ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 34, 4, 457–481, 1986
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

ZAGADNIENIE OPTYMALIZACJI WIELOKRYTERIALNEJ KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

STEFAN JENDO i WOJCIECH MARKS (WARSZAWA)

W pracy omówiono cele i zadania optymalizacji konstrukcji, przedstawiono cząstkowe i globalne kryteria optymalizacji oraz sformułowanie zagadnień optymalizacji jedno- i wielokryterialnej. Zwrócono uwagę na istnienie dwóch grup zagadnień optymalizacji wielokryterialnej — takich, które mogą być sprowadzone do jednego lub kilku zadań optymalizacji jednokryterialnej (skalarnej) i takich, które nie mogą być sprowadzone do optymalizacji skalarnej. Zaproponowano układ wielkości, który należy uważać za rozwiązanie zagadnienia wielokryterialnej optymalizacji konstrukcji w obydwu przypadkach. Przedyskutowano kwestię obiektywności rozwiązań optymalizacji wielokryterialnej. Rozważania zilustrowano przykładami optymalizacji belki sprężonej i kratownicy. W załączniku podano wybrane metody znajdowania rozwiązań preferowanych.

1. Zadania i cele optymalizacji konstrukcji

Optymalizacja jest obecnie pojęciem używanym bardzo często i w sposób wieloznaczny, a więc zarówno w odniesieniu do działu matematyki zajmującego się poszukiwaniem ekstremów funkcji lub funkcjonałów, jak i wówczas gdy chodzi o wybór najlepszego, w różnym tego słowa znaczeniu, rozwiązania konstrukcyjnego, ekonomicznego, transportowego i innych.

Niniejsze opracowanie dotyczy optymalizacji konstrukcji, tzn. zagadnień wyznaczania kształtu i cech fizycznych konstrukcji lub jej elementów, a także wprowadzania dodatkowych układów wstępnych obciążeń lub odkształceń.

Celem optymalizacji jest wybór najlepszego rozwiązania z szeregu możliwych. Aby słowo „najlepsze" miało sens, konieczne jest określenie celów, którym konstrukcja ma służyć i miernika lub mierników jej wartości. Te mierniki nazywane są kryteriami optymalizacji lub funkcjami celu. Ich wybór ma zasadnicze znaczenie i decyduje o wartości konstrukcji. Różne kryteria stosowane w optymalizacji konstrukcji omówiono m.in. w pracach [1 i 11].

W pewnych przypadkach możliwa jest ocena konstrukcji za pomocą jednego kryterium, na przykład kosztu konstrukcji. Wówczas mamy do czynienia z optymalizacją jednokryterialną. W innych przypadkach jakości konstrukcji nie można ocenić za pomocą jednego kryterium, lecz za pomocą wielu niezależnych kryteriów, na przykład minimalizacji ciężaru i maksymalizacji najniższej częstości drgań własnych. Mamy wówczas do czynienia z optymalizacją wielokryterialną, inaczej optymalizacją wektorową lub polioptymalizacją.

W optymalizacji konstrukcji prawie nigdy nie poszukujemy ekstremum bezwarunkowego funkcji celu. Zwykle występuje wiele ograniczeń, które określają obszar rozwiązań dopuszczalnych. Ograniczenia mają postać równości lub nierówności; są nimi zarówno równania wiążące obciążenia z siłami wewnętrznymi w konstrukcji jak i ograniczenia dotyczące dopuszczalnych wielkości wytężeń i przemieszczeń, a także ograniczenia wymiarów konstrukcji i jej elementów wynikające z wymagań użytkowych, konstrukcyjnych, technologicznych i innych. Najczęściej rozwiązania występują na brzegu obszaru dopuszczalnego, stąd duże znaczenie ograniczeń w formułowaniu zagadnień optymalizacji konstrukcji. Pominięcie istotnego ograniczenia w optymalizacji konstrukcji powoduje uzyskanie rozwiązania nieprzydatnego.

Ważnym elementem formułowania zagadnień optymalizacji konstrukcji jest wybór zmiennych decyzyjnych, czyli parametrów kształtu i kształtowania. Zmiennymi decyzyjnymi mogą być wymiary geometryczne poszczególnych elementów, wielkości opisujące konfigurację konstrukcji, wielkości mechaniczne lub fizyczne opisujące właściwości materiału, z którego wykonana jest konstrukcja, jak również inne wielkości charakteryzujące daną konstrukcję.

Istotnym zagadnieniem jest wrażliwość funkcji celu na wariacje zmiennych decyzyjnych. Przy formułowaniu zadań optymalizacji należy zdawać sobie z tego sprawę. Istotne efekty optymalizacji uzyskiwane są wtedy, gdy poszukujemy minimum funkcji celu względem zmiennych, od których ta funkcja silnie zależy.

Zagadnienie optymalizacji konstrukcji można uważać za poprawnie sformułowane tylko wtedy, kiedy określone jest kryterium lub kryteria optymalizacji, ograniczenia i zmienne decyzyjne. Nie ma też sensu określenie „konstrukcja optymalna" bez podania w sensie jakiego kryterium, przy jakich ograniczeniach i względem jakich zmiennych decyzyjnych.

Nieprecyzyjne stosowanie pojęcia „konstrukcja optymalna" jest często powodem nieporozumień, a nawet negowania wyników uzyskanych w procesie optymalizacji. Wynika to z oceniania uzyskanego rozwiązania na podstawie innego kryterium lub przy innych ograniczeniach.

Należy jeszcze zwrócić uwagę na to, że przedmiotem optymalizacji jest nie konstrukcja, a jej model fizyczny, a następnie model matematyczny i że wynik będzie wtedy przydatny, gdy model będzie dostatecznie wiernie opisywał konstrukcję.

Optymalizacja konstrukcji jest syntezą mechaniki konstrukcji i matematycznych metod optymalizacji. Znajomość mechaniki konstrukcji oraz technologii jej wykonania i eksploatacji pozwala na poprawne i dostatecznie ogólne sformułowanie zagadnienia optymalizacji. Znajomość metod matematycznych optymalizacji pozwala na wybór właściwej metody rozwiązania zagadnienia optymalizacji. Natomiast doświadczenie, inwencja i intuicja inżynierska pozwala na poprawny wybór projektu wstępnego i określenie punktu startowego niezbędnego do inicjacji procedur optymalizacyjnych.

Optymalizacja konstrukcji dotyczy zagadnień wyboru parametrów geometrycznych oraz wytrzymałościowych cech elementów konstrukcyjnych i całych konstrukcji. Wybór ten polega na poszukiwaniu rozwiązań ekstremalnych w sensie uprzednio określonych kryteriów, przy czym metody optymalizacji prowadzą do uzyskiwania informacji o parametrach i cechach konstrukcji w sposób obiektywny, a więc bez konieczności wykorzystywania cech indywidualnych projektanta, takich jak intuicja i inwencja lub doświadczenie.

W ten sposób optymalizacja zastępuje tę część operacji projektowania konstrukcji, która polega na intuicyjnym dobieraniu jej kształtów i wymiarów.

Optymalizacja nie zastępuje więc projektowania w tradycyjnym tego słowa znaczeniu, tzn. nie jest jej zadaniem objęcie wszystkich parametrów określających konstrukcję tak, aby rozwiązanie zagadnienia optymalizacji było równoznaczne z uzyskaniem projektu konstrukcji. Mosty, budynki, czy inne obiekty są dziełami sztuki inżynierskiej i w związku z tym ostateczny wybór ich kształtu jest i powinien być dokonywany przez projektanta. Automatyzacja projektowania powinna dotyczyć nie wyboru koncepcji konstrukcji, a jej sprawdzania i wykonywania projektu technicznego. Zastosowanie optymalizacji sprawia jednak, że wybór koncepcji może być oparty na przesłankach racjonalnych, a nie tylko na intuicji i doświadczeniu. Celem optymalizacji jest więc dostarczenie projektantowi możliwie pełnej informacji o wpływie wariacji zmiennych decyzyjnych na wartości funkcji celu oraz o ekstremalnych wielkościach tych funkcji.

Dlatego zagadnienia optymalizacji konstrukcji powinny być formułowane tak, aby uwzględnione w nich były istotne w przypadku danej konstrukcji wymagania i ograniczenia. Sformułowanie zadania nie musi jednak obejmować wszystkich szczegółowych ograniczeń i wymagań. Niektóre z nich mogą być uwzględniane na dalszych etapach wykonywania projektu.

2. Kryteria stosowane w optymalizacji konstrukcji

2.1. *Kryteria cząstkowe*

Optymalizacja wielokryterialna pozwala na uwzględnienie wielu kryteriów cząstkowych, które często są konfliktowe. Możliwe jest wtedy znalezienie rozwiązania kompromisowego, w którym — co prawda — na ogół żadne kryterium cząstkowe nie osiąga ekstremum, ale które zapewnia spełnienie wszystkich wymagań w sposób możliwie najlepszy, określony przez kryterium globalne.

Do najczęściej spotykanych kryteriów cząstkowych, występujących w optymalizacji konstrukcji, należą następujące 1) minimum objętości lub ciężaru, 2) minimum potencjału lub maksimum sztywności, 3) maksimum siły krytycznej, 4) maksimum częstości drgań własnych, 5) maksimum bezpieczeństwa lub niezawodności oraz 6) maksimum momentu bezwładności. Kryteria te zostały opisane w pracy [11].

2.2. *Kryteria globalne*

W wyniku spełnienia kilku kryteriów cząstkowych wymienionych powyżej uzyskujemy zwykle rozwiazanie w postaci zbioru kompromisów. Z tego zbioru należy wybrać konstrukcję optymalną (preferowaną) na podstawie kryterium globalnego.

Do najczęściej spotykanych kryteriów globalnych należą [11]: 1) funkcja użyteczności, która często ma postać kryterium minimum kosztów oraz 2) funkcja metryczna, określająca odległość rozwiązania idealnego od zbioru kompromisów.

Rozwiązanie preferowane można również wyznaczyć przyjmując jedno z kryteriów cząstkowych jako najważniejsze oraz obierając dopuszczalne przedziały zmienności pozostałych. Innym sposobem wyznaczania rozwiązania preferowanego jest hierarchizacja kryteriów. Rozwiązywanie polega na spełnieniu najpierw kryterium najważniejszego, a w miarę możliwości następnych [11].

3. Formułowanie i rozwiązywanie zagadnień optymalizacji jedno- i wielokryterialnej

Sformułowanie zagadnienia optymalizacji jednokryterialnej (skalarnej) ma postać następującą. Znaleźć n-wymiarowy wektor zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x}$, minimalizujący skalarną funkcję celu $f(\mathbf{x})$ oraz spełniający ograniczenia równościowe $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ oraz nierównościowe $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqslant 0$, lub inaczej

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}),$$

gdzie $\Omega = \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqslant 0\}$ jest dopuszczalnym obszarem zmiennych.

Natomiast zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej (wektorowej) można sformułować w następujący sposób. Znaleźć n-wymiarowy wektor zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x} \in \Omega$, który minimalizuje wektorową funkcję celu, tzn.

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

gdzie $\mathbf{f}: \Omega \to R^k$ jest wektorową funkcją celu i ma postać następującą

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_k(\mathbf{x})\}.$$

Składowe $f_i: \Omega \to R$, $i = 1, 2, ..., k$ są nazywane kryteriami cząstkowymi optymalizacji.

Na ogół niemożliwe jest wyznaczenie rozwiązania dopuszczalnego idealnego, tzn. $f_i^{id} = \min_{\mathbf{x}\in\Omega} f_i$, $i = 1, 2, ..., k$, ponieważ kryteria czastkowe f_i są najczęściej wzajemnie konfliktowe. Zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej rozwiązuje się najczęściej w dwu etapach. Najpierw poszukuje się zbioru kompromisów, a następnie wybiera się ze zbioru kompromisów rozwiązanie preferowane.

Istnieje szereg metod wyznaczania zbioru kompromisów, które można znaleźć w wielu pracach z tej dziedziny, np. [3, 4, 8, 10, 12 i 14].

Po wyznaczeniu zbioru kompromisów należy wybrać rozwiązanie preferowane. Kilka sposobów wyboru rozwiązania preferowanego przedstawiono w pracach [8, 9, 11, 14 i 15]. Należą do nich metoda funkcji użyteczności [5, 6 i 7], metoda funkcji metrycznej [12] nazywana niekiedy metodą kryterium globalnego [8 i 10], metoda ograniczonych funkcji celu i metoda leksykograficzna [8 i 10] (por. załącznik).

W wyniku rozwiązania zagadnienia optymalizacji jednokryterialnej otrzymujemy wektor zmiennych decyzyjnych oraz wartość funkcji celu. Interesująca może być w wielu przypadkach wrażliwość funkcji celu na wariacje zmiennych decyzyjnych, zwłaszcza w otoczeniu ekstremalnej wartości tej funkcji.

W wyniku optymalizacji wielokryterialnej chcielibyśmy otrzymać rozwiązanie preferowane, tzn. wektor wartości funkcji celu i wektor zmiennych decyzyjnych. Aby jednak uzyskanie rozwiązania preferowanego było możliwe, konieczna jest dodatkowa informacja, tzw. informacja o preferencjach. Niezależnie od tego, czy są one podawane przy sformułowaniu zagadnienia, czy w trakcie jego rozwiązywania [7] mają one charakter dodatkowego kryterium lub dodatkowych ograniczeń.

Zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej można podzielić na dwie grupy: zagadnienia, które mogą być sprowadzone do jednego lub kilku zadań optymalizacji jednokryterialnej (skalarnej) i zagadnienia, które nie mogą być sprowadzone do optymalizacji skalarnej.

Zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej może być sprowadzone do optymalizacji jednokryterialnej, jeżeli można i) określić funkcję użyteczności, ii) wybrać jedną ze składowych wektorowej funkcji celu jako kryterium globalne i określić przedziały zmienności pozostałych, oraz iii) określić pożądane wartości wszystkich funkcji celu [8 i 10] (por. załącznik).

Zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej może być sprowadzone do szeregu zadań optymalizacji skalarnej, jeżeli możliwe jest uszeregowanie poszczególnych funkcji celu według ważności [8 i 10].

W wymienionych wyżej przypadkach uzyskujemy rozwiązania jednoznaczne. Różnią się one tym od rozwiązań zagadnień optymalizacji jednokryterialnej, że uzyskujemy dodatkowe informacje o wartościach poszczególnych funkcji celu wchodzących w skład kryterium globalnego. Można również badać wrażliwość kryterium globalnego na wariacje poszczególnych funkcji celu.

Jeżeli nie dysponujemy informacjami o preferencjach, zagadnienie optymalizacji skalarnej. Nie uzyskujemy wtedy rozwiązania jednoznacznego. Uzyskujemy natomiast w wyniku rozwiązania szereg informacji o rozpatrywanym zagadnieniu. Należą do nich następujące informacje obiektywne: zbiór kompromisów, rozwiązanie idealne oraz informacja nieobiektywna, najbliższy rozwiązania idealnego punkt należący do zbioru kompromisów. Punkt ten nie jest obiektywny, gdyż zależy od jednostek poszczególnych funkcji celu lub sposobu sprowadzenia funkcji celu do wielkości bezwymiarowych. Informacje powyższe ułatwiają projektantowi wybór rozwiązania.

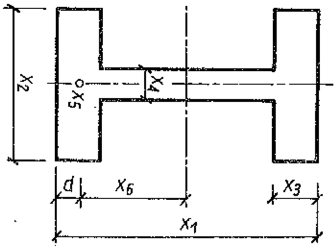
Przy traktowaniu zagadnień optymalizacji jako etapu projektowania umożliwiającego racjonalny wybór koncepcji lub projektu wstępnego proponujemy jako rozwiązanie zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej uważać zespół następujących wielkości: i) zbiór kompromisów, ii) rozwiązanie idealne oraz iii) rozwiązanie preferowane czyli wektor funkcji celu $\mathbf{f}^{pr}$ i odpowiadający im wektor zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x}^{pr}$; wielkości te mogą być określone jednoznacznie, jeżeli istnieją informacje o preferencjach; w przeciwnym razie rozwiązanie preferowane stanowią: najbliższy rozwiązania idealnego punkt należący do zbioru kompromisów i odpowiadający mu wektor zmiennych decyzyjnych, iv) wektor wrażliwości rozwiązania na zmiany poszczególnych funkcji celu $\partial F/\partial f_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, w punkcie $\mathbf{f}^{pr}$, przy czym F oznacza funkcję opisującą kryterium globalne oraz v) rozległość zbioru kompromisów, czyli wektor $\Delta f_i = \bar{f}_i - f_i^{id}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

W przypadku zadań skomplikowanych znalezienie wyżej podanego pełnego rozwiązania może być trudne i wówczas można zrezygnować z niektórych jego elementów.

4. Przykłady optymalizacji wielokryterialnej konstrukcji

4.1. Zastosowanie funkcji użyteczności

Sformułowanie zadania. Celem optymalizacji jest dobranie takich wymiarów przekroju dwuteowego belki z betonu sprężonego (rys. 1) i takich wielkości siły sprężającej i jej mimośrodu, aby objętości betonu i stali



Rys. 1. Przekrój dwuteowej belki optymalizowanej

sprężającej były minimalne. Rozpatrywane są dwa skrajne (ekstremalne) stany obciążenia belki, które wywołują momenty zginające M_1 i M_2.

Jako zmienne decyzyjne przyjęto: wysokość belki x_1, szerokość półek x_2, grubość półek x_3, grubość środnika x_4, wielkość siły sprężającej x_5 oraz mimośród siły sprężającej x_6. A więc wektor zmiennych decyzyjnych ma postać $\mathbf{x}^T = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Zmienne decyzyjne muszą spełniać następujące ograniczenia:

wytrzymałościowe w dwóch stanach obciążenia [13]

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_5}{A} - \frac{x_5 x_6}{J}\frac{x_1}{2} + \frac{M_1}{J}\frac{x_1}{2} \leqslant \bar{\sigma}_1,\\
&\frac{x_5}{A} + \frac{x_5 x_6}{J}\frac{x_1}{2} - \frac{M_1}{J}\frac{x_1}{2} \geqslant \underline{\sigma}_1,\\
&\frac{x_5}{A} - \frac{x_5 x_6}{J}\frac{x_1}{2} + \frac{M_2}{J}\frac{x_1}{2} \geqslant \underline{\sigma}_2,\\
&\frac{x_5}{A} + \frac{x_5 x_6}{J}\frac{x_1}{2} - \frac{M_2}{J}\frac{x_1}{2} \leqslant \bar{\sigma}_2;
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

konstrukcyjne

$$
x_1 \leqslant \bar{x}_1, \quad x_2 \leqslant \bar{x}_2, \quad x_3 \geqslant \underline{x}_3, \quad x_4 \geqslant \underline{x}_4, \quad x_6 \leqslant \frac{x_1}{2} - d.
$$

Powyższe ograniczenia tworzą obszar dopuszczalny Ω.

Kryteria optymalizacji są następujące:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \Omega} A = 2x_2 x_3 + x_4 (x_1 - 2x_3),\\
&\min_{x \in \Omega} S = x_5.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Z rozważań przedstawionych w pracy [13] wynika, że zmienne decyzyjne $x_1 - x_4$ można wyrazić przez pole przekroju A i wielkości graniczne tych zmiennych $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\underline{x}_3$, $\underline{x}_4$, a także że minimum funkcji celu (4.2) występuje przy $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$, $x_4 = \underline{x}_4$,

$$
x_3 = \frac{1}{2}\,\frac{A - \bar{x}_1 \underline{x}_4}{\bar{x}_2 - \underline{x}_4} \quad \text{oraz} \quad x_6 = \frac{\bar{x}_1}{2} - d.
$$

Uwzględniając powyższe zależności układ nierówności (4.1) można przedstawić w postaci

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_5}{A}-\frac{x_5}{J}\left(\frac{\bar{x}_1}{2}-d\right)\frac{\bar{x}_1}{2}+\frac{M_1}{J}\frac{\bar{x}_1}{2}\leqslant\bar{\sigma}_1,\\
&\frac{x_5}{A}+\frac{x_5}{J}\left(\frac{\bar{x}_1}{2}-d\right)\frac{\bar{x}_1}{2}-\frac{M_1}{J}\frac{\bar{x}_1}{2}\geqslant\underline{\sigma}_1,\\
&\frac{x_5}{A}-\frac{x_5}{J}\left(\frac{\bar{x}_1}{2}-d\right)\frac{\bar{x}_1}{2}+\frac{M_2}{J}\frac{\bar{x}_1}{2}\geqslant\underline{\sigma}_2,\\
&\frac{x_5}{A}+\frac{x_5}{J}\left(\frac{\bar{x}_1}{2}-d\right)\frac{\bar{x}_1}{2}-\frac{M_2}{J}\frac{\bar{x}_1}{2}\leqslant\bar{\sigma}_2,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

przy czym

$$
J=\frac{\bar{x}_2\bar{x}_1^3}{12}-\frac{(\bar{x}_1\bar{x}_2-A)^3}{12(\bar{x}_2-\underline{x}_4)^2}.
$$

Należy zatem znaleźć minimalne pole przekroju poprzecznego belki dwuteowej A i minimalną wielkość siły sprężającej S, które spełniają ograniczenia (4.3).

Wyznaczenie zbioru kompromisów. Zbiorem kompromisów jest odcinek krzywej

$$
x_5=\frac{\bar{\sigma}_1-\dfrac{M_1}{J}\dfrac{\bar{x}_1}{2}}{\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{J}\left(\dfrac{\bar{x}_1}{2}-d\right)\dfrac{\bar{x}_1}{2}},
\tag{4.4}
$$

zawarty między punktami jej przecięcia z krzywymi [13]:

$$
x_5=\frac{\bar{\sigma}_2+\dfrac{M_2}{J}\dfrac{\bar{x}_1}{2}}{\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{J}\left(\dfrac{\bar{x}_1}{2}-d\right)\dfrac{\bar{x}_1}{2}},
$$

oraz

$$
x_5=\frac{\underline{\sigma}_1+\dfrac{M_1}{J}\dfrac{\bar{x}_1}{2}}{\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{J}\left(\dfrac{\bar{x}_1}{2}-d\right)\dfrac{\bar{x}_1}{2}}.
$$

Wybór rozwiązania preferowanego. Rozwiązanie preferowane określimy korzystając z funkcji użyteczności, którą przyjęto w następującej postaci

$$
F=A+kS,
\tag{4.5}
$$

przy czym $k = \frac{c_s}{c_b} \frac{\gamma}{\bar{\sigma}_s}$ jest współczynnikiem wagowym, określającym stosunek wartości stali sprężającej do betonu. Przyjęto tu następujące oznaczenia: c_b oznacza cenę 1 m^3 betonu, c_s — cenę 1 kg stali sprężającej, γ — ciężar objętościowy stali sprężającej, $\bar{\sigma}_s$ — naprężenia dopuszczalne w stali sprężającej.

W zależności od wartości współczynnika k rozwiązanie preferowane znajduje się w jednym z punktów narożnych zbioru kompromisów lub pomiędzy nimi w punkcie styczności zbioru kompromisów z warstwicą funkcji użyteczności $F = A + kS = \text{const}$.

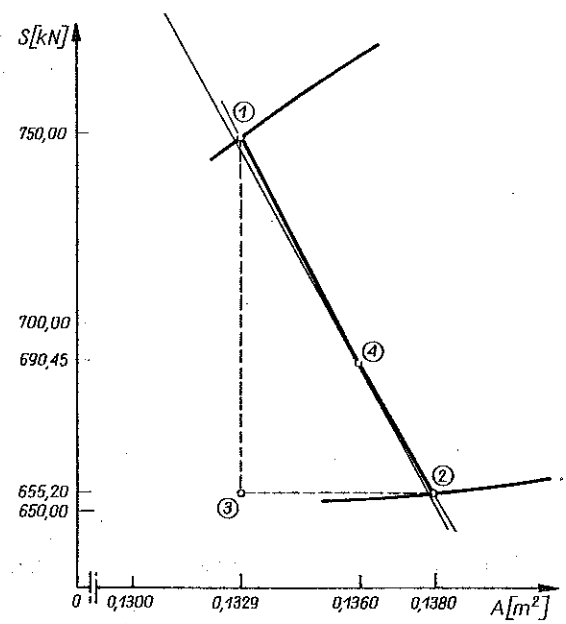
Przykład liczbowy. Przyjęto następujące dane liczbowe: momenty zginające $M_1 = 320$ kNm, $M_2 = 100$ kNm, maksymalną wysokość belki $\bar{x}_1 = 0{,}70$ m, maksymalną szerokość półki $\bar{x}_2 = 0{,}40$ m, minimalne grubości półek $\underline{x}_3 = 0{,}10$ m, minimalną grubość środnika $\underline{x}_4 = 0{,}08$ m, minimalną odległość środka ciężkości kabli sprężających od spodu belki $d = 0{,}07$ m, naprężenia dopuszczalne w betonie $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$ 10000 kN/m^2 i $\underline{\sigma}_1 = \underline{\sigma}_2 = -500$ kN/m^2, $k = 0{,}000054$ m^2/kN.

Rozwiążanie jest następujące (rys. 2)

i) Współrzędne punktów narożnych zbioru kompromisów:

$$\text{punkt 1:} \quad A = 0{,}13286 \text{ m}^2, \quad S = 750{,}00 \text{ kN};$$

$$\text{punkt 2:} \quad A = 0{,}13797 \text{ m}^2, \quad S = 655{,}20 \text{ kN}.$$



Rys. 2. Zbiór kompromisów w przestrzeni celów (A, S)

ii) Rozwiązanie idealne

$$\text{punkt 3:} \quad A^{id} = 0{,}13286 \text{ m}^2, \quad S^{id} = 655{,}20 \text{ kN}.$$

iii) Rozwiązanie preferowane

$$\text{punkt 4:} \quad A^{pr} = 0{,}13600 \text{ m}^2, \quad S^{pr} = 690{,}45 \text{ kN}.$$

Odpowiadają mu następujące wartości zmienne decyzyjnych:

$$x_1^{pr} = 0{,}70 \text{ m}, \quad x_2^{pr} = 0{,}40 \text{ m}, \quad x_3^{pr} = 0{,}125 \text{ m}, \quad x_4^{pr} = 0{,}08 \text{ m},$$
$$x_5^{pr} = 690{,}45 \text{ kN}, \quad x_6^{pr} = 0{,}28 \text{ m}.$$

iv) Wektor wrażliwości rozwiązania preferowanego na zmiany poszczególnych funkcji celu

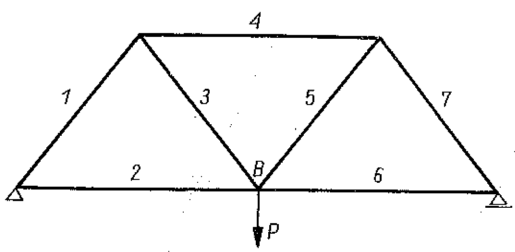
$$\frac{\partial F}{\partial A} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial S} = 0{,}000054.$$

v) Rozległość zbioru kompromisów

$$\Delta A = 0{,}00511 \text{ m}^2, \quad \Delta S = 94{,}80 \text{ kN}.$$

4.2. Zastosowanie funkcji metrycznej

SFORMUŁOWANIE ZADANIA. Zadanie polega na wyznaczeniu takich przekrojów prętów kratownicy izostatycznej pokazanej na rys. 3, aby jej objętość i przemieszczenie punktu B były minimalne. Wektor zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x}^T = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 7$; x_i oznaczają pola przekrojów poprzecznych prętów kratownicy.



Rys. 3. Schemat kratownicy izostatycznej

Zmienne decyzyjne muszą należeć do obszaru rozwiązań dopuszczalnych Ω określonego przez ograniczenia wytrzymałościowe i konstrukcyjne, tzn.

$$\Omega = \{x_i | \underline{\sigma} \leqslant \sigma_i \leqslant \bar{\sigma}, x_i \leqslant \bar{x}_i, \; i = 1, 2, \ldots, 7\},$$

przy czym $\underline{\sigma}_i$ $\bar{\sigma}$ oznaczają odpowiednio naprężenia dopuszczalne na ściskanie i rozciąganie oraz $\sigma_i = N_i/x_i$.

Kryteria optymalizacji kratownicy są następujące:

$$\min_{x_i \in \Omega} V = \sum_{i=1}^{7} x_i l_i,$$

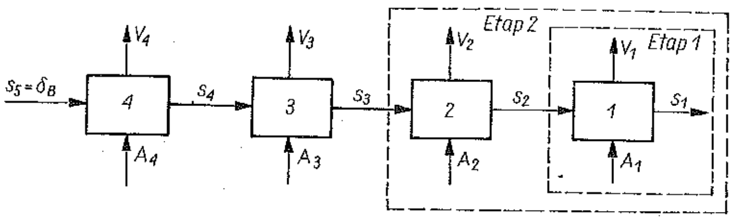
$$\min_{x_i \in \Omega} \delta_B = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{N_i^2 l_i}{2Ex_i}\right).$$

Siły w prętach kratownicy wywołane działaniem obciążenia P są następujące:

$$N_1 = N_7 = -\frac{5}{8} P, \quad N_3 = N_5 = \frac{5}{8} P,$$

$$N_2 = N_6 = \frac{3}{8} P, \quad N_4 = -\frac{3}{4} P.$$

Zagadnienie optymalizacji rozwiązano metodą programowania dynamicznego [1, 2]. Schemat postępowania przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Schemat zasady programowania dynamicznego

Objętość kratownicy można wyrazić w postaci

$$V = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{2l_1x_1}_{V_1} + 2l_2 x_2}_{V_2} + 2l_3 x_3}_{V_3} + l_4 x_4}_{V_4},$$

gdzie V_i, $i = 1, 2, 3, 4$ są sumą objętości kolejnych segmentów kratownicy; ze względu na symetrię występują tylko pola przekrojów $x_1 - x_4$.

Przemieszczenie punktu B można wyrazić w postaci

$$\delta_B = s_5 = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{32}\frac{P}{E}\left(\frac{25}{2}\frac{l_1}{x_1}\right.}_{s_2}+\frac{9}{2}\frac{l_2}{x_2}}_{s_3}+\frac{25}{2}\frac{l_3}{x_3}}_{s_4}\left.+9\frac{l_4}{x_4}\right)}_{s_5},$$

gdzie s_i, $i = 2, 3, 4, 5$ są sumą przemieszczeń punktu B wywołanych odkształceniami kolejnych segmentów kratownicy.

W etapie pierwszym rozpatrzono segment kratownicy (rys. 4), tzn. pręty 1 i 7, poszukując

$$\hat{V}_1(s_2) = \min_{x_1} [2l_1 x_1(s_2)],$$

przy zachowaniu ograniczenia

$$\frac{25}{64}\frac{Pl_1}{Ex_1} = s_2,$$

gdzie s_2 jest nie znanym na razie przemieszczeniem punktu B wywołanym odkształceniem prętów 1 i 7.

W wyniku rozwiązania tego etapu otrzymujemy

$$\hat{x}_1 = \frac{25}{64}\frac{Pl_1}{Es_2} \quad \text{i} \quad \hat{V}_1 = \frac{25}{32}\frac{Pl_1^2}{Es_2}.$$

W drugim etapie rozpatrujemy dwa segmenty kratownicy (rys. 4) i poszukujemy

$$\hat{V}_2(s_3) = \min_{x_2} [2l_1 x_1(s_2) + 2l_2 x_2(s_3)],$$

przy zachowaniu ograniczenia

$$s_3 = s_2 + \frac{9}{64}\frac{Pl_2}{Ex_2}, \tag{4.6}$$

gdzie s_3 jest nieznanym na razie przemieszczeniem punktu B wywołanym odkształceniem prętów 1 i 7 oraz 2 i 6.

Zgodnie z zasadą optymalności BELLMANA [2] mamy jednak

$$2l_1\hat{x}_1(s_2) = \frac{25}{32}\frac{Pl_1^2}{Es_2},$$

czyli

$$\hat{V}_2(s_3) = \min_{x_2}\left[\frac{25}{32}\frac{Pl_1^2}{Es_2}+2l_2\,x_2\right].$$

Z zależności (4.6) można wyznaczyć

$$s_2 = s_3 - \frac{9}{64}\frac{Pl_2}{Ex_2};$$

zatem

$$\hat{V}_2(s_3) = \min_{x_2}\left[\frac{25}{32}\frac{Pl_1^2}{E}\,\frac{1}{s_3-\dfrac{9}{64}\dfrac{Pl_2}{Ex_2}}+2l_2\,x_2\right].$$

Z warunku $\partial\hat{V}_2/\partial x_2 = 0$ otrzymujemy

$$\hat{x}_2 = \frac{3}{64}\frac{P}{E}\frac{5l_1+3l_2}{s_3}, \qquad \hat{V}_2 = \frac{1}{32}\frac{P}{E}\frac{(5l_1+3l_2)^2}{s_3}.$$

Następnie rozpatrujemy trzy segmenty kratownicy i znajdujemy

$$\hat{V}_3(s_4) = \min_{x_3}\left[\hat{V}_2+2l_3\,x_3(s_4)\right]$$

przy zachowaniu ograniczenia

$$s_4 = s_3 + \frac{25}{64}\frac{Pl_3}{Ex_3};$$

s_4 jest przemieszczeniem punktu B wywołanym odkształceniem prętów 1 i 7, 2 i 6 oraz 3 i 5.

Podstawiając, zgodnie z zasadą optymalności,

$$\hat{V}_2 = \frac{1}{32}\frac{P}{E}\frac{(5l_1+3l_2)^2}{s_3},$$

mamy

$$\hat{V}_3(s_4) = \min_{x_3}\left[\frac{1}{32}\frac{P}{E}\,\frac{(5l_1+3l_2)^2}{s_4-\dfrac{25}{64}\dfrac{Pl_3}{Ex_3}}+2l_3\,x_3\right].$$

Z warunku $\partial\hat{V}_3/\partial x_3 = 0$ otrzymujemy

$$\hat{x}_3 = \frac{5}{64}\frac{P}{E}\frac{5l_1+3l_2+5l_3}{s_4},$$

$$\hat{V}_3 = \frac{1}{32}\frac{P}{E}\frac{(5l_1+3l_2+5l_3)^2}{s_4}.$$

W następnym etapie rozpatrujemy całą kratownicę i znajdujemy

$$\hat{V}_4(s_5) = \min_{x_4} [\hat{V}_3 + l_4 x_4(s_5)] =$$

$$= \min_{x_4} \left[\frac{1}{32} \frac{P}{E} \frac{(5l_1+3l_2+5l_3)^2}{s_5 - \frac{9}{32}\frac{Pl_4}{Ex_4}} + l_4 x_4 \right].$$

Z warunku $\partial \hat{V}_4 / \partial x_4 = 0$ mamy

$$\hat{x}_4 = \frac{3}{32} \frac{P}{E} \frac{5l_1+3l_2+5l_3+3l_4}{s_5}.$$

Minimalna objętość całej kratownicy wynosi

$$V = \hat{V}_4 = \frac{1}{32} \frac{P}{E} \frac{(5l_1+3l_2+5l_3+3l_4)^2}{s_5},$$

i zależy od ugięcia w punkcie B, gdyż $s_5 = \delta_B$.

Najmniejszą dopuszczalną objętość kratownicy V można wyznaczyć z warunku nieprzekroczenia naprężeń dopuszczalnych w prętach kratownicy, tzn. przyjmując ograniczenia naprężeniowe w postaci równości. Warunek ten ma postać

$$V \geqslant 2l_1 \frac{5}{8} \frac{P}{\underline{\sigma}} + 2l_2 \frac{3}{8} \frac{P}{\bar{\sigma}} + 2l_3 \frac{5}{8} \frac{P}{\bar{\sigma}} + l_4 \frac{3}{4} \frac{P}{\underline{\sigma}} = \underline{V}.$$

Należy jednak zauważyć, że jest to ważne tylko w przypadku kratownic izostatycznych.

Największą dopuszczalną objętość kratownicy $\bar{V}$ wyznaczymy z warunków konstrukcyjnach, przyjmując $x_i = \bar{x}_i = \bar{x}$

$$V \leqslant (2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)\, \bar{x} = \bar{V}.$$

Odcinek krzywej

$$V = \frac{1}{32} \frac{P}{E} \frac{(5l_1+3l_2+5l_3+3l_4)^2}{\delta_B}, \tag{4.7}$$

w układzie współrzędnych (V, δ_B) zawarty między $\underline{V}$ a $\bar{V}$ jest krzywą kompromisów.

Ponieważ nie ma żadnych preferencji dotyczących funkcji celu V i δ_B przeto rozwiązanie wyznaczono na podstawie funkcji metrycznej [12] wyrażającej najmniejszą odległość zbioru kompromisów od punktu idealnego. Rozpatrzono trzy przypadki funkcji metrycznej.

Przypadek 1. Funkcję metryczną przyjęto w postaci wymiarowej

$$F^{(2)} = \sqrt{(V - V^{id})^2 + \mu^2 (\delta_B - \delta_B^{id})^2}, \qquad \mu = 1 \text{ m}^2, \tag{4.8}$$

Punkt idealny ma współrzędne następujące:

$$V^{\mathrm{id}} = \frac{1}{4} P \left(5 \frac{l_1}{\sigma} + 3 \frac{l_2}{\bar{\sigma}} + 5 \frac{l_3}{\bar{\sigma}} + 3 \frac{l_4}{\sigma} \right),$$

$$\delta_B^{\mathrm{id}} = \frac{1}{32} \frac{P}{E} \frac{(5l_1 + 3l_2 + 5l_3 + 3l_4)^2}{\bar{x}(2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)}.$$

Podstawiając V^{id} i δ_B^{id} do wzoru (4.8) oraz uwzględniając warunek przynależności rozwiązania do zbioru kompromisów (4.7) otrzymujemy

$$F^{(2)} = \sqrt{\left[V - \frac{1}{4} P \left(5 \frac{l_1}{\underline{\sigma}} + 3 \frac{l_2}{\bar{\sigma}} + 5 \frac{l_3}{\bar{\sigma}} + 3 \frac{l_4}{\underline{\sigma}} \right) \right]^2 + \mu^2 \left(\frac{P}{32E} \right)^2 (5l_1 + 3l_2 + 5l_3 + 3l_4)^4 \left[\frac{1}{V} - \frac{1}{\bar{x}(2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)} \right]^2}.$$

Z warunku $\partial F^{(2)} / \partial V = 0$ znajdujemy równanie

$$V^4 - \frac{1}{4} P \left(5 \frac{l_1}{\underline{\sigma}} + 3 \frac{l_2}{\bar{\sigma}} + 5 \frac{l_3}{\bar{\sigma}} + 3 \frac{l_4}{\underline{\sigma}} \right) V^3 + \mu^2 \left(\frac{1}{32} \frac{P}{E} \right)^2 \frac{(5l_1 + 3l_2 + 5l_3 + 3l_4)^4}{\bar{x}(2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)} V - \mu^2 \left(\frac{1}{32} \frac{P}{E} \right)^2 (5l_1 + 3l_2 + 5l_3 + 3l_4)^4 = 0, \tag{4.9}$$

z którego numerycznie wyznaczamy $\underline{V} \leqslant V^{\mathrm{pr}} \leqslant \bar{V}$.

PRZYPADEK 2. Przyjmując funkcję metryczną w postaci bezwymiarowej

$$F^{(2)} = \sqrt{\left(\frac{V - V^{\mathrm{id}}}{\bar{V}} \right)^2 + \left(\frac{\delta_B - \delta_B^{\mathrm{id}}}{\bar{\delta}_B} \right)^2}, \tag{4.10}$$

po wprowadzeniu oznaczeń

$$\vartheta = \frac{V}{\bar{V}}, \qquad \eta = \frac{\delta_B}{\bar{\delta}_B}, \qquad \beta = \frac{\underline{V}}{\bar{V}},$$

otrzymano następujące równanie pozwalające na wyznaczenie ϑ^{pr}.

$$\vartheta^4 - \beta \vartheta^3 + \beta^2 \vartheta - \beta^2 = 0. \tag{4.11}$$

PRZYPADEK 3. Przyjmując funkcję metryczną w postaci bezwymiarowej

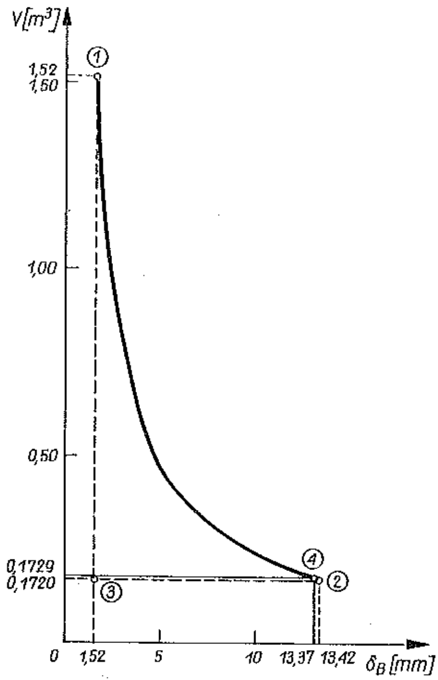
$$F^{(2)} = \sqrt{\left(\frac{V - V^{\mathrm{id}}}{\bar{V}} \right)^2 + \left(\frac{\delta_B - \delta_B^{\mathrm{id}}}{l} \right)^2}, \tag{4.12}$$

po wprowadzeniu oznaczeń

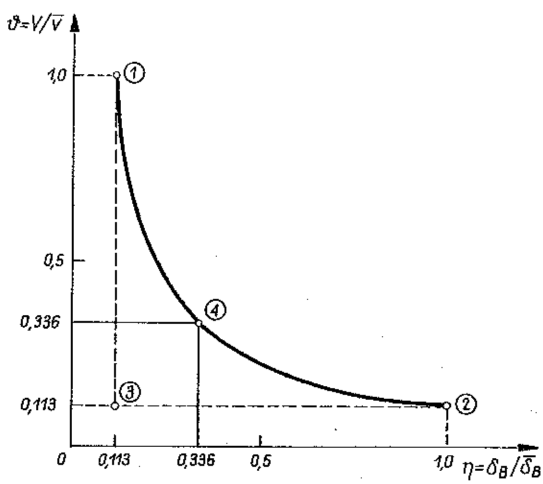
$$\vartheta = \frac{V}{\bar{V}}, \qquad \xi = \frac{\delta_B}{l}, \qquad \alpha = \frac{1}{32} \frac{P}{E} (5l_1 + 3l_2 + 5l_3 + 3l_4)^2,$$

Tablica 1. Zestawienie rozwiązań zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej kratownicy

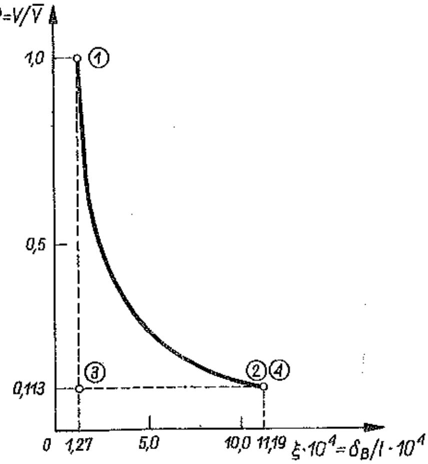
	Przypadek 1	Przypadek 2	Przypadek 3
Równanie zbioru kompromisów	$V\,[\mathrm{m}^3] = \dfrac{0{,}00231125}{\delta_B\,[\mathrm{m}]}$	$v = \dfrac{0{,}113137}{\eta}$	$v = \dfrac{0{,}000126716}{\xi}$
Punkty końcowe zbioru kompromisów			
punkt 1	$V = 1{,}52\ \mathrm{m}^3$ $\delta_B = 0{,}00152\ \mathrm{m}$	$\vartheta = 1$ $(V = 1{,}52\ \mathrm{m}^3)$ $\eta = 0{,}113$ $(\delta_B = 0{,}00152\ \mathrm{m})$	$\vartheta = 1$ $(V = 1{,}52\ \mathrm{m}^3)$ $\xi = 0{,}000127$ $(\delta_B = 0{,}00152\ \mathrm{m})$
punkt 2	$V = 0{,}172\ \mathrm{m}^3$ $\delta_B = 0{,}01343\ \mathrm{m}$	$\vartheta = 0{,}113$ $(V = 0{,}172\ \mathrm{m}^3)$ $\eta = 1$ $(\delta_B = 0{,}01343\ \mathrm{m})$	$\vartheta = 0{,}1132$ $(V = 0{,}172\ \mathrm{m}^3)$ $\xi = 0{,}001119$ $(\delta_B = 0{,}01343\ \mathrm{m})$
Rozwiązanie idealne (punkt 3)	$V^{\mathrm{id}} = 0{,}172\ \mathrm{m}^3$ $\delta_B^{\mathrm{id}} = 0{,}00152\ \mathrm{m}$	$\vartheta^{\mathrm{id}} = 0{,}113$ $(V^{\mathrm{id}} = 0{,}172\ \mathrm{m}^3)$ $\eta^{\mathrm{id}} = 0{,}113$ $(\delta_B^{\mathrm{id}} = 0{,}00152\ \mathrm{m})$	$\vartheta^{\mathrm{id}} = 0{,}113$ $(V^{\mathrm{id}} = 0{,}172\ \mathrm{m}^3)$ $\xi^{\mathrm{id}} = 0{,}0001267$ $(\delta_B^{\mathrm{id}} = 0{,}00152\ \mathrm{m})$
Rozwiązanie preferowane (punkt 4)	$V^{\mathrm{pr}} = 0{,}1729\ \mathrm{m}^3$ $\delta_B^{\mathrm{pr}} = 0{,}01337\ \mathrm{m}$	$\vartheta^{\mathrm{pr}} = 0{,}336$ $(V^{\mathrm{pr}} = 0{,}5107\ \mathrm{m}^3)$ $\eta^{\mathrm{pr}} = 0{,}336$ $(\delta_B^{\mathrm{pr}} = 0{,}00453\ \mathrm{m})$	$\vartheta^{\mathrm{pr}} = 0{,}1132$ $(V^{\mathrm{pr}} = 0{,}172\ \mathrm{m}^3)$ $\xi^{\mathrm{pr}} = 0{,}001119$ $(\delta_B^{\mathrm{pr}} = 0{,}01343\ \mathrm{m})$
zmienne decyzyjne $x_1\,[\mathrm{m}^2]$	0.005034	0,014846	0,0050
$x_2\,[\mathrm{m}^2]$	0,003017	0,008907	0,0030
$x_3\,[\mathrm{m}^2]$	0,005026	0,014846	0,0050
$x_4\,[\mathrm{m}^2]$	0,006030	0,017814	0,0060
Wektor wrażliwości	$\dfrac{\partial F}{\partial V} = 0{,}07573$ $\dfrac{\partial F}{\partial \delta_B} = 0{,}99713$	$\dfrac{\partial F}{\partial \vartheta} = 0{,}7071$ $\dfrac{\partial F}{\partial \eta} = 0{,}7071$	$\dfrac{\partial F}{\partial \vartheta} = 0$ $\dfrac{\partial F}{\partial \xi} = 1$
Rozległość zbioru kompromisów	$\Delta V = 1{,}348\ \mathrm{m}^3$ $\Delta\delta_B = 0{,}01191\ \mathrm{m}$	$\Delta\vartheta = 0{,}887$ $(\Delta V = 1{,}348\ \mathrm{m}^3)$ $\Delta\eta = 0{,}887$ $(\Delta\delta_B = 0{,}01191\ \mathrm{m})$	$\Delta\vartheta = 0{,}887$ $(\Delta V = 1{,}348\ \mathrm{m}^3)$ $\Delta\xi = 0{,}0009926$ $(\Delta\delta_B = 0{,}01191\ \mathrm{m})$



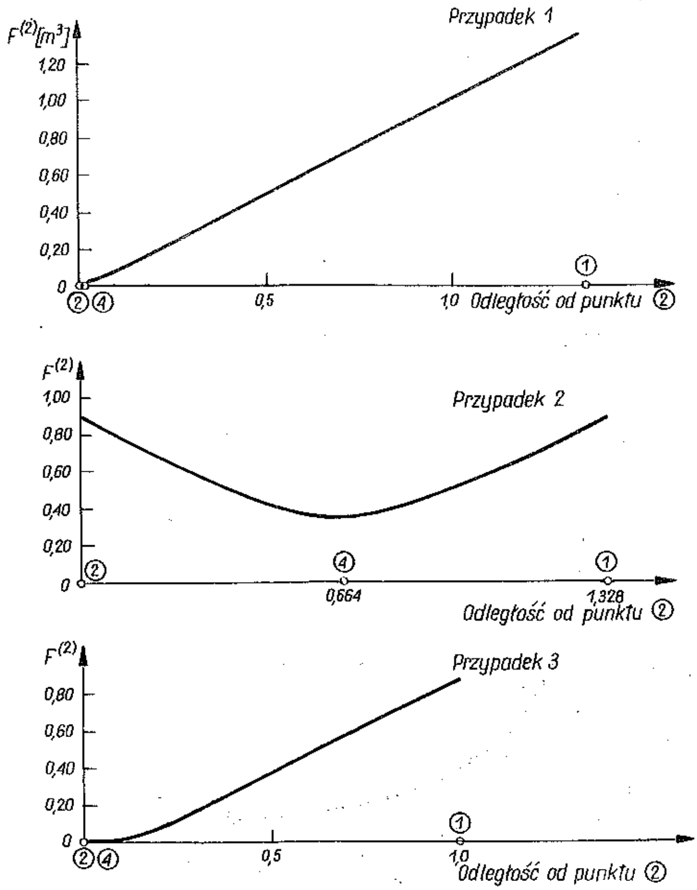
Rys. 5. Zbiór kompromisów w przestrzeni celów (δ_B, V)



Rys. 6. Zbiór kompromisów w przestrzeni celów (η, ϑ)



Rys. 7. Zbiór kompromisów w przestrzeni celów (ξ, ϑ)



Rys. 8. Wykresy funkcji metrycznych $F^{(2)}$ wzdłuż zbiorów kompromisów

otrzymano następujące równanie pozwalające na wyznaczenie ϑ^{pr}:

$$\bar{V}^2\vartheta^4 - \bar{V}V\vartheta^3 + \frac{\alpha^2}{l^2}\vartheta - \frac{\alpha^2}{l^2} = 0. \tag{4.13}$$

PRZYKŁAD LICZBOWY. Przyjęto następujące dane liczbowe: siłę $P = 2000$ kN, moduł Younga $E = 200$ kN/mm^2, naprężenie dopuszczalne $\bar{\sigma} = \underline{\sigma} = 250$ MPa, długości prętów: $l_1 = l_3 = l_5 = l_7 = 5{,}00$ m, $l_2 = l_4 = l_6 = 6{,}00$ m, maksymalne pole przekroju pręta $\bar{x} = 40000$ mm^2.

Trzy przypadki rozwiązania zadania optymalizacji kratownic przedstawiono w tablicy 1 i na rys. 5–7. Ilustrują one zależność rozwiązania preferowanego od postaci funkcji metrycznej. Na rys. 8 podano wykresy zmienności funkcji metrycznej $F^{(2)}$ wzdłuż zbioru kompromisów.

Zbiór kompromisów, jego punkty końcowe i rozległość oraz rozwiązanie idealne nie zależą od postaci funkcji metrycznej. Natomiast rozwiązanie preferowane i wektor wrażliwości zależą od niej w sposób istotny.

Ograniczenie zbioru kompromisów wynikają z jednej strony z przyjęcia wartości naprężeń dopuszczalnych w prętach kratownicy (punkt końcowy 2), a z drugiej strony z przyjęcia maksymalnych pól przekrojów tych prętów (punkt końcowy 1). W przypadku uwzględnienia ograniczenia przemieszczeń punkt końcowy 2 zbioru kompromisów mógłby ulec przesunięciu, gdyby wartość dozwolona przemieszczenia $\bar{\delta}_B$ była mniejsza niż $\bar{\delta}_B$ wynikająca z ograniczenia naprężeń. Konsekwencją tego byłaby zmiana punktu idealnego i pozostałych elementów rozwiązania.

5. WNIOSKI

Na podstawie analizy przeprowadzonej w pracy można sformułować następujące stwierdzenia.

i) Optymalizacja wielokryterialna pozwala na kompromisowe spełnienie kilku kryteriów konfliktowych.

ii) Zaletą optymalizacji wielokryterialnej jest uzyskanie znacznie bogatszej informacji o rozwiązaniu zagadnienia niż na podstawie optymalizacji jednokryterialnej.

iii) Ostateczny wybór rozwiązania dokonywany jest na podstawie preferencji odnośnie rozpatrywanych kryteriów; w przypadku braku preferencji właściwym wydaje się być kryterium funkcji metrycznej, które minimalizuje odległość między rozwiązaniem idealnym (najczęściej niedopuszczalnym), a zbiorem rozwiązań kompromisowych.

iv) Zbiór kompromisów jest pojęciem obiektywnym, natomiast rozwiązanie preferowane zależy od postaci kryterium globalnego. W przypadku kryterium funkcji metrycznej zależy ono również od sposobu ubezwymiarowienia poszczególnych funkcji celu.

DODATEK. NIEKTÓRE SPOSOBY WYBORU ROZWIĄZAŃ PREFEROWANYCH

Metoda funkcji metrycznej

Metodą funkcji metrycznej możemy znaleźć minimum wektorowej funkcji celu

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

gdzie $\Omega = \{\mathbf{x}\in R^n \,|\, \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqslant 0\}$ jest obszarem rozwiązań dopuszczalnych.

Rozwiązując to zagadnienie znajdujemy najpierw rozwiązanie idealne spełniające warunek minimum każdej funkcji celu $f_j(\mathbf{x})$ rozpatrywanej niezależnie od pozostałych, tzn.

$$f_j^{\text{id}} = \min_{\mathbf{x}\in\Omega} f_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Następnie formułujemy funkcję metryczną [12] wyrażającą „odległość” pomiędzy zbiorem kompromisów i punktem idealnym i wyznaczamy jej minimum. Funkcja metryczna ma postać:

$$F^{(p)} = \Big\{\sum_{j=1}^{k} |f_j(\mathbf{x}) - f_j^{\text{id}}|^p\Big\}^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty. \tag{1}$$

Rozwiązanie zależy w sposób istotny od parametru p. Funkcja metryczna przybiera następującą postać w przypadku:

$$p = 1: \qquad F^{(1)} = \sum_{j=1}^{k} |f_j(\mathbf{x}) - f_j^{\text{id}}|,$$

$$p = 2: \qquad F^{(2)} = \Big\{\sum_{j=1}^{k} [f_j(\mathbf{x}) - f_j^{\text{id}}]^2\Big\}^{1/2},$$

$$p \to \infty: \qquad F^{(\infty)} = \max_{j=1,2,\ldots,k} |f_j(\mathbf{x}) - f_j^{\text{id}}|.$$

Jeżeli poszczególne funkcje $f_j(\mathbf{x})$ mają różne wymiary mnożymy je przez współczynniki μ_j równe jedności, a mające taki wymiar, aby funkcje $\mu_j f_j(\mathbf{x})$ były bezwymiarowe. Rozwiązanie preferowane zależne jest jednak od jednostek funkcji $f_j(\mathbf{x})$.

Funkcję metryczną można również sprowadzić do postaci bezwymiarowej w następujący sposób [12]:

$$F^{(p)} = \left\{\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{f_j(\mathbf{x}) - f_j^{\text{id}}}{\max f_j(\mathbf{x})}\right)^p\right\}^{1/p}. \tag{2}$$

Należy jednak zwrócić uwagę na to, że w przypadku kryterium (1) i $p = 2$ odległość między punktami określonymi w przestrzeni celu przez wektory f_j^{pr} i f_j^{id} jest minimalna, czyli f_j^{pr} oznacza najbliższy rozwiązania idealnego punkt należący do zbioru kompromisów. W przypadku kryterium (2) i $p=2$ rozwiązanie f_j^{pr} nie jest punktem najbliższym rozwiązania idealnego.

Rozwiązanie preferowane (2) zależy od sposobu znormalizowania funkcji celu $f_j(\mathbf{x})$. W pracy KOSKIEGO [12] zaproponowano wprowadzenie bezwymiarowego wektora funkcji celu

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \{\tilde{f}_1(\mathbf{x}), \tilde{f}_2(\mathbf{x}), \ldots, \tilde{f}_k(\mathbf{x})\},$$

którego składowe mają postać:

$$\tilde{f}_j(\mathbf{x}) = \frac{f_j(\mathbf{x}) - \min f_j(\mathbf{x})}{\max f_j(\mathbf{x}) - \min f_j(\mathbf{x})}.$$

W ten sposób wartości każdej znormalizowanej funkcji celu zmieniają się w przedziale (0, 1). Natomiast funkcję metryczną — minimum „odległości" pomiędzy zbiorem kompromisów i rozwiązaniem idealnym — można napisać w postaci

$$\min_{\mathbf{f}\in f(\Omega)} F^{(p)}(\tilde{f}(\mathbf{x}), 0).$$

Metoda funkcji użyteczności

Przy zastosowaniu tej metody zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej formułowane jest w sposób następujący: znaleźć minimum funkcji

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega} U(f_1, f_2, \ldots, f_k),$$

gdzie $\Omega = \{\mathbf{x}\in R^n | \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqslant 0\}$ jest obszarem rozwiązań dopuszczalnych.

Funkcja $U(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ nazywana jest funkcją użyteczności. Musi być ona określona na podstawie analizy celów, którym ma służyć rozwiązanie zagadnienia optymalizacji. Określenie tej funkcji może być w wielu przypadkach trudne. Zagadnieniem tym zajmowali się między innymi FARGUHAR [5], FISHBURN [6] i HUBER [7].

Rozwiązaniem zagadnienia jest punkt styczności zbioru kompromisów i krzywych użyteczności (warstwic funkcji U).

Funkcja użyteczności może mieć różną postać. Najczęściej cechuje ją addytywność i rozdzielność względem funkcji celów, czyli

$$U(f_1, f_2, \ldots, f_k) = U_1(f_1) + U_2(f_2) + \ldots + U_k(f_k).$$

W szczególnym przypadku mogą być określone współczynniki wskazujące hierarchię ważności poszczególnych funkcji celu, wówczas

$$U(f_1, f_2, \ldots, f_k) = \sum_{j=1}^{k} w_j f_j.$$

Mogą również występować inne postaci funkcji użyteczności, np.

$$U(f_1, f_2, \ldots, f_k) = \prod_{j=1}^{k} U_j(f_j).$$

Zaletą tej metody jest jej prostota i sprowadzenie zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej do optymalizacji z jedną funkcją celu. Podstawową trudność stanowi natomiast określenie funkcji użyteczności.

Metoda ograniczonych funkcji celu

Metoda ta może być zastosowana, gdy możliwe jest określenie maksymalnych wartości, jakie muszą być osiągnięte przez poszczególne funkcje celu. Gdy jest to możliwe, zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej może być sformułowane w sposób następujący: znaleźć minimum r-tej funkcji celu

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} f_r(\mathbf{x}),$$

gdzie $\Omega = \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqslant 0, l_j \leqslant f_j(\mathbf{x}) \leqslant u_j, j = 1, 2, \ldots, k, j \neq r\}$.

Zasadniczą trudnością przy stosowaniu tej metody jest określenie dolnych i górnych ograniczeń: l_j i u_j, które zapewniłyby zarówno zadawalajace spełnienie poszczególnych celów jak i istnienie nie pustego obszaru celu. Ponadto konieczna jest decyzja, którą z funkcji celu wybrać przy rozwiązywaniu zadania jako kryterium.

Metoda leksykograficzna

Metoda ta wymaga uszeregowania składowych wektora funkcji celu według ważności. Rozwiązaniem preferowanym w tej metodzie jest rozwiązanie, które minimalizuje funkcje celu poczynając od najważniejszej do coraz to mniej ważnych.

Jeżeli wskaźniki od 1 do k wskazują hierarchię ważności, to zagadnienie optymalizacji można sformułować następująco: znaleźć

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} f_1(\mathbf{x}),$$

gdzie $\Omega = \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqslant 0\}$. Rozwiązaniem tego zagadnienia jest $\overset{*}{\mathbf{x}}$ i $\overset{*}{f}_1 = f_1(\overset{*}{\mathbf{x}})$.

Jeżeli rozwiązanie to jest jednoznaczne, to $\overset{*}{\mathbf{x}}$ jest uważane za rozwiązanie preferowane zagadnienia pierwotnego. W przeciwnym razie może być rozwiązane zagadnienie drugie: znaleźć

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} f_2(\mathbf{x}),$$

przy spełnieniu dodatkowego ograniczenia

$$f_1(\mathbf{x}) = f_1^*.$$

Jeżeli rozwiązanie to jest jednoznaczne, to jest ono rozwiązaniem preferowanym zagadnienia pierwotnego. W przeciwnym razie postępujemy podobnie jak wyżej i znajdujemy

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega} f_j(x),$$

przy spełnieniu dodatkowych ograniczeń

$$f_l(\mathbf{x}) = f_l^*, \qquad l = 1, 2, \ldots, j-1.$$

Procedura kończy się z chwilą otrzymania rozwiązania jednoznacznego. Funkcje celu o niższej ważności są pomijane.

Metoda programowania celów

Przy zastosowaniu tej metody niezbędne jest określenie wartości, jakie powinny osiągać poszczególne funkcje celu. Rozwiązaniem preferowanym jest to rozwiązanie, które minimalizuje odchyłki od przyjętych wartości funkcji celu, czyli poszukujemy

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega} \Big[\sum_{j=1}^{k} (d_j^- + d_j^+)^p\Big]^{1/p}, \qquad p \geq 1,$$

przy czym $\Omega = \{\mathbf{x}\in R^n | \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0,\ f_j(\mathbf{x}) + d_j^- - d_j^+ = b_j,\ j = 1, 2, \ldots, k,\ d_j^-,\ d_j^+ \geq 0,\ d_j^-\, d_j^+ = 0\}$ gdzie b_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ są ustalonymi pożądanymi wartościami funkcji celów, a d_j^- i d_j^+ są odchyłkami ujemnymi i dodatnimi od tych wartości.

Literatura cytowana w tekście

1. *Criteria and methods of structural optimization*, A. M. Brandt [ed.], PWN and M. Nijhoff Publishers, Warsaw — The Haque 1984.
2. R. E. Bellman, *Dynamic programming*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1957.
3. L. M. Boychuk, V. O. Ovchinnikov, *Principal methods for solution of multicriterial optimization problems (survey)*, Soviet Automatic Control, 6, 1–4, 1973.
4. J. L. Cohon, *Multiobjective programming and planning*, Academic Press, Academic Press, New York 1978.
5. P. H. Farquhar, *A survey of multiattribute utility theory and applications*, in: M. K. Starr, M. Zeleny, Multiple Criteria Decison Making, North Holland, New York 59–90, 1977.
6. P. C. Fishburn, *Lexicographic orders, utilities and decision rules. A survey*, Menagement Science, **20**, 11, 1442–1471, 1975.

7. G. P. HUBER, *Multi-attribute utility models, A review of field and field-like studies*, Menagement Science, **20**, 11, 1393–1402, 1974.
8. C. L. HWANG, A. S. M. MASUD, *Multiple objective decision making methods and applications a state-of art-survey*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin, 164, 1979.
9. S. JENDO, W. MARKS, *Foundations of multicriteria structural optimisation*, in: J. GERO, [ed.], Optimization in Computer-Aided Design, North-Holland, Amsterdam 1984.
10. S. JENDO, W. MARKS, *O wielokryterialnej optymalizacji konstrukcji*, Arch. Inż. Lądow., **30**, 13–21, 1984.
11. S. JENDO, W. MARKS, *Zastosowanie optymizacji wielokryterialnej w teorii konstrukcji*, Arch. Inż. Lądow., **30**, 2/3, 353–370 1984.
12. J. KOSKI, *Truss optimization with vector criterion*, Tampere University of Technology, Tampere, 6, 1979.
13. W. MARKS, Optymalizacja elementów zginających wstępnie naprężonych, Prace IPPT, 52, 1978.
14. A. OSYCZKA, *Multicriterion optimization in engineering with Fortran programs*, Ellis Horwood Lim. Publishers, Chichester 1984.
15. H. J. SATTLER, *Substitution problems for vector optimization and applications in structural mechanics* [in German], VDI-Verlag, GmbH, Dusseldorf, Ser. 1, **88**, 1982.

Р е з ю м е

ЗАДАЧА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ИНЖЕНЕРСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе обсуждены цели и задачи оптимизации конструкций, представлены частичные и глобальные критерия оптимизации, а также сформулированы задачи одно- и многокритериальной оптимизации. Обращено внимание на существование двух групп задач многокритериальной оптимизации, таких, которые могут быть сведены к одной или нескольким задачам однокритериальной (скалярной) оптимизации и таких, которые не могут быть сведены к скалярной оптимизации. Предложена система величин, которую следут считать решением многокритериальной задачи оптимизации конструкций в обоих случаях. Обсужден вопрос объективности решений многокритериальной оптимизации. Рассуждены иллюстрированы примерами оптимизации сопряженной балки и фермы. В приложении приведены избранные методы нахождения оптимизированных решений.

S u m m a r y

PROBLEMS OF MULTI-CRITERION OPTIMIZATION OF ENGINEERING STRUCTURES

The aims of structural optimization are discussed, the optimization criteria are presented, single and multi-criterion optimization problems are formulated. The optimization problems may be divided into two groups: some of them may be reduced to a single or several single criterion (scalar) optimization, and anothers cannot be reduced to scalar optimization.

The set of magnitudes is established which should be considered as a solution of the multi-criterion optimization problem in both the cases mentioned above. Problem of objectivity of the solutions is discussed. The theory is illustrated by two examples concerning a prestressed beam and a truss. Selected methods of determination of preferable solutions are given in the Appendix.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 sierpnia 1985 r.
