ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 32, 1, 51—55, 1984
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

FUNKCJE NAPRĘŻEŃ W SZESCIOPARAMETROWEJ TEORII POWŁOK

ZENON RYCHTER (BIAŁYSTOK)

W ramacb teorii liniowej rozważono równania równowagi powłok posiadających sześć lokalnych stopni swobody [3-8]. Przedstawiono parametryczne rozwiązanie ogólne tych równań, wyrażone za pomocą sześciu funkcji naprężeń.

1. Wstęp

Rozwiązanie ogólne liniowych, jednorodnych równań równowagi w teorii powłok można przedstawić w postaci parametrycznej, wyrażając siły wewnętrzne przez funkcje naprężeń. Funkcje takie zostały znalezione [1, 2] w teorii trójparametrowej (opartej na hipotezach Kirchhoffa–Love'a) oraz teorii pięcioparametrowej (znanej jako teoria Reissnera lub Timoszenki), w których każdy punkt środkowej powierzchni powłoki ma odpowiednio trzy i pięć lokalnych stopni swobody, równania zaś rozwiązujące są ósmego i dziesiątego rzędu. Struktura równań równowagi jest w obu teoriach identyczna, a więc siły wewnętrzne wyrażają się w nich w ten sam sposób przez cztery dowolne funkcje naprężeń. W teorii sześcioparametrowej, o równaniach dwunastego rzędu, powstającej przy założeniu liniowego rozkładu wektora przemieszczenia na grubości powłoki [3–8] funkcje naprężeń nie zostały dotychczas podane; jest to przedmiotem niniejszej pracy. Rozważamy dwa warianty sił wewnętrznych, niesymetryczne i asymetryzowane w sposób zapewniający spełnienie algebraicznego równania równowagi. Rozwiązanie ogólne jednorodnych równań równowagi teorii sześcioparametrowej wyrażamy za pomocą sześciu dowolnych funkcji naprężeń.

2. Notacja. Parametry geometryczne powłoki

W trójwymiarowym obszarze powłoki wprowadzamy układ współrzędnych normalnych $\{x^\alpha, z\}$, w którym linie współrzędnych $x^\alpha = \{x^1, x^2\}$ tworzą krzywoliniową siatkę na środkowej powierzchni powłoki τ, określonej równaniem $z=0$, a linie współrzędnej z są proste i prostopadłe do powierzchni τ. Indeksy przebiegające zbiór wartości $\{1, 2\}$ tworzymy z liter alfabetu greckiego. Dla pól skalarnych, wektorowych i tensorowych zależnych od $\{x^\alpha, z\}$ podajemy *explicite* tylko argument z. Pola pojawiające się bez argumentu należy traktować jako zależne od x^α.

Wielkości geometryczne powłoki można określić za pomocą wektora wodzącego $\mathbf{r}$ powierzchni środkowej τ, który generuje związki [1, 6, 7 i 9]

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} \equiv d\mathbf{r}/dx^\alpha, \quad \mathbf{g}^\beta \cdot \mathbf{g}_\alpha = \delta^\beta_\alpha, \quad \mathbf{g}_3 = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,\mathbf{g}^\alpha \times \mathbf{g}^\beta, \tag{2.1}$$

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta, \quad b_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{g}_3, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{g}\, e_{\alpha\beta}, \tag{2.2}$$

$$g = \det(g_{\alpha\beta}), \quad \varepsilon_{11} = e_{22} = 0, \quad e_{12} = -e_{21} = 1, \tag{2.3}$$

określające wektory bazy lokalnej $\mathbf{g}_\alpha$ styczne do τ, wektory bazy dualnej $\mathbf{g}^\beta$, deltę Kroneckera δ^β_α, jednostkowy wektor $\mathbf{g}_3$ normalny do $\mathbf{g}_\alpha$, składowe $g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ pierwszego i drugiego tensora metrycznego oraz tensora permutacyjnego, gdzie przecinek $(\ )_{,\alpha}$ oznacza pochodną cząstkową, kropka $(\cdot)$ iloczyn skalarny a krzyżyk $(\times)$ iloczyn wektorowy. Wymienione wielkości czynią zadość m.in. następującym równaniom:

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}_\alpha \times \mathbf{g}_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta}\,\mathbf{g}_3, \quad \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\,\mathbf{g}^\beta, \quad \mathbf{g}_{\alpha|\beta} = b_{\alpha\beta}\,\mathbf{g}_3, \\ &\mathbf{g}_{3|\beta} = -b^\alpha_\beta\,\mathbf{g}_\alpha, \quad \varepsilon^{\alpha\beta}\,\mathbf{g}_{\alpha|\beta} = 0, \quad \varepsilon^{\alpha\beta}\,\varphi|_{\alpha\beta} = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

pożytecznym przy przechodzeniu od zapisu wektorowo-tensorowego do notacji indeksowej, przy czym przez $(\ )|_\alpha$ oznaczamy powierzchniową pochodną kowariantną w metryce $g_{\alpha\beta}$, a φ jest dowolnym polem skalarnym na powierzchni τ. Wzór na całkowanie przez części będzie nam potrzebny w następującej postaci:

$$\int_\tau N^{\beta\alpha}\, w_{\alpha|\beta}\, da = -\int_\tau N^{\beta\alpha}|_\beta\, w_\alpha\, da + \int_{\partial\tau} N^{\beta\alpha}\, w_\alpha\, n_\beta\, ds, \tag{2.5}$$

gdzie pola $N^{\beta\alpha}$ i w_α są dowolne, a n_β oznacza jednostkowy wektor zewnętrznie normalny do krawędzi $\partial\tau$ powierzchni τ.

3. Podstawowe równania teorii sześcioparametrowej

Kluczowym założeniem prowadzącym do równań rozważanej teorii powłok jest [3–8] przyjęcie liniowego rozkładu wektora przemieszczenia na grubości powłoki:

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{w} + z\boldsymbol{\beta} = (w^\alpha + z\beta^\alpha)\,\mathbf{g}_\alpha + (w^3 + z\beta^3)\,\mathbf{g}_3. \tag{3.1}$$

W ten sposób każdemu punktowi środkowej powierzchni powłoki zostaje przypisanych sześć lokalnych stopni swobody w^α, w^3, β^α, β^3, co uzasadnia określenie teorii jako sześcioparametrowej. Dodajmy, że poza przyjęciem powyższego rozkładu przemieszczeń nie będziemy dalej czynić żadnych uproszczeń.

Ze środkową powierzchnią powłoki zwiążemy następujące miary deformacji:

$$\begin{aligned} &\gamma_{\alpha\beta} = w_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta}\, w_3, \quad \gamma_{3\alpha} = \beta_\alpha + w_{3,\alpha} + b^\nu_\alpha\, w_\nu, \quad \gamma_{33} = \beta_3, \\ &\varkappa_{\alpha\beta} = \beta_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta}\,\beta_3, \quad \varkappa_{3\alpha} = \beta_{3,\alpha}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Związki (3.2) wynikają z liniowych równań łączących deformacje z przemieszczeniami trójwymiarowego kontinuum (por. np. [9]), w których przemieszczenia zastąpiono rozkładem (3.1). Tensory odkształceń błonowych $\gamma_{\alpha\beta}$ i zmiany krzywizny $\varkappa_{\alpha\beta}$ są niesymetryczne. Dla $\beta_3 = 0$ związki (3.2) upraszczają się do znanych związków teorii pięcioparametrowej [9].

Siły wewnętrzne definiujemy na drodze energetycznej, jako współczynniki przy deformacjach w poniższym równaniu pracy wirtualnej:

$$\int_{\tau} (N^{\beta\alpha} \gamma_{\alpha\beta} + N^{3\alpha} \gamma_{3\alpha} + N^{33} \gamma_{33} + M^{\beta\alpha} \varkappa_{\alpha\beta} + M^{3\alpha} \varkappa_{3\alpha})\, da = 0, \tag{3.3}$$

odnoszącym się do powłoki nieobciążonej. Można pokazać, [9], że wielkości $N^{\beta\alpha}$, $N^{3\alpha}$, $M^{\beta\alpha}$ są wypadkowymi i momentami naprężeń w przekrojach poprzecznych powłoki. Siły N^{33}, $M^{3\alpha}$ reprezentują samozrównoważone układy naprężeń, pomijane w teorii trój- i pięcioparametrowej. Podstawiając do równania (3.3) wyrażenia (3.2), całkując przez części zgodnie z (2.5), odrzucając całki po krawędzi środkowej powierzchni powłoki $\partial\tau$ i przyrównując do zera wyrażenia podcałkowe stojące przy przemieszczeniach w^α, w^3, β^α, β^3, znajdujemy jednorodne równania równowagi:

$$\begin{gathered} N^{\beta\alpha}|_\beta - b^\alpha_\nu N^{3\nu} = 0, \qquad N^{\beta\alpha}|_\alpha + b_{\alpha\beta} N^{\beta\alpha} = 0, \qquad M^{\beta\alpha}|_\beta - N^{3\alpha} = 0, \\ M^{3\alpha}|_\alpha + b_{\alpha\beta} M^{\beta\alpha} - N^{33} = 0, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} (N^{\beta\alpha} + b^\alpha_\nu M^{\nu\beta}) = 0. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Specyficzne dla teorii sześcioparametrowej jest tylko równanie $(3.4)_4$. Pozostałe równania są znane w teorii trój- i pięcioparametrowej. Algebraiczne równanie równowagi $(3.4)_5$ nie wynika z zasady prac wirtualnych, lecz jest konsekwencją symetrii tensora naprężenia [9]. Tworząc ze składowych sił wewnętrznych i tensora krzywizny następujące wektory

$$\mathbf{N}^\alpha = N^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\beta + N^{3\alpha} \mathbf{g}_3, \qquad \mathbf{M}^\alpha = \varepsilon_{\lambda\eta} M^{\alpha\lambda} \mathbf{g}^\eta, \qquad \mathbf{b}_\alpha = \varepsilon^{\nu\lambda} b_{\nu\alpha} \mathbf{g}_\lambda \tag{3.5}$$

można za pomocą związków (2.4) przekształcić równania równowagi (3.4) do zwartej postaci wektorowo-tensorowej:

$$\mathbf{N}^\alpha|_\alpha = 0, \qquad \mathbf{g}_\alpha \times \mathbf{N}^\alpha + \mathbf{M}^\alpha|_\alpha = 0, \qquad M^{3\alpha}|_\alpha + \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{M}^\alpha - N^{33} = 0. \tag{3.6}$$

4. Funkcje naprężeń

Prosta struktura równań równowagi (3.6) zezwala na bezpośrednie odgadnięcie ich rozwiązania ogólnego w następującej postaci parametrycznej:

$$\begin{gathered} \mathbf{N}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \boldsymbol{\varphi}|_\beta, \qquad \mathbf{M}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} (\boldsymbol{\theta}|_\beta + \mathbf{g}_\beta \times \boldsymbol{\varphi}), \\ M^{3\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta} \psi|_\beta + \mu|^\alpha, \qquad N^{33} - \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{M}^\alpha = \mu|^\alpha_\alpha, \end{gathered} \tag{4.1}$$

przy czym podstawiając (4.1) do (3.6) należy pamiętać o związkach (2.4). Prawe strony związków (4.1) zawierają dwie skalarne ψ, μ i dwie wektorowe funkcje naprężeń o składowych

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi^\alpha \mathbf{g}_\alpha + \varphi^3 \mathbf{g}_3, \qquad \boldsymbol{\theta} = \theta^\alpha \mathbf{g}_\alpha + \theta^3 \mathbf{g}_3. \tag{4.2}$$

Podstawiając do (4.1) wyrażenia (3.5) i (4.2) oraz wykorzystując (2.4) otrzymujemy składowe związków (4.1):

$$\begin{gathered} N^{\beta\alpha} = \varepsilon^{\beta\gamma} (\varphi^\alpha|_\gamma - b^\alpha_\gamma \varphi^3), \qquad N^{3\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta} (\varphi^3|_\beta + b_{\gamma\beta} \varphi^\gamma), \\ M^{\beta\alpha} = \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\eta} (\theta_{\gamma|\eta} - b_{\gamma\eta} \theta^3 + \varepsilon_{\gamma\eta} \varphi^3), \qquad M^{3\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta} \psi|_\beta + \mu|^\alpha, \\ N^{33} = \mu|^\eta_\eta + b^\lambda_\lambda \theta^\eta|_\eta - b^{\alpha\beta} \theta_{\alpha|\beta} + (b^\alpha_\beta b^\beta_\alpha - b^\lambda_\lambda b^\eta_\eta) \theta^3. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Wzory te przedstawiają parametryczne rozwiązanie ogólne równań równowagi (3.4). W rozwiązaniu (4.3) występuje osiem funkcji naprężeń φ^α, φ^3, θ^α, θ^3, ψ i μ, jednak nie wszystkie funkcje mogą być przyjęte dowolnie. Mianowicie ze wzoru $(3.5)_2$ i warunku $\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}^3=0$ wynika, że $\mathbf{M}^\alpha \cdot \mathbf{g}_3=0$. Podstawiając tutaj wyrażenie $(4.1)_2$ otrzymujemy

$$\varphi^\alpha=\varepsilon^{\alpha\beta}(\theta^3|_\beta+b_{\gamma\beta}\,\theta^\gamma), \tag{4.4}$$

a więc ostatecznie mamy tylko sześć niezależnych funkcji naprężeń, tj. φ^3, θ^α, θ^3, ψ i μ. Odpowiednio wzory $(4.3)_{1,2}$ przyjmują, po wyeliminowaniu z nich φ^α za pomocą (4.4), postać

$$\begin{aligned} N^{\beta\alpha}&=\varepsilon^{\beta\gamma}\,[\varepsilon^{\alpha\eta}(\theta^3|_\eta+b_{\eta\delta}\,\theta^\delta)|_\gamma-b^\alpha_\gamma\,\varphi^3],\\ N^{3\alpha}&=\varepsilon^{\alpha\beta}\,[\varphi^3|_\beta+b_{\beta\gamma}\,\varepsilon^{\gamma\eta}(\theta^3|_\eta+b_{\eta\delta}\,\theta^\delta)]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Zależność geometryczna

$$\varepsilon^{\gamma\eta}\,b_{\beta\gamma}\,b_{\eta\delta}\,\theta^\delta=\varepsilon^{\gamma\eta}\,\theta_{\beta|\eta\gamma}, \tag{4.6}$$

poprawna dla dowolnego wektora θ^δ, pozwala na przekształcenie wzoru $(4.5)_2$ do postaci

$$N^{3\alpha}=\varepsilon^{\alpha\beta}\,[\varphi^3|_\beta+\varepsilon^{\gamma\eta}(b_{\beta\gamma}\,\theta^3|_\eta+\theta_{\beta|\eta\gamma})], \tag{4.7}$$

pożytecznej przy wywodzie równań nierozdzielności z zasady prac wirtualnych. Ostatecznie wzory $(4.3)_{3-5}$ (4.5) i (4.7) przedstawiają poszukiwane rozwiązanie ogólne równań równowagi teorii sześcioparametrowej, wyrażone za pomocą sześciu dowolnych funkcji naprężeń.

Siły wewnętrzne w teorii sześcioparametrowej można zsymetryzować w sposób analogiczny do stosowanego w teorii trójparametrowej [9]. Zauważmy, że wielkości

$$\tilde{N}^{\beta\alpha}=\tilde{N}^{\alpha\beta}=N^{\beta\alpha}+b^\alpha_\nu\,M^{\nu\beta}, \qquad \tilde{M}^{\beta\alpha}=\tilde{M}^{\alpha\beta}=\tfrac{1}{2}(M^{\beta\alpha}+M^{\alpha\beta}) \tag{4.8}$$

są symetryczne, pierwsza na mocy algebraicznego równania równowagi $(3.4)_5$, druga z definicji. Korzystając z (4.8) i $(3.4)_3$ przekształcamy równania równowagi $(3.4)_{1,2,4}$ do postaci

$$\begin{gathered} \tilde{N}^{\beta\alpha}|_\beta-2b^\alpha_\nu\,\tilde{M}^{\nu\beta}|_\beta-b^\alpha_{\nu|\beta}\,\tilde{M}^{\nu\beta}=0,\\ \tilde{M}^{\beta\alpha}|_\beta-b_{\alpha\beta}\,b^\alpha_\nu\,\tilde{M}^{\nu\beta}+b_{\alpha\beta}\,\tilde{N}^{\beta\alpha}=0, \qquad M^{3\alpha}|_\alpha+b_{\alpha\beta}\,\tilde{M}^{\beta\alpha}-N^{33}=0, \end{gathered} \tag{4.9}$$

w której występują tylko symetryczne siły wewnętrzne. Podstawiając wyrażenia $(4.5)_1$ i $(4.3)_3$ do wzorów (4.8) oraz uwzględniając znany związek algebraiczny $\varepsilon^{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\lambda\eta}=g^{\alpha\lambda}\,g^{\beta\eta}-g^{\alpha\eta}\,g^{\beta\lambda}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{N}^{\beta\alpha}&=[g^{\beta\alpha}(b^\eta_\delta\,\theta^\delta+\theta^{3|\eta})+b^{\alpha\beta}\,\theta^\eta]\,|_\eta-(b^\beta_\delta\,\theta^\delta)\,|^\alpha-(b^\alpha_\delta\,\theta^\delta)\,|^\beta-\\ &\qquad -\theta^{3\,|\beta\alpha}+(b^{\alpha\delta}\,b^\beta_\delta-b^{\alpha\beta}\,b^\eta_\eta)\,\theta^3,\\ \tilde{M}^{\beta\alpha}&=g^{\alpha\beta}\,\theta^\eta|_\eta-\tfrac{1}{2}(\theta^{\beta|\alpha}+\theta^{\alpha|\beta})+(b^{\alpha\beta}-g^{\alpha\beta}\,b^\eta_\eta)\,\theta^3, \end{aligned} \tag{4.10}$$

przy czym nietrudno spostrzec, że prawe strony powyższych wzorów są symetryczne względem wskaźników α, β. Wzory (4.10) wraz z $(4.3)_{4,5}$ przedstawiają parametryczne rozwiązanie ogólne równań równowagi (4.9). Zauważmy, że w rozwiązaniu tym nie występuje funkcja naprężeń φ^3.

Literatura cytowana w tekście

1. К. Ф. Черных, *Линейная теория оболочек*, т. 2, Ленинград 1964.
2. E. Reissner, *A note on stress function and compatibility equations in shell theory*, Topics in Applied Mechanics, Elsevier 1965.
3. W. Zerna, *Matematisch strenge Theorie elastischer Schalen*, ZAMM, **42**, 7/8, 333–341, 1962.
4. L. M. Habip, *Theory of elastic shells in the reference state*, Ing. Archiv, **34**, 228–237, 1965.
5. Cz. Woźniak, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966.
6. P. M. Naghdi, *The theory of shells and plates*, Handbuch der Physik VIa/2, 1972.
7. W. Pietraszkiewicz, *Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells*, PWN, Warszawa–Poznań 1979.
8. И. Н. Векуа, *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*, Наука, Москва 1982.
9. P. M. Naghdi, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, V. 4, 1963.

Резюме

ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ШЕСТИПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается линейная теория оболочек, обладающих шестью местными степенями свободы точек срединной поверхности. В работе получено общие решения однродных уравнений равновесия, в которых появляетея шесть произвольных функций напряжений.

Summary

STRESS FUNCTIONS IN A SIX-PARAMETRIC SHELL THEORY

A linear theory of shells posessing six local degrees of freedom that results from assumption of linear distribution of the displacement vector across the shell thickness is dealt with. A general parametric solution of the homogeneous equations of equilibrum of the theory in terms of six arbitrary stress functions is found.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1983.