) \pm \sqrt{Z}}{2(lp - n^2)}, \quad Z = (lq - kp)^2 + 4(kn - lm)(nq - mp).$$

Następnie obliczamy

$$(2.17) \quad \mu = \mu_2 = \mu_{21}(\kappa_2) = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_2} = -\frac{\alpha_2^2 k(\kappa_2) - \omega^2 l(\kappa_2)}{\alpha_2^2 m(\kappa_2) - \omega^2 n(\kappa_2)}.$$

Powyższy wzór wskazuje na wpływ kształtu na formę drgań niepryzmatycznego pręta II.

3. OPTIMALIZACJA PARAMETRYCZNA

Szukamy takich parametrów określających kształt prętów w rozważanej klasie funkcji (zmiennie optymalizacji), przy których amplituda drgań pręta II (funkcja celu) posiada minimum. Postępowanie jest takie, jak w pracy [1]. Dodatkowym warunkiem ograniczającym jest stałość masy całego układu. Zmianie ulegają całki $f_{\bar{A}}, f_{\bar{B}}$ itd., por. [1]. Należy je zastąpić całkami $f_{\bar{A}}^{\mu}, f_{\bar{B}}^{\mu}$ itd., w których użyto form określonych wzorem (2.13). Podajemy tutaj przykładowo

$$(3.1) \quad \begin{aligned} f_{\bar{A}}^{\mu} &= \int_0^1 (1 - \kappa_2 x)^2 [Y_2(\lambda_1) + \mu Y_2(\lambda_2)]^2 dx = \\ &= f_{\bar{A}} + \mu (-32,152\kappa_2 + 17,726\kappa_2^2) \cdot 10^{-2} + \\ &\quad + \mu^2 (0,49998 - 0,51993\kappa_2 + 0,16514\kappa_2^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\bar{B}}^{\mu} &= \int_0^1 (1 - \kappa_2 x)^4 [Y_2''(\lambda_1) + \mu Y_2''(\lambda_2)]^2 dx = \\ &= f_{\bar{B}} + \mu (8,0245\kappa_2^4 - 39,856\kappa_2^3 + 72,764\kappa_2^2 - 54,285\kappa_2) + \\ &\quad + \mu^2 (18,807\kappa_2^4 - 97,471\kappa_2^3 + 199,22\kappa_2^2 - 199,75\kappa_2 + 104,03). \end{aligned}$$

Jeżeli określone są parametry, które zapewniają pozostawanie układu w stanie rezonansu wewnętrznego, to można analizować amplitudy drgań $R_2(\kappa_2)$ jako funkcje tych parametrów. Wzory na amplitudy były podane w pracy [1]. Zmianie ulegają jedynie pewne współczynniki z powodu wprowadzenia nowych wyrażań $f_{\bar{A}}^{\mu}, f_{\bar{B}}^{\mu}$ itd.

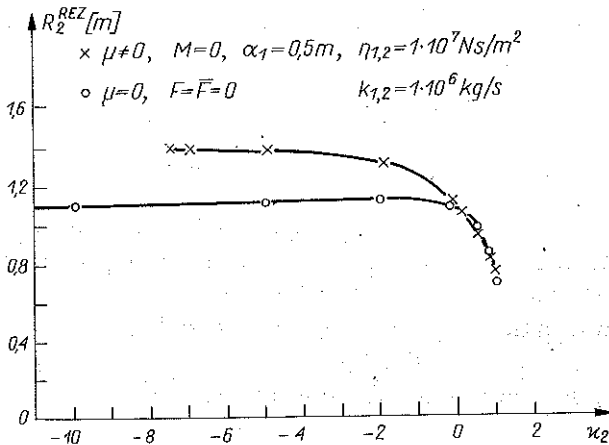
4. WNIOSKI

W obliczeniach numerycznych użyto dane liczbowe z pracy [1]. Etapy obliczeń były następujące:

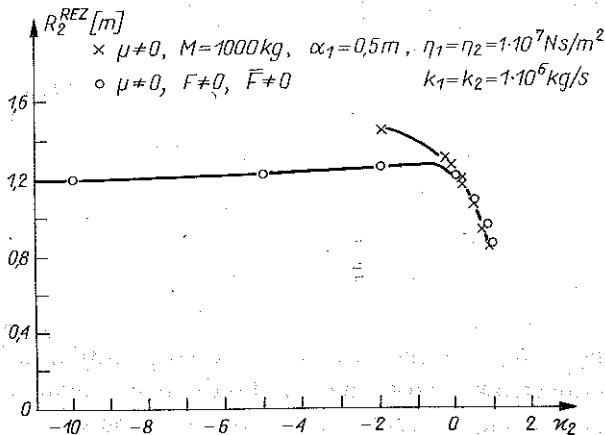
1) Stosując metodę Ritz'a, obliczaliśmy współczynnik μ w zależności od ustalonego parametru κ_2 .

2) Dysponując poprawionymi formami dla elementu II, obliczyliśmy na podstawie warunku rezonansowego κ_1 przy ustalonym κ_2 . Następnie obliczyliśmy parametr α_2 z warunku stałej masy przy ustalonym parametrze α_1 , związanym ze sprzężeniem; por. [1].

3) Mając ustalone i obliczone wszystkie parametry kształtu, przeanalizowano zależność $R_2^{REZ}(\kappa_2)$ na wykresach. Dla porównania na każdym wykresie przedstawione są analogiczne rezultaty, gdy $\mu = 0$.

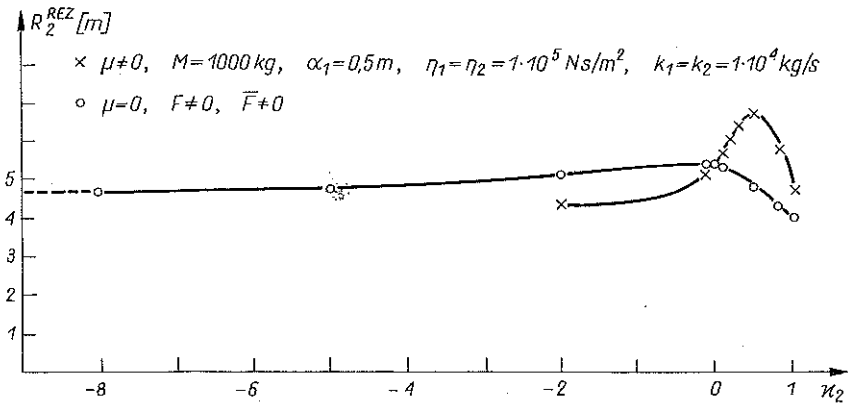


Rys. 2. Amplituda rezonansowa pręta II



Rys. 3. Amplituda rezonansowa pręta II

Otrzymane obecnie wyniki wskazują, że przedział zmienności parametru κ_2 został ograniczony: w pierwszym przykładzie $\kappa_2 \in (-7, 5, 1)$, w drugim $\kappa_2 \in (-2, 1)$. Istnieje zatem ograniczenie kształtu rozważanych prętów. Na rysunkach 2, 3 i 4 są przedstawione wzory na $R_2^{rez}(\kappa_2)$ dla różnych wartości M oraz różnych wartości współczynnika tłumienia. Niezerowe amplitudy rezonansowe występują dla podanych wyżej przedziałów współczynnika κ_2 . W pewnych przypadkach (rysunki 2 i 3) minimum amplitudy występuje dla $\kappa_2 = 1$, podobnie jak przy zaniedbaniu wpływu współczynnika kształtu na formy drgań. Występują natomiast różnice ilościowe. W jednym z analizowanych przypadków (rys. 4) minimum amplitudy rezonansowej występuje dla $\kappa_2 = -2$.



Rys. 4. Amplituda rezonansowa pręta II

Minimum amplitudy oraz wartość κ_2 , dla której występuje, zależą od wartości mas umieszczonych w przegubach i od wartości współczynników tłumienia. Każdy przypadek wymaga oddzielnej analizy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. FORYŚ, A. FORYŚ, *Optymalizacja parametryczna układu prętów z uwzględnieniem nieliniowości*, Rozpr. Inżyn., 32, 4, 1984.
2. A. FORYŚ, A. GAJEWSKI, *Analiza i optymalizacja układu prętowego o zmiennych przekrojach w warunkach rezonansu wewnętrznego*, Rozpr. Inżyn., 32, 4, 1984.

INSTYTUT FIZYKI
POLITECHNIKA KRAKOWSKA, KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji w dniu 26 marca 1987 r.