ROZPRAWY INŻYNIERSKIE · ENGINEERING TRANSACTIONS · 31, 1, 63—76, 1983
Polska Akademia Nauk · Instytut Podstawowych Problemów Techniki

TECHNIKA DUŻYCH PRZYROSTÓW W ANALIZIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ

WIKTOR GAMBIN (WARSZAWA)

Zaproponowano sposób obliczania zagadnień sprężysto-plastycznych metodą elementów skończonych, dopuszczający przyjmowanie dużych przyrostów czasu. Przyjmując za McMeekingiem i Ricem [7] związki Prandtla-Reussa uogólnione na przypadek dużych deformacji, przetransformowano je do opisu Lagrange'a, a następnie wyspecyfikowano dla małych odkształceń. Umożliwiło to uwzględnienie wpływu lokalnego obrotu cząsteczek na zmianę operatora konstytutywnego, Wyprowadzone na tej drodze przyrostowe równanie konstytutywne zakłada liniową zmienność w czasie pól przemieszczeń i odkształceń, ale dopuszcza dowolną zmienność pola naprężeń. Zakładając, że pole naprężeń jako funkcja czasu jest wielomianem stopnia $n = 1, 2, 3, ...$ otrzymujemy na drodze iteracyjnej kolejne przybliżenia operatora konstytutywnego. Dla $n = 1$ mamy standardowe, liniowe podejście przyrostowe. Dla $n = 2$ macierz konstytutywna jest średnią arytmetyczną macierzy na początku i końcu kroku obliczeniowego. Ten ostatni przypadek pokrywa się z proponowanymi uprzednio postaciami macierzy konstytutywnej [2 i 3].

1. Wprowadzenie

Będziemy zajmować się obliczaniem pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w ciałach sprężysto-plastycznych, metodą elementów skończonych. Ograniczymy się do procesów quasi-statycznych, wzmocnienia izotropowego oraz małych odkształceń. Powszechnie stosowanym sposobem rozwiązywania tego typu zadań jest technika przyrostowa [1]. Polega ona na znajdowaniu rozwiązań dla kolejno określonych, małych przyrostów obciążenia zewnętrznego. Dokładność obliczeń jest ściśle związana z wielkością przyrostów. Wielkość przyrostów rzutuje na liczbę kroków obliczeniowych, a w rezultacie na długość czasu trwania obliczeń.

Okazuje się, że można znacznie zwiększyć długość kroku obliczeniowego, jeżeli rozwiązywać zadanie na podstawie innego, rozszerzonego sformułowania przyrostowego. Dotychczasowe sformułowanie zakłada liniową zmianę pól przemieszczeń $\mathbf{u}$, odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ i naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$, w przedziale odpowiadającym przyrostowi czasu Δt. Założenie to powoduje, że równanie konstytutywne $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathscr{C}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ można pisać w postaci przyrostowej $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathscr{C}_0 \, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ gdzie $\mathscr{C}_0$ jest wartością operatora konstytutywnego na początku kroku Δt. W pracy wykażemy, że założenie o liniowej zmienie pola przemieszczeń i pola małych odkształceń nie ma większego wpływu na dokładność obliczeń; natomiast w przypadku pola naprężeń musimy silnie ograniczyć długość kroku obliczeniowego.

Przyjęcie sformułowania przyrostowego, w którym pole naprężeń jako funkcja czasu opisane jest wielomianem odpowiednio wysokiego stopnia N, umożliwi przeprowadzenie wszystkich obliczeń w ramach jednego kroku Δt. Obliczenia te przedstawimy w postaci procedury iteracyjnej dla $N = 1, 2, 3, \ldots$.

Zagadnienie zwiększenia kroku obliczeniowego pojawia się coraz częściej w literaturze. W pracy [2] autorzy zaproponowali przyjęcie operatora $\mathscr{C}_0$ jako wartości $\mathscr{C}$ obliczonej dla średniego pola naprężeń — na początku i końcu kroku Δt. Podobnie w pracy [3] jako macierz sztywności przyjęto średnią arytmetyczną macierzy na końcach przedziału Δt. Okazuje się, że ta intuicyjnie przyjęta postać macierzy sztywności pojawia się w proponowanej procedurze iteracyjnej, jeżeli ograniczymy się do aproksymacji pola naprężeń wielomianem stopnia drugiego.

2. Podstawowe równania opisujące duże deformacje sprężysto-plastyczne

Punktem wyjścia naszych rozważań będzie opis pól związanych z dużymi deformacjami ciała sprężysto-plastycznego. Podejście takie zagwarantuje poprawne postawienie zagadnienia dla małych deformacji.

Ustalmy pewien kartezjański układ współrzędnych. W układzie tym w chwili t^* cząsteczki ciała pozbawionego naprężeń wewnętrznych mają współrzędne Y_α dla $\alpha = 1, 2, 3$. Jeżeli przyjmiemy je jako zmienne niezależne od opisu pól mechanicznych, to opis ten nazwiemy pierwotnym opisem Lagrange'a.

W ramach tego opisu położenie cząsteczek w chwili $t > t^*$ określone będzie funkcjami $X_\alpha = X_\alpha(Y_\beta, t)$ dla $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Wartości tych funkcji dla pewnej chwili t° oznaczone przez X_I dla $I = 1, 2, 3$ można traktować jako zmienne niezależne w uaktualnionym opisie Lagrange'a. Ostateczne wyniki naszych rozważań przedstawione będą w tym opisie. Wszystkie wielkości wektorowe i tensorowe indeksowane będą w tym przypadku dużymi literami łacińskimi.

Załóżmy, że w chwili t^0 mamy dane pole przemieszczeń U_I^0, pole sił masowych F_I^0 oraz pole sił powierzchniowych P_I^0. Poza tym, dane są pola tensorowe: odkształceń E_{IJ}^0 i naprężeń S_{IJ}^0. Będziemy je interpretować jako tensor odkształceń Greena i II tensor Pioli–Kirchhoffa.

Poszukiwać będziemy następujących pól: przemieszczeń U_I, odkształceń E_{IJ} i naprężeń S_{IJ}, w chwili bieżącej $t > t^0$ różniącej się od t^0 o pewien przyrost czasu Δt. Pola te, powstałe pod wpływem przyłożonych sił masowych F_I i powierzchniowych P_I, powinny spełniać zależności:

$$
\begin{aligned}
U_I(X_J, t) &= U_I^0(X_J), \\
E_{IJ}(X_K, t) &= E_{IJ}^0(X_K), \\
S_{IJ}(X_K, t) &= S_{IJ}^0(X_K),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

jeżeli

$$F_I(X_J, t) = F_I^0(X_J),$$
$$P_I(X_J, t) = P_I^0(X_J), \tag{2.2}$$

dla $I, J = 1, 2, 3$.

Współrzędne cząstek ciała w chwili t określone będą funkcjami $x_I = x_I(X_J, t)$. Funkcje definiują przyrost pola przemieszczeń:

$$\Delta U_I = U_I - U_I^0 = x_I - X_I \tag{2.3}$$

oraz przyrost pola odkształceń:

$$\Delta E_{IJ} = E_{IJ} - E_{IJ}^0 = \frac{1}{2}(x_{K,I}\, x_{K,J} - \delta_{IJ}). \tag{2.4}$$

Wprowadzimy pole prędkości $V_I = V_I(X_J, t)$:

$$V_I = \partial x_I/\partial t = \dot{x}_I = \dot{U}_I = \overline{\Delta U_I}^{\,\cdot} \tag{2.5}$$

oraz pole prędkości deformacji $\dot{E}_{IJ} = \dot{E}_{IJ}(X_K, t)$:

$$\dot{E}_{IJ} = \frac{1}{2}(V_{K,I}\, x_{K,J} + x_{K,I}\, V_{K,J}) = \overline{\Delta E_{IJ}}^{\,\cdot}. \tag{2.6}$$

To ostatnie można rozłożyć na część liniową oraz nieliniową względem $\Delta U_{I,J}$ i $V_{I,J}$:

$$\dot{E}_{IJ} = \dot{\varepsilon}_{IJ} + \dot{\eta}_{IJ}, \tag{2.7}$$

gdzie

$$\dot{\varepsilon}_{IJ} = \frac{1}{2}(V_{I,J} + V_{J,I}),$$
$$\dot{\eta}_{IJ} = \frac{1}{2}(V_{K,I}\, \Delta U_{K,J} + \Delta U_{K,J}\, V_{K,I}). \tag{2.8}$$

Przejdźmy teraz do przedstawienia trzeciego opisu pól mechanicznych, zwanego przestrzennym opisem Eulera. W opisie tym postulowane jest prawo kontytutywne materiału sprężysto-plastycznego. Jako zmienne niezależne przyjmowane są tu wartości funkcji $x_I(X_J, t)$ dla ustalonej chwili t. Wartości te oznaczać będziemy przez x_i dla $i = 1, 2, 3$. Podobnie wszystkie wielkości wektorowe i tensorowe indeksowane będą w tym przypadku małymi literami łacińskimi.

Wprowadzimy pole prędkości $v_i = v_i(x_j, t)$. Z polem v_i związane jest następujące pole prędkości deformacji:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}). \tag{2.9}$$

Pola $\dot{E}_{IJ}$ oraz d_{ij} związane są zależnością [4]:

$$\dot{E}_{IJ} = d_{rs}\, x_{r,I}\, x_{s,J}. \tag{2.10}$$

Jako pole naprężeń w opisie Eulera przyjmowany jest tzw. rzeczywisty tensor naprężeń Cauchy'ego σ_{ij}. Jest on związany z II symetrycznym tensorem Pioli–Kirchhoffa S_{IJ} w następujący sposób:

$$S_{IJ} = \det[x_{K,L}]\,\sigma_{rs}\,X_{I,r}\,X_{J,s}. \tag{2.11}$$

Wprowadzone przez nas pola F_I oraz P_I po przetransformowaniu do opisu Eulera przyjmą oznaczenia f_i oraz p_i.

Pole naprężeń i pole prędkości deformacji w chwili t związane są z polem prędkości i polami sił zewnętrznych równaniem bilansu energii [5]:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\,d_{ij}\,d\Omega = \int_{\Omega} f_i\,v_i\,d\Omega + \int_{\partial\Omega} p_i\,v_i\,d(\partial\Omega), \tag{2.12}$$

gdzie $\partial\Omega$ jest objętością elementarnej części ciała, a $\partial\Omega$ jej powierzchnią w chwili t. Powyższe równanie można przetransformować do uaktualnionego opisu Lagrange'a [6]:

$$\int_{\Omega^0} S_{IJ}\,\dot{E}_{IJ}\,d\Omega^0 = \int_{\Omega^0} F_I\,V_I\,d\Omega^0 + \int_{\partial\Omega^0} P_I\,V_I\,d(\partial\Omega^0), \tag{2.13}$$

gdzie Ω^0 jest objętością elementarnej części ciała a $\partial\Omega^0$ jej powierzchnią w chwili t_0.

Ponieważ interesuje nas związek dla przyrostów wprowadzonych pól, równanie (2.13) przedstawimy w postaci:

$$\int_{\Omega^0} \Delta S_{IJ}\,\dot{\varepsilon}_{IJ}\,d\Omega^0 + \int_{\Omega^0} S^0_{IJ}\,\dot{\eta}_{IJ}\,d\Omega^0 = \int_{\Omega^0} \Delta F_I\,V_I\,d\Omega^0 + \int_{\partial\Omega^0} \Delta P_I\,V_I\,d(\partial\Omega^0) - (R_1 + R_2), \tag{2.14}$$

gdzie

$$R_1^{\bullet} = \int_{\Omega^0} \Delta S_{IJ}\,\dot{\eta}_{IJ}\,d\Omega^0, \tag{2.15}$$

opisuje wpływ nieliniowego wyrazu pola odkształceń na bilans energii, a

$$R_2 = \int_{\Omega^0} S^0_{IJ}\,\dot{\varepsilon}_{IJ}\,d\Omega^0 - \int_{\Omega^0} F^0_I\,V_I\,d\Omega^0 - \int_{\partial\Omega^0} P^0_I\,V_I\,d(\partial\Omega^0) \tag{2.16}$$

znika w przypadku małych odkształceń, ponieważ pola S^0_{IJ}, F^0_I, P^0_I spełniają zasadę prac wirtualnych.

Równania (2.14) — (2.16) stanowią punkt wyjścia przy analizie nieliniowych zagadnień mechaniki ciał stałych metodą elementów skończonych [5].

Jeżeli ograniczymy się do analizy małych deformacji, dla których można zastąpić wielkości Ω^0, $\partial\Omega^0$, ΔS_{IJ}, $\dot{\varepsilon}_{IJ}$, ΔF_I, ΔP_I, V_I, wielkościami Ω, $\partial\Omega$, $\Delta\sigma_{ij}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, Δf_i, Δp_i, v_i, a także można zaniedbać wyrazy zawierające $\dot{\eta}_{IJ}$, to równanie (2.14) przyjmie postać

$$\int_{\Omega} \Delta\sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}\,d\Omega = \int_{\Omega} \Delta f_i\,v_i\,d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Delta p_i\,v_i\,d(\partial\Omega). \tag{2.17}$$

Wprowadzimy teraz związek konstytutywny dla materiału sprężysto-plastycznego ulegającego małym odkształceniom w zakresie sprężystym i dużym w zakresie sprężysto-plastycznym. Równania opisujące taki związek zaproponowano w pracy [7].

Zanim je przedstawimy wprowadzimy pojęcie tensora Kirchhoffa:

$$\tau_{ij} = J\sigma_{ij}, \tag{2.18}$$

gdzie J jest stosunkiem objętości w pewnej konfiguracji odniesienia do objętości w konfiguracji aktualnej. Tensor τ_{ij} będziemy odnosić do konfiguracji bieżącej, zatem $J = 1$.

Jako miarę prędkości zmiany tego tensora przyjmiemy jego pochodną Zaremby–Jaumanna:

$$\tau^*_{ij} = \dot{\tau}_{ij} - \omega_{ik}\,\tau_{kj} + \tau_{ik}\,\omega_{kj}, \tag{2.19}$$

gdzie

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \tag{2.20}$$

jest tensorem prędkości chwilowego obrotu cząstki ciała.

Tego rodzaju miara nie zależy od chwilowych obrotów tensora τ_{ij} i dlatego nazywana jest współobrotową prędkością zmiany naprężenia. Zwracamy uwagę, że

$$J^* = d_{kk} \tag{2.21}$$

mimo, że $J = 1$. Zatem

$$\tau^*_{ij} = \sigma^*_{ij} + \sigma_{ij}\,d_{kk}, \tag{2.22}$$

mimo że $\tau_{ij} = \sigma_{ij}$.

Możemy teraz, zgodnie z [7], przyjąć następujące związki Prandtla–Reussa, ugólnione na zakres dużych deformacji sprężysto-plastycznych:

$$\tau^*_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left[\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} - \alpha\,\frac{3\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}\left(\dfrac{E}{1+\nu}\right)}{2\bar{\sigma}^2\left(\dfrac{2}{3}h + \dfrac{E}{1+\nu}\right)}\right] d_{kl}, \tag{2.23}$$

gdzie $\alpha = 1$ przy obciążeniu plastycznym $\alpha = 0$ przy obciążeniu sprężystym lub dowolnym odciążeniu E jest modułem Younga, ν współczynnikiem Poissona, h nachyleniem krzywej wiążącej naprężenie Cauchy'ego z logarytmiczną miarą odkształceń plastycznych w jednoosiowej próbie rozciągania, δ_{ij} jest symbolem Kroneckera. Ponadto przez

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}, \\ \bar{\sigma}^2 &= \frac{3}{2}\,\sigma'_{ij}\,\sigma'_{ij} \end{aligned} \tag{2.24}$$

oznaczono dewiator tensora Cauchy'ego i jego intensywność.

Użycie wielkości τ^*_{ij} zamiast σ^*_{ij} w równaniach (2.23) podyktowane zostało potrzebą korzystania ze sprzężonych miar prędkości naprężenia i odkształcenia w sensie wprowadzonym przez Hilla [8]. Takimi miarami są τ^*_{ij} oraz d_{kl}, ponieważ [7] istnieje dla nich potencjał skalarny $U(d_{ij})$ taki, że

$$\tau^*_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial d_{ij}\, \partial d_{kl}} d_{kl} = \mathscr{C}_{ijkl}\, d_{kl}, \tag{2.25}$$

z następującym operatorem konstytutywnym:

$$\mathscr{C}_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu}\left[\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} - \alpha\,\frac{3\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}\left(\frac{E}{1+\nu}\right)}{2\bar{\sigma}^2\left(\frac{2}{3}h + \frac{E}{1+\nu}\right)}\right], \tag{2.26}$$

symetrycznym ze względu na zmianę par wskaźników ij oraz kl.

Kolejny etap naszych rozważań, to transformacja związku (2.23) do uaktualnionego opisu Lagrange'a.

Do równania (2.22) podstawiamy

$$\sigma^*_{ij} = \sigma^{\nabla}_{ij} + \sigma_{ik}\, d_{kj} + \sigma_{jk}\, d_{ki} - \sigma_{ij}\, d_{kk}, \tag{2.27}$$

gdzie σ^{∇}_{ij} oznacza pochodną Truesdella naprężenia Cauchy'ego [9], zdefiniowaną wzorem

$$\sigma^{\nabla}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik}\, v_{j,k} - \sigma_{jk}\, v_{i,k} + \sigma_{ij}\, d_{kk}. \tag{2.28}$$

Dalej, korzystając ze związku

$$\sigma^{\nabla}_{ij} = \det{}^{-1}[x_{p,q}]\, x_{i,K}\, x_{j,L}\, \dot{S}_{KL}, \tag{2.29}$$

mamy

$$\dot{S}_{KL} = \det[x_{P,Q}]\, X_{K,i}\, X_{j,L}\, X_{M,r}\, [\mathscr{C}_{ijrs}\, X_{N,s} - (\sigma_{ir}\, X_{N,j} + \sigma_{jr}\, X_{N,i})]\, \dot{E}_{MN}, \tag{2.30}$$

gdzie

$$\sigma_{ij} = \det{}^{-1}[x_{p,q}]\, x_{i,K}\, x_{j,L}\, S_{KL}. \tag{2.31}$$

Wyrażenie $\sigma_{ir}\, X_{N,j} + \sigma_{jr}\, X_{N,i}$ po prawej stronie wzoru (2.30) opisuje wpływ lokalnego obrotu cząstki ciała na zmianę operatora konstytutywnego. Jeżeli mamy do czynienia z małymi odkształceniami, to wyrażenie to ma postać: $\sigma_{ir}\,\delta_{Nj} + \sigma_{jr}\,\delta_{Ni}$. W zakresie sprężystym można je pominąć jako małe w porównaniu z wyrażeniem $\mathscr{C}_{ijrs}\,\delta_{Ns}$. Nie można tego uczynić w przypadku małych deformacji sprężysto-plastycznych, ponieważ składowe $\mathscr{C}_{ijrs}\,\delta_{Ns}$ przy niewielkim wzmocnieniu materiału mogą być tego samego rzędu co $\sigma_{ir}\,\delta_{Nj} + \sigma_{jr}\,\delta_{Ni}$. Zjawisko wpływu lokalnego obrotu cząstek na zmianę operatora konstytutywnego dla małych deformacji sprężysto-plastycznych można było przedstawić tylko w ramach opisu dużych odkształceń.

Ograniczając rozważania do zakresu małych deformacji, utożsamimy tensory $\dot{S}_{IJ}$, $\dot{E}_{IJ}$ z tensorami $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, używając wyłącznie małych liter łacińskich jako indeksów.

Równania (2.30) przyjmą wtedy postać

(2.32) $$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl},$$

w którym

(2.33) $$C_{ijkl} = \mathscr{C}_{ijkl} - \alpha(\sigma_{iK}\delta_{jl} + \sigma_{jk}\delta_{jl}).$$

3. Przyrostowy związek konstytutywny materiału o charakterystyce nieliniowej dla dużych przyrostów czasu

Dotychczasowe rozważania doprowadziły nas do przyrostowego równania bilansu energii (2.17) oraz różniczkowego równania konstytutywnego (2.32). Kolejnym zadaniem jest zastąpienie związku

(3.1) $$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathscr{C}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

związkiem postaci

(3.2) $$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathscr{K}\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon},$$

w którym przyrosty $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ pozostają małe, ale odpowiadają dowolnie dużym przyrostem czasu Δt. O operatorze $\mathscr{C}$ założymy tylko to, że

(3.3) $$\mathscr{C} = \mathscr{C}(\boldsymbol{\sigma}), \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t).$$

Przyjmiemy, że siły zewnętrzne działające na ciało zależą od pewnego parametru obciążenia γ, który zmienia się monotonicznie w czasie Δt: rośnie lub maleje. W zakresie małych deformacji oznacza to monotoniczną zmianę pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń. Wtedy to wszystkie składowe wektora przemieszczenia oraz tensora odkształcenia zmieniają się proporcjonalnie. Biorąc to pod uwagę oraz pamiętając, że ograniczyliśmy się do zagadnień quasi-statycznych, możemy wprowadzić założenie o liniowej zmienności pola przemieszczeń i pola odkształceń na kroku Δt:

(3.4) $$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{v}\Delta t, \qquad \Delta\boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}\Delta t,$$

gdzie $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x)$ oznacza stałe pole prędkości, a $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{v}^T)$ — stałe pole prędkości małych odkształceń.

Przyrost tensora naprężenia można formalnie pisać w postaci

(3.5) $$\Delta\sigma = \int_0^{\Delta t} \dot{\sigma}\,d\tau,$$

gdzie wielkość $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta t$ jest miarą czasu na kroku Δt.

Podstawiając do (3.5) równania (3.1) i (3.4) otrzymamy

(3.6) $$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathscr{K}\Delta\boldsymbol{\varepsilon},$$

gdzie operator konstytutywny $\mathscr{K}$ ma postać funkcjonału:

$$\mathscr{K} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \mathscr{C} d\tau, \qquad \mathscr{C} = \mathscr{C}(\boldsymbol{\sigma}), \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\tau) \tag{3.7}$$

Dla istnienia tego funkcjonału wystarcza, aby operator $\mathscr{C}$ był ograniczoną i odcinkami ciągłą funkcją czasu τ na kroku Δt. Dla materiałów sprężysto-plastycznych warunek ten jest spełniony.

Założymy teraz, że operator $\mathscr{C}$ jest ciągłą funkcją czasu w całym przedziale $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta t$. Przypadek ten dotyczy np. wyłącznie sprężystego lub wyłącznie uplastycznionego zachowania się materiału na kroku Δt. Przejście od stanu sprężystego do stanu uplastycznienia będzie rozpatrzone osobno.

Przyjmiemy teraz aproksymację pola $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\tau)$ wielomianami potęgowymi stopnia $N = 1, 2, 3, \ldots$. Jeśli $N = 1$, to otrzymamy powszechnie stosowaną liniową aproksymację pola naprężeń.

Postępowanie takie jest możliwe na mocy twierdzenia o aproksymacji funkcji $\Phi = \Phi(\tau)$ ciągłej w przedziale $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta t$ wielomianem potęgowym [10].

Wprowadzając oznaczenia

$$^{(N)}\Phi = \sum_{n=0}^{N} \Phi_n \tau^n, \qquad \Phi_n = \text{const}, \qquad ^{(N)}\Phi = {}^{(N)}\Phi(\tau), \tag{3.8}$$

gdzie Φ_n są współczynnikami wielomianu aproksymującego, mamy

$$\Phi = \lim_{N\to\infty} {}^{(N)}\Phi. \tag{3.9}$$

Powracając do równań (3.6) i (3.7) widzimy, że N-temu przybliżeniu pola naprężeń

$$\overset{(N)}{\Delta}\boldsymbol{\sigma} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\sigma}_n (\Delta t)^n, \qquad \boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}), \qquad \overset{(N)}{\Delta}\boldsymbol{\sigma} = \overset{(N)}{\Delta}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \Delta t), \tag{3.10}$$

odpowiada $(N—1)$-sze przybliżenie operatora

$$\overset{(N-1)}{\mathscr{C}} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathscr{C}_n \tau^n, \qquad \mathscr{C} = \mathscr{C}_n(\mathbf{x}), \qquad \overset{(N-1)}{\mathscr{C}} = \overset{(N-1)}{\mathscr{C}}(\mathbf{x}, \tau) \tag{3.11}$$

oraz 1-sze przybliżenie pola odkształceń

$$\overset{(1)}{\Delta}\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\Delta t, \qquad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}), \qquad \overset{(1)}{\Delta}\boldsymbol{\varepsilon} = \overset{(1)}{\Delta}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \Delta t). \tag{3.12}$$

Podstawiając (3.10) do (3.6) i (3.7), otrzymujemy

$$\overset{(N)}{\Delta}\boldsymbol{\sigma} = {}^{(N-1)}\mathscr{K}\, \overset{(1)}{\Delta}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{3.13}$$

gdzie

$$^{(N-1)}\mathscr{K} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \mathscr{C}_{n-1} (\Delta t)^{n-1}, \qquad ^{(N-1)}\mathscr{K} = {}^{(N-1)}\mathscr{K}(\mathbf{x}, \Delta t). \tag{3.14}$$

Wzór (3.13) wiąże N-te przybliżenie przyrostu naprężenia $\overset{(N)}{\Delta}\boldsymbol{\sigma}$ z przyrostem odkształcenia $\overset{(1)}{\Delta}\boldsymbol{\varepsilon}$.

Ponieważ obliczanie operatora $^{(N-1)}\mathscr{K}$ na podstawie wzoru (3.14) jest nieefektywne, przeto wzór ten napiszemy w postaci rekurencyjnej:

$$
\begin{aligned}
{}^{(0)}\mathscr{K} &= \mathscr{C}_0 = {}^{(0)}\mathscr{C} = \mathscr{C}_{|\tau=0}, \\
{}^{(1)}\mathscr{K} &= \mathscr{C}_0 + \frac{1}{2}\mathscr{C}_1 \cdot \Delta t = \frac{1}{2}\left[\mathscr{C} + (\mathscr{C}_0 + \mathscr{C}_1 \cdot \Delta t)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left({}^{(0)}\mathscr{K} + {}^{(1)}\mathscr{C}_{|\tau=\Delta t}\right),
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

....

$$
{}^{(N-1)}\mathscr{K} = \frac{1}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-2} {}^{(n)}\mathscr{K} + {}^{(N-1)}\mathscr{C}_{|\tau=\Delta t}\right).
$$

Okazuje się, że kolejne przybliżenie operatora $\mathscr{K}$ jest średnią arytmetyczną wszystkich jego poprzednich przybliżeń i wartości aktualnego przybliżenia operatora $\mathscr{C}$ na końcu kroku Δt. Ostatecznie algorytm obliczania wielkości $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ wygląda następująco.

1) Jako ${}^{(0)}\mathscr{K}$ przyjmujemy znaną wartość operatora $\mathscr{C}$ na początku kroku obliczeniowego, co pozwala na obliczenie $\overset{(N)}{\Delta\boldsymbol{\sigma}}$ zgodnie z (3.13).

2) Podstawiając $\overset{(1)}{\Delta\boldsymbol{\sigma}}$ do (3.3) otrzymamy wielkość ${}^{\langle 1\rangle}\mathscr{C}_{|\tau=\Delta t}$ różniącą się od ${}^{(1)}\mathscr{C}_{|\tau=\Delta t}$ wyrażeniem zawierającym wyrazy nieliniowe względem Δt. Zaniedbując tę różnicę możemy znaleźć ${}^{(1)}\mathscr{K}$, a nastęunie $\overset{(2)}{\Delta\boldsymbol{\sigma}}$.

3) Podobnie, znajdując $\overset{(N)}{\Delta\boldsymbol{\sigma}}$, obliczamy ${}^{\langle N\rangle}\mathscr{C}_{|\tau=\Delta t}$ różniące się od ${}^{(N)}\mathscr{C}_{|\tau=\Delta t}$ o wyrazy zawierające potęgi Δt stopnia wyższego niż N.

Przyjmując założenie

$$
{}^{\langle N\rangle}\mathscr{C}_{|\tau=\Delta t} = {}^{(n)}\mathscr{C}_{|\tau=\Delta t},
\tag{3.16}
$$

obliczamy wartość operatora ${}^{(N)}\mathscr{K}$. Obliczenia zatrzymujemy, jeżeli różnica pomiędzy $\overset{(N)}{\Delta\boldsymbol{\sigma}}$ a $\overset{(N-1)}{\Delta}\boldsymbol{\sigma}$ jest odpowiednio mała.

W przypadku materiałów sprężysto-plastycznych istotne jest zagadnienie przejścia od stanu sprężystego do sprężysto-plastycznego. Wprowadzamy liczbę $0 < r < 1$ taką, że cząstka ciała w czasie $0 \leqslant \tau < r\,\Delta t$ pozostaje w strefie sprężystej, a w czasie $r\,\Delta t \leqslant \tau \leqslant \Delta t$ znajduje się w strefie uplastycznionej.

Opierając się na wzorach (3.6) i (3.7) $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ rozkładamy na część sprężystą i sprężysto-plastyczną:

$$
\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\boldsymbol{\sigma}^e + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{ep},
\tag{3.17}
$$

gdzie

$$
\Delta\boldsymbol{\sigma}^e = \left(\frac{1}{\Delta t}\int_0^{r\Delta t} \mathscr{C}\, d\tau\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = r\mathscr{C}_{|\alpha=0}\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon},
\tag{3.18}
$$

przy czym operator $\mathscr{C}$ określony jest za pomocą wzoru (2.26), natomiast

$$
\Delta\boldsymbol{\sigma}^{ep} = \left(\frac{1}{\Delta t}\int_{r\Delta t}^{\Delta t} \mathscr{C}\, d\tau\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathscr{K}_r\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}.
\tag{3.19}
$$

Wprowadzając we wzorze (3.19) zamiast τ zmienną,

$$\bar{\tau} = \frac{\tau - r \cdot \Delta t}{1-r}, \tag{3.20}$$

i stosując aproksymację

$$^{(N)}\underset{\sim}{\mathscr{C}} = \sum_{n=0}^{N} \underset{\sim}{\mathscr{C}}_n \bar{\tau}^n, \tag{3.21}$$

otrzymujemy

$$^{(N-1)}\underset{\sim}{\mathscr{K}}_r = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{\sim}{\mathscr{C}}_n (\Delta t)^{n-1}. \tag{3.22}$$

Powracając do zmiennej τ, wzór (3.22) można sprowadzić do następujących, efektywnych wzorów rekurencyjnych:

$$\begin{gathered} ^{(0)}\underset{\sim}{\mathscr{K}}_r = \underset{\sim}{\mathscr{C}}_{|\tau=r\Delta t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ^{(N-1)}\underset{\sim}{\mathscr{K}}_r = \frac{1}{N}\Big(\sum_{n=0}^{N-2} {}^{(n)}\underset{\sim}{\mathscr{K}} + {}^{(N-1)}\underset{\sim}{\mathscr{C}}_{|\tau=\Delta t}\Big). \end{gathered} \tag{3.23}$$

Widzimy więc, że operator $^{(N-1)}\underset{\sim}{\mathscr{K}}_r$ różni się od operatora $^{(N-1)}\underset{\sim}{\mathscr{K}}$ tym, że jako $^{(0)}\mathscr{K}_r$ przyjęto wartość operatora $\underset{\sim}{\mathscr{C}}$ w chwili uplastycznienia, a nie na początku kroku obliczeniowego Δt.

Sposób wyznaczania współczynnika r opisany został w pracy [11].

4. Równania metody elementów skończonych dla dużych przyrostów czasu

Równanie bilansu energii (2.17) oraz, opisana wyżej, procedura obliczania $\Delta\sigma$ umożliwiają sformułowanie równań metody elementów skończonych. Przyjmiemy zatem następującą aproksymację pola przemieszczeń:

$$\{\Delta u\} = [N]\,\{\delta\}, \tag{4.1}$$

gdzie $[N]$ oznacza macierz funkcji kształtu, a $\{\delta\}$ — wektor przemieszczeń węzłowych. Różniczkując względem czasu funkcję (4.1) otrzymujemy pole prędkości:

$$\{v\} = [N]\,\{\dot{\delta}\}, \tag{4.2}$$

takie że

$$\{\delta\} = \{\dot{\delta}\}\,\Delta t. \tag{4.3}$$

Pole odkształceń oraz pole prędkości odkształceń określone są wzorami

$$\begin{gathered} \{\Delta\varepsilon\} = [B]\,\{\delta\}, \\ \{\dot{\varepsilon}\} = [B]\,\{\dot{\delta}\}, \end{gathered} \tag{4.4}$$

gdzie $[B]$ oznacza macierz odkształceń.

Równanie (2.17) w notacji macierzowej ma postać

$$\int_{\Omega}\{\dot{\varepsilon}\}^T\{\Delta\sigma\}\,d\Omega=\int_{\Omega}\{v\}^T\{\Delta f\}\,d\Omega+\int_{\partial\Omega}\{v\}^T\{\Delta p\}\,d(\partial\Omega). \tag{4.5}$$

Podstawiając do (4.5) funkcje (4.2), (4.4) oraz uwzględniając związek

$$\{\Delta\sigma\}=[\mathscr{K}]\{\Delta\varepsilon\}, \tag{4.6}$$

gdzie $[\mathscr{K}]$ oznacza przyrostowy operator konstytutywny, otrzymujemy układ równań równowagi metody elementów skończonych:

$$\Big(\int_{\Omega}[B]^T[\mathscr{K}][B]\,d\Omega\Big)\{\delta\}=\int_{\Omega}[N]^T\{\Delta f\}\,d\Omega+\int_{\partial\Omega}[N]^T\{\Delta p\}\,d(\partial\Omega). \tag{4.7}$$

Ponieważ operator $[\mathscr{K}]$ dany jest poprzez wzory rekurencyjne (3.15) lub (3.23), układ równań (4.7) rozwiązujemy iteracyjnie:

$$\Big(\int_{\Omega}[B]^T[{}^{(N-1)}\mathscr{K}][B]\,d\Omega\Big)\{\overset{(N)}{\delta}\}=\int_{\Omega}[N]\{\Delta f\}\,d\Omega+\int_{\partial\Omega}[N]^T\{\Delta p\}\,d(\partial\Omega), \tag{4.8}$$

dla $N=1,2,3,\ldots$ tak długo, aż różnica pomiędzy $\{{}^{(N)}\delta\}$ oraz $\{{}^{(N-1)}\delta\}$ będzie odpowiednio mała.

5. Dokładność obliczeń

Ponieważ w metodzie elementów skończonych aproksymacja względem czasu przebiega niezależnie od aproksymacji względem zmiennych przestrzennych, więc dokładność opisanej wyżej procedury wystarczy zbadać dla zadań o jednorodnym rozkładzie pól.

Rozważmy pasmo płytowe obciążone na przeciwległych brzegach równomiernie rozłożonym obciążeniem p. Mamy do czynienia z płaskim stanem odkształcenia i jednorodnym rozkładem pola odkształceń $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \mathrm{o}\}$ i pola naprężeń $\{\sigma_x, \mathrm{o}, \frac{1}{2}\sigma_x\}$. Załóżmy, że pod wpływem obciążenia p_0 pasmo uległo uplastycznieniu. Jeżeli obciążenie przyrośnie o wielkość Δp w czasie $\mathrm{o}\leqslant\tau\leqslant\Delta t$, to pole naprężeń pozostanie jednorodne, ale będzie się zmieniać nieliniowo. Na podstawie wzorów (2.32), (2.33) i (2.26) mamy

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_x&=(\mathscr{C}_{xx}-2\sigma_x)\,\dot{\varepsilon}_x+\mathscr{C}_{xy}\,\dot{\varepsilon}_y,\\ \mathrm{o}&=\mathscr{C}_{yx}\,\dot{\varepsilon}_x+\mathscr{C}_{yy}\,\dot{\varepsilon}_y,\end{aligned} \tag{5.1}$$

gdzie

$$\mathscr{C}_{xx}=\mathscr{C}_{yy}=\bar{E}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\bar{E}}{\frac{2}{3}h+\bar{E}}\right),$$

$$\mathscr{C}_{xy}=\mathscr{C}_{yx}=\bar{E}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\bar{E}}{\frac{2}{3}h+\bar{E}}\right),$$

oraz

$$\bar{E} = \frac{E}{1+\nu}, \quad \dot{\varepsilon}_x = \frac{\delta_x}{a}, \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\delta_y}{b}, \tag{5.2}$$

a δ_x, δ_y oznaczają przyrost szerokości i grubości płyty, które w chwili $\tau = 0$ wynosiły odpowiednio a i b. Przyjęliśmy tu liniową zmienność pola odkształceń w czasie. Ścisłe rozwiązanie układu równań (5.1) daje

$$\sigma_x(\tau) = \frac{\mathscr{C}_{xx}^2 - \mathscr{C}_{xy}^2}{2\,\mathscr{C}_{xx}}\left(1 - e^{-2\frac{\delta_x}{a}\tau}\right) + p_0\, e^{-2\frac{\delta_x}{a}\tau}, \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} \delta_x &= -\frac{a}{2}\ln\left(\frac{\Delta p}{\sigma_0 - m} + 1\right), \quad \text{dla} \quad m = \frac{\mathscr{C}_{xx}^2 - \mathscr{C}_{xy}^2}{2\mathscr{C}_{xx}}, \\ \delta_y &= -\frac{\mathscr{C}_{xy}}{\mathscr{C}_{xx}}\,\delta_x. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Powyższe zadanie rozwiążemy teraz metodą elementów skończonych, stosując wprowadzoną przez nas procedurę. Ze względu na jednorodność pola odkształceń można wprowadzić tylko jeden element, w którym

$$\{\Delta u\} = [N]\begin{Bmatrix}\delta_x\\ \delta_y\end{Bmatrix}, \qquad [N] = \begin{bmatrix} \frac{x}{a}, & 0, \\ 0, & \frac{y}{b} \end{bmatrix},$$

$$\{\Delta\varepsilon\} = [B]\begin{Bmatrix}\delta_x\\ \delta_y\end{Bmatrix}, \qquad [B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{b} \end{bmatrix}, \tag{5.6}$$

$$[\mathscr{C}] = \begin{bmatrix} \mathscr{C}_{xx}, & \mathscr{C}_{xy} \\ \mathscr{C}_{xy}, & \mathscr{C}_{xx} \end{bmatrix} - (2p_0 + \Delta\sigma_x)\begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

Przyjęto następujące dane do obliczeń: $a/b = 1{,}0$, $\Delta p/p_0 = 0{,}1$, $E/p_0 = 1000{,}0$, $\nu = 0{,}25$, $h = 300{,}0$.
Korzystając ze wzorów (4.8) oraz (3.15) obliczono kolejne wartości ${}^{(N)}\delta_x/a$ oraz ${}^{(N)}\delta_y/b$ dla $N = 1, 2, 3$. Okazało się, że

$$\begin{aligned} \frac{{}^{(3)}\delta_x}{a} &= \frac{{}^{(2)}\delta_x}{a} = 2{,}7431663\cdot 10^{-3}, \\ \frac{{}^{(3)}\delta_y}{b} &= \frac{{}^{(2)}\delta_y}{b} = -2{,}6770659\cdot 10^{-3}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ścisłe rozwiązanie (5.4) daje wartości

$$\frac{\delta_x}{a} = 2{,}7432111 \cdot 10^{-3},$$
$$\frac{\delta_y}{b} = -2{,}6771095 \cdot 10^{-3}. \tag{5.8}$$

Błąd względny w tym przypadku wynosi $1{,}63 \cdot 10^{-5}$.

Literatura cytowana w tekście

1. O. C. Zienkiewicz, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
2. J. R. Rice, D. M. Tracey, *Computational facture mechanics*, in: Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, S. J. Fenves *et al.* (Eds), Academic Press, New York 1973.
3. M. Kleiber, *PLADEP — Statyczna analiza dużych deformacji sprężysto-plastycznych w płaskim stanie naprężenia. Opis programu i instrukcja użytkowania*, Prace IPPT, 48, 1977.
4. Y. C. Fung, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
5. J. T. Oden, *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw Hill, New York 1972.
6. H. D. Hibbit, P. V. Marcal, J. R. Rice, *A finite element formulation for problems of large strain and large displacement*, Int. J. Solids Struc., 6, 1069—1086, 1970.
7. R. M. McMeeking, J. R. Rice, *Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformations*, Int. J. Solids Struc., **11**, 601—616, 1975.
8. R. Hill, *Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time*, J. Mech. Phys. Solids.9.
9. W. Prager, *Introduction to mechanics of continua*, Ginn., 1961.
10. A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1971.
11. Y. Yamada, N. Yoshimura, T. Sakurai, *Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method*, Int. J. Mech. Sci., **10**, 343—354, 1968.

Резюме

ТЕХНИКА БОЛЬШИХ ПРИРОСТОВ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Предложен способ расчета упруго-пластических задач методом конечных элементов, допускающим принятие больших приростов времени. Принимая согласно Мак Микингу и Райсу [7] соотношения Прандтля-Рейсса, обобщенные на случай больших деформаций, преобразованы они к лагранжевому описанию, а затем специфицированы для малых деформаций. Это дало возможность учета влияния локального вращения частиц на изменение определяющего оператора, существенного также в этом последнем случае.

Выведенные по этому пути определяющее уравнение в приростах предполагает линейную переменность во времени полей перемещений и деформаций, но допускает произвольную переменность поля напряжений. Предполагая, что поле напряжений, как функция времени, является многочленом степени $n = 1, 2, 2, \ldots$ получаем интерационным путем очередные приближения определяющего оператора. Для $n = 1$ имеем стандартный, линейный подход в приростах. Для $n = 2$ определяющая матрица является средним арифметическим матрицы в начале и в конце расчетного шага. Этот последний случай совпадает с предлагаемыми раньше видами определяющей матрицы [2 и 3].

SUMMARY

LARGE INCREMENTS TECHNIQUE IN THE ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS

The method of solution of elastic-plastic problems is proposed, based on the application of finite elements and taking into account large time increments. Following the paper by McMeeking and Rice [7], the Prandtl–Reuss relations generalized to finite deformations are transformed to the Lagrange description, and then specified to the case of small deformations. It makes it possible to take into account the effect of local particle rotations on the constitutive operator. The incremental constitutive equation derived in this manner assumes linear time-dependence of the displacement and deformation fields, the stress field variations being arbitrary. By assuming the stress field to be the n-the degree polynomial, $n = 1, 2, 3 \ldots$, the iteration method yields the consecutive approximations of the constitutive operator. Case $n = 1$ represents the standard incremental approach. With $n = 2$, the constitutive matrix is an aritmetic mean of the matrices at the beginning and end of the program step. The latter case coincides with constitutive matrix forms proposed before [2 and 3].

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 kwietnia 1982 r.