ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 32, 1, 99—106, 1984
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

QUASI-ORTOGONALNOŚĆ JEDNORODNYCH ROZWIĄZAŃ LINIOWEJ SPRĘŻYSTOŚCI DLA PASMA ORTOTROPOWEGO

RYSZARD WOJNAR (WARSZAWA)

Rozważamy zadanie liniowej teorii sprężystości dla jednorodnego pasma ortotropowego. Osie ortotropii nie pokrywają się z kierunkami brzegów pasma. Wyprowadzamy relację quasi-ortogonalności w znaczeniu Papkowicza dla rozwiązań problemu jednorodnego pasma. Następnie wykorzystujemy tę relację do zredukowania liczby członów w wyrażeniu na wariację energii prostokątnego wycinka pasma. Okazuje się w szczególności, że wariacja nie zależy *explicite* od stałych sprężystości β_{16} i β_{26}.

1. Wstęp

Rozważamy klasyczne zadanie teorii sprężystości dla pasma ortotropowego jednorodnego, które w płaszczyźnie x, y zajmuje obszar $|x|<\infty$, $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Brzegi $y=\pm 1$ pasma są swobodne, znika więc na nich składowa normalna i styczna tensora naprężenia,

$$\sigma_y(x,y)_{y=\pm 1}=0, \qquad \sigma_{xy}(x,y)_{y=\pm 1}=0. \tag{1.1}$$

Fadle [1] oraz Papkowicz [2] przyjęli funkcję Airy'ego dla pasma w postaci szeregu wykładniczego

$$\Phi(x,y)=\sum_{s=0}^{\infty} e^{-\lambda_s x} f_s(y), \tag{1.2}$$

przy czym λ_s są w ogólności stałymi zespolonymi, które stanowią rozwiązania równania przestępnego, typu równania wiekowego, $f_s(y)$ zaś są funkcjami zespolonymi.

Postać (1.2) funkcji Airy'ego implikuje następujący kształt warunków brzegowych (1.1):

$$f_s(\pm 1)=0, \qquad f_s'(\pm 1)=0. \tag{1.3}$$

Papkowicz [2] (porównaj też [3]) zwrócił nadto uwagę na następujący związek pomiędzy rozwiązaniami f_s o różnych wskaźnikach s, zachodzący dla pasma izotropowego

$$\int_{-1}^{1} dy\,(f_r'' f_s'' - \lambda_r^2 \lambda_s^2 f_r f_s)=0 \tag{1.4}$$

zwany warunkiem uogólnionej ortogonalności lub quasi-ortogonalności.

Warunek (1.4) wynika z warunków brzegowych (1.3) i z równania różniczkowego

$$f_s^{iv}+2\lambda_s^2 f_s''+\lambda_s^4 f_s=0, \tag{1.5}$$

które uzyskuje się z równania biharmonicznego na funkcję Φ, po rozdzieleniu w nim zmiennych za pomocą podstawienia (1.2).

Choi i Horgan [4] uogólnili warunek (1.4) wskazując, że dla pasma ortotropowego «w osiach», tzn. gdy oś geometryczna pasma jest zgodna z jedną z osi ortotropii, spełniony jest warunek

$$\int_{-1}^{1} dy\,(\beta_{11} f_r'' f_s''-\beta_{22}\lambda_r^2\lambda_s^2 f_r f_s)=0. \tag{1.6}$$

Zgodnie z konwencjonalnymi oznaczeniami [5] β_{11} i β_{22} są współczynnikami podatności sprężystej odpowiednio w kierunku x i y.

2. Quasi-ortogonalność przy dowolnym ukierunkowaniu osi ortotropii

Rozważamy pasmo ortotropowe, którego oś geometryczna nie pokrywa się z żadną z osi ortotropii. Wtedy funkcja f_s spełnia następujące równanie różniczkowe (por. np. [4])

$$\beta_{11} f_s^{iv}+2\beta_{16}\lambda_s f_s^{iii}+(2\beta_{12}+\beta_{66})\lambda_s^2 f_s''+2\beta_{26}\lambda_s^3 f_s'+\beta_{22}\lambda_s^4 f_s=0. \tag{2.1}$$

Mnożymy równanie (2.1) ze wskaźnikiem s przez $\lambda_r^2 f_r$, to samo zaś równanie wzięte ze wskaźnikiem r przez $\lambda_s^2 f_s$. Odejmujemy tak otrzymane równania stronami i całkujemy w przedziale $(-1, 1)$; całkując następnie przez części trzy pierwsze człony równania, z wykorzystaniem warunków brzegowych (1.3), znajdujemy

$$\int_{-1}^{1} dy\,\{-\beta_{11}(\lambda_r^2 f_s^{iii} f_r'-\lambda_s^2 f_r^{iii} f_s')+2\beta_{16}\lambda_r\lambda_s(\lambda_s f_r'' f_s'-\lambda_r f_s'' f_r')+ \\ +2\beta_{26}\lambda_r^2\lambda_s^2(\lambda_s f_s' f_r-\lambda_r f_r' f_s)+\beta_{22}\lambda_s^2\lambda_r^2(\lambda_s^2-\lambda_r^2) f_r f_s\}=0. \tag{2.2}$$

Spostrzegamy jeszcze, całkując przez części, że na mocy warunków brzegowych (1.3) zachodzą równości

$$\int_{-1}^{1} dy\,(f_r f_s'+f_r' f_s)=0, \qquad \int_{-1}^{1} dy\,(f_r' f_s''+f_r'' f_s')=0. \tag{2.3}$$

Całkując jeszcze przez części wyraz ze współczynnikiem β_{11} w równaniu (2.2) oraz korzystając ze związków (2.3), znajdujemy następujące uogólnienie warunku otrzymanego przez Choi i Horgana:

$$\int_{-1}^{1} dy\left(\beta_{11} f_r'' f_s''+2\beta_{16}\frac{\lambda_r\lambda_s}{\lambda_r-\lambda_s} f_r'' f_s'+2\beta_{26}\frac{\lambda_r^2\lambda_s^2}{\lambda_r-\lambda_s} f_r f_s'-\beta_{22}\lambda_r^2\lambda_s^2 f_r f_s\right)=0. \tag{2.4}$$

Oczywiście zakładamy, że $\lambda_r\neq\lambda_s$.

3. Energia odcinka pasma

Energia sprężysta zawarta w odcinku pasma między $x=0$ a $x=L$ wynosi

$$E=\frac{1}{2}\int_0^L dx\int_{-1}^{1} dy\, \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}$$

lub po zmianie całki powierzchniowej na całkę po konturze Γ rozważanego obszaru

$$E=\frac{1}{2}\int_\Gamma d\Gamma\, \sigma_{ij}\, u_i\, n_j,$$

gdzie σ_{ij}, u_i i n_i są odpowiednio składowymi tensora naprężenia, wektora przemieszczenia i wektora normalnej zewnętrznej do konturu Γ. Uwzględniając specyfikę tego konturu oraz jednorodne warunki brzegowe (1.1), mamy

$$E=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dy\,[\sigma_x u+\sigma_{xy} v]_0^L. \tag{3.1}$$

Przy tym, zgodnie z definicją funkcji Airy'ego,

$$\sigma_x=2\mathrm{Re}\sum_s e^{-\lambda_s x} f_s'', \qquad \sigma_{xy}=2\mathrm{Re}\sum_s \lambda_s e^{-\lambda_s x} f_s', \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} u&=-2\mathrm{Re}\sum_s e^{-\lambda_s x}\left(\beta_{11}\frac{1}{\lambda_s} f_s''+\beta_{12}\lambda_s f_s+\beta_{16} f_s'\right)+c_1(y),\\ v&=2\mathrm{Re}\sum_s e^{-\lambda_s x}(\beta_{12} f_s'+\beta_{22}\lambda_s^2\, 'f_s+\beta_{26}\lambda_s f_s)+c_2(x),\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$c_1(y)=ay+b_1, \qquad c_2(x)=-ax+b_2;$$

symbole a, b_1, b_2 — stałe oraz

$$[(\ldots)]_0^L=(\ldots)_{x=L}-(\ldots)_{x=0}=\int_0^L dx\frac{\partial}{\partial x}(\ldots).$$

Ponadto $'f_s$ oznacza funkcję pierwotną funkcji f_s:

$$'f_s=\int f_s\, dy.$$

Zauważamy przede wszystkim, że na mocy warunków brzegowych (1.3)

$$\int_{-1}^{1} dy\,\sigma_x c_1=0, \qquad \int_{-1}^{1} dy\,\sigma_{xy} c_2=0, \tag{3.4}$$

co jest wynikiem banalnym, gdyż ruch sztywny układu nie ma wpływu na wartość jego energii wewnętrznej.

W wyrażeniu na energię znikają również, ze względu na wynikającą z warunku (2.3) antysymetrię we wskaźnikach r i s, wyrazy z czynnikami β_{16} i β_{26}; a więc

$$I_{16}=-\beta_{16}\int_{-1}^{1} dy\,\sigma_x\, 2\mathrm{Re}\sum_s e^{-\lambda_s x} f_s', \tag{3.5}$$

$$I_{26}=\beta_{26}\int_{-1}^{1} dy\,\sigma_{xy}\, 2\mathrm{Re}\sum_s e^{-\lambda_s x}\lambda_s f_s. \tag{3.6}$$

Rzeczywiście, oznaczając gwiazdką funkcję sprzężoną do danej funkcji zespolonej i korzystając z warunku typu $(2.3)_2$, łatwo jest pokazać, że

$$I_{16}=-\beta_{16}\sum_r\sum_s\int_{-1}^{1}dy\,(e^{-\lambda_r x}f_r''+e^{-\lambda_r^* x}f_r^{*''})\,(e^{-\lambda_s x}f_s'+e^{-\lambda_s^* x}f_s^{*'})=-I_{16},$$

skąd

$$I_{16}=0. \tag{3.7}$$

Podobnie na mocy warunku typu $(2.3)_1$

$$I_{26}=0. \tag{3.8}$$

Stąd energia sprężysta wynosi

$$E=\frac{1}{2}\sum_s\int_{-1}^{1}dy\Big[-\sigma_x\,2\mathrm{Re}\Big\{e^{-\lambda_s x}\Big(\beta_{11}\frac{1}{\lambda_s}f_s''+\beta_{12}\lambda_s f_s\Big)\Big\}+$$
$$+\sigma_{xy}\,2\mathrm{Re}\{e^{-\lambda_s x}(\beta_{12}f_s'+\beta_{22}\lambda_s^2\,'f_s)\}\Big]_0^L.$$

Dalej zauważamy, że na mocy warunków brzegowych (1.3)

$$\int_{-1}^{1}dy\,f_r''f_s=-\int_{-1}^{1}dy\,f_r'f_s',\qquad \int_{-1}^{1}dy\,'f_sf_r'=-\int_{-1}^{1}dy\,f_rf_s.$$

Pozwala to zapisać energię w postaci

$$E=\frac{1}{2}\sum_r\sum_s\int_{-1}^{1}dy\Big[-\beta_{11}\,2\mathrm{Re}\,(e^{-\lambda_r x}f_r'')\,2\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{\lambda_s}e^{-\lambda_s x}f_s''\Big)+ \tag{3.9}$$
$$+2\beta_{12}\,2\mathrm{Re}\,(e^{-\lambda_r x}f_r')\,2\mathrm{Re}\,(\lambda_s e^{-\lambda_s x}f_s')-\beta_{22}\,2\mathrm{Re}\,(e^{-\lambda_r x}\lambda_r f_r)\,2\mathrm{Re}\,(\lambda_s^2e^{-\lambda_s x}f_s)\Big]_0^L.$$

4. Wariacja funkcjonału energii

Wariacja funkcjonału energii sprężystej δE może być przedstawiona [6] w postaci

$$\delta E=\frac{1}{2}\int_\Gamma dy\,u_i\,\delta\sigma_{ij}\,n_j$$

lub dla konturu naszego prostokątnego wycinka pasma

$$\delta E=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dy\,[u_i\,\delta\sigma_{i1}]_0^L. \tag{4.1}$$

Można pokazać, [7 i 8], że funkcje f_s są postaci

$$f_s=Z_s\Psi_s, \tag{4.2}$$

gdzie Z_s oznacza stałą w ogólności zespoloną oraz $\Psi_s=\sum_{i=1}^{4}e_i^0\,e^{\lambda_s\omega_i y}$; e_i^0, ω_i stałe zespolone zależne tylko od własności sprężystych pasma.

Korzystając z (4.2) oraz z (3.2) i (3.3), mamy

$$\delta\sigma_x = 2\mathrm{Re}\sum_s Z_s' e^{-\lambda_s x} \Psi_s'', \qquad \delta\sigma_{xy} = 2\mathrm{Re}\sum_s Z_s' \lambda_s e^{-\lambda_s x} \Psi_s', \tag{4.3}$$

gdzie Z_s' oznacza wariację stałej Z_s.

Ponadto

$$\begin{aligned} u &= -2\mathrm{Re}\sum_s Z_s e^{-\lambda_s x}\left(\beta_{11}\frac{1}{\lambda_s}\Psi_s'' + \beta_{12}\lambda_s \Psi_s + \beta_{16}\Psi_s'\right) + c_1(y), \\ v &= 2\mathrm{Re}\sum_s Z_s e^{-\lambda_s x}(\beta_{12}\Psi_s' + \beta_{22}\lambda_s{}'\Psi_s + \beta_{26}\lambda_s \Psi_s) + c_2(x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Wprowadźmy dla skrócenia zapisu oznaczenie

$$e_s = e_s(x) = e^{-\lambda_s x}. \tag{4.5}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \delta E = \frac{1}{2}\sum_r\sum_s\int_{-1}^{1} dy\Big[&-(Z_r' e_r \Psi_r'' + Z_r'^* e_r^* \Psi_r^{*''})\Big\{Z_s e_s\Big(\beta_{11}\frac{1}{\lambda_s}\Psi_s'' + \\ &+\beta_{12}\lambda_s\Psi_s + \beta_{16}\Psi_s'\Big) + Z_s^* e_s^*\Big(\beta_{11}\frac{1}{\lambda_s^*}\Psi_s^{*''} + \beta_{12}\lambda_s^*\Psi_s^* + \beta_{16}\Psi_s^{*'}\Big)\Big\} + \\ &+(Z_r'\lambda_r e_r \Psi_r' + Z_r'^*\lambda_r^* e_r^* \Psi_r^{*'})\{Z_s e_s(\beta_{12}\Psi_s' + \beta_{22}\lambda_s^2{}'\Psi_s + \beta_{26}\lambda_s\Psi_s) + \\ &+Z_s^* e_s^*(\beta_{12}\Psi_s^{*'} + \beta_{22}\lambda_s^{*2}{}'\Psi_s^* + \beta_{26}\lambda_s^*\Psi_s^*\}\Big]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Funkcje $c_1(y)$ i $c_2(x)$ ze względu na (3.4) zostały opuszczone. Na mocy warunku uogólnionej ortogonalności (2.4), antysymetrii $(2.3)_1$ oraz zależności (4.2) między f_s a Ψ_s, znajdujemy, że

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} dy(-\beta_{16}\Psi_r''\Psi_s' + \beta_{26}\lambda_r\lambda_s\Psi_r'\Psi_s) = \\ &\qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_s} - \frac{1}{\lambda_r}\right)\int_{-1}^{1} dy(\beta_{11}\Psi_r''\Psi_s'' - \beta_{22}\lambda_r^2\lambda_s^2\Psi_r\Psi_s). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Jednocześnie, ze względu na warunki brzegowe, mają miejsce związki

$$\int_{-1}^{1} dy\,\Psi_r''\Psi_s = -\int_{-1}^{1} dy\,\Psi_r'\Psi_s', \qquad \int_{-1}^{1} dy\,{}'\Psi_s\Psi_r' = -\int_{-1}^{1} dy\,\Psi_r\Psi_s. \tag{4.8}$$

Analogiczne do (4.7) i (4.8) związki zachodzą oczywiście również dla par (Ψ_r^*, Ψ_s), (Ψ_r, Ψ_s^*) i (Ψ_r^*, Ψ_s^*).

Związki typu (4.7) pozwalają przedstawić wyraz w wyrażeniu na δE zawierający składniki z czynnikami β_{16} i β_{26} przez składniki z czynnikami β_{11} i β_{22}. Związki typu (4.8) pozwalają doprowadzić do dalszej redukcji wyrazów w wyrażeniu na δE.

Tak więc wyrazy podcałkowe, zawierające iloczyn pary funkcji Ψ_r i Ψ_s oraz iloczyny par ich pochodnych, redukują się do następującego wyrażenia:

$$(4.9)\qquad \left[Z_r' e_r Z_s e_s \frac{1}{2}(\lambda_r+\lambda_s)\left(-\beta_{11}\frac{1}{\lambda_r\lambda_s}\Psi_r''\Psi_s''+2\beta_{12}\Psi_r'\Psi_s'-\beta_{22}\lambda_r\lambda_s\Psi_r\Psi_s\right)\right]_0^L .$$

Wyrazy zawierające np. parę funkcji Ψ_r^* i Ψ_s oraz ich pochodne otrzymamy z wyrażenia (4.9) po zastąpieniu w nim wielkości Z_r', λ_r, e_r, Ψ_r, Ψ_r' i Ψ_r'' przez odpowiednie wielkości sprzężone.

W końcu znajdujemy, że

$$(4.10)\qquad \delta E=\frac{1}{2}2\mathrm{Re}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\int_{-1}^{1}dy\left[Z_r' Z_s e_r e_s \frac{1}{2}(\lambda_r+\lambda_s)\times\right.$$

$$\times\left(-\beta_{11}\frac{1}{\lambda_r\lambda_s}\Psi_r''\Psi_s''+2\beta_{12}\Psi_r'\Psi_s'-\beta_{22}\lambda_r\lambda_s\Psi_r\Psi_s\right)+$$

$$\left.+Z_r^{*\prime} Z_s e_r^* e_s\frac{1}{2}(\lambda_r^*+\lambda_s)\left(-\beta_{11}\frac{1}{\lambda_r^*\lambda_s}\Psi_r^{*\prime\prime}\Psi_s''+2\beta_{12}\Psi_r^{*\prime}\Psi_s'-\beta_{22}\lambda_r^*\lambda_s\Psi_r^*\Psi_s\right)\right]_0^L .$$

Jest widoczne, że podobnie jak we wzorze (3.9), nie występuje tutaj β_{16} i β_{26}[1]. Do otrzymania (4.10) istotne było zastosowanie warunku uogólnionej ortogonalności (2.4).

Wzór (4.10) może być wykorzystany przy rozwiązywaniu pewnego konkretnego problemu brzegowego dla prostokątnej ortotropowej tarczy, w której osie ortotropii nie pokrywają się z kierunkami brzegów tarczy.

Podziękowanie

Praca niniejsza wyrosła z tematyki badań, które prowadziłem w Institut de Mécanique de Grenoble, gdzie mogłem pracować dzięki życzliwości Profesora A. Sawczuka. Profesor J. P. Boehler był zarazem inicjatorem tej tematyki jak i kierownikiem prac prowadzonych tam przeze mnie. Za wprowadzenie mnie w tę tematykę składam Mu tutaj wyrazy wdzięczności.

Panu Profesorowi Józefowi Ignaczakowi dziękuję serdecznie za życzliwe uwagi krytyczne dotyczące powyższego zagadnienia.

Dodatek do punktu 4

Zależność wariacji energii od ukierunkowania osi ortotropii ukryta jest we współczynnikach β_{11}, β_{12}, β_{22}, β_{66} oraz w pierwiastkach równania charakterystycznego ω_i.

Niech B_{11}, B_{12}, B_{22} i B_{66} będą stałymi elastyczności w układzie osi własnych ortotropii, Ω_i zaś pierwiastkami równania charakterystycznego w układzie tych osi.

[1] Por. Dodatek

Oznaczmy kąt między pierwszym kierunkiem głównym ortotropii a osią x, pokrywającą się z osią geometryczną pasma, przez φ. Wprowadźmy oznaczenia skrótowe

$$s=B_{11}+B_{22}, \quad r=B_{11}-B_{22}, \quad B=2B_{12}+B_{66}.$$

Wtedy [5]

$$\beta_{11}=\frac{1}{8}s(3+\cos 4\varphi)+\frac{1}{2}r\cos 2\varphi+\frac{1}{4}B\sin^2 2\varphi,$$

$$\beta_{12}=B_{12}+\frac{1}{4}(s-B)\sin^2 2\varphi,$$

$$\beta_{22}=\frac{1}{8}s(3+\cos 4\varphi)-\frac{1}{2}r\cos 2\varphi+\frac{1}{4}B\sin^2 2\varphi,$$

$$\beta_{66}=B_{66}+(s-B)\sin^2 2\varphi.$$

Można też napisać

$$\varphi=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{r}{s-B}\frac{q-1}{q+1}\right),$$

gdzie $q=\beta_{16}/\beta_{26}$. Ponadto

$$\omega_i=\frac{\sin\varphi+\Omega_i\cos\varphi}{\cos\varphi-\Omega_i\sin\varphi}, \qquad i=1,2,3,4,$$

Literatura cytowana w tekście

1. I. Fadle, *Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe*, Ingen. Archiv., **11**, 125–149, 1940.
2. P. F. Papkowicz, *Ueber eine Form der Loesung des byharmonischen Problems fuer das Rechteck*, DAN SSSR, **27**, 334–338, 1940.
3. В. К. Прокопов, *Однородные решения теории упругости и их приложения к теори тонких пластинок*, Тр. Всесоюзного съезда по теор. и прикл. мех., вып., 3, Наука, Москва 1966.
4. I. Choi, C. O. Horgan, *Saint-Venant's principle and end effects in anisotropic elasticity*, Trans. ASME, J. Appl. Mech. **44E**, 424–430, 1977.
5. S. Lechnicki, *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Holden Day, San Francisco 1963.
6. M. E. Gurtin, *Linear theory of elasticity*, Hdb. der Phys., ed. Fluegge, VI a/2, Springer, 1972.
7. Ш. М. Хачатрян, *К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной полосы*, Изв. АН Армянской ССР, 29, 19—32, 1976.
8. R. Wojnar, *niepublikowane*.

Резюме

КВАЗИОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Рассматриваем задачу линейной теории упругости для однородной ортотропной полосы. Оси ортотропии не совпадают с направлениями границ полосы. Выводим соотношение квазиортогональности, в смысле Папковича, для решений задачи однородной полосы. Затем

используем это соотношение для редукции количества членов в выражении для вариации энергии прямоугольного сектора полосы. Оказывается в частности, что вариация не зависит явным образом от постоянных упругости β_{16} и β_{26}.

Summary

QUASI-ORTHOGONALITY OF HOMOGENEOUS SOLUTIONS OF LINEAR ELASTICITY FOR AN ORTHOTROPIC PLATE STRIP

Linear elastic problem for a homogeneous orthotropic strip is considered. The axes of orthotropy do not coincide with the edges of the strip. The quasi-orthogonality relation is introduced, in the sense of Papkovič, for the solution of the problem of a homogeneous strip. This relation is then used to reduce the number of terms in the expression for the energy variation of a rectangular strip element. In particular, the variation is shown to be explicitly independent of the elastic constants β_{16} and β_{26}.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 czerwca 1983 r.