

DRGANIA TARCZ WYWOŁANE SIŁĄ RUCHOMĄ

TADEUSZ B O R O W I C Z i MACIEJ M A L E C (KIELCE)

Przedstawiono algorytm wynikający z analizy nieustalonych drgań izotropowych tarcz prostokątnych, poddanych działaniu siły ruchomej. Algorytm oparto na metodzie elementów skończonych. W analizie zastosowano element prostokątny o ośmiu współrzędnych uogólnionych. Opierając się na algorytmie zrealizowano program obliczeń na komputer w języku ALGOL 1900 o nazwie TARCZA. Przy użyciu programu wykonano liczne realizacje obliczeniowe na maszynie Odra 1305. Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresach.

1. WSTĘP

Problematyka nieustalonych drgań konstrukcji wywołanych przez obciążenia ruchome stanowi jedno z ciekawszych zagadnień dynamiki budowli. Szybki rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej oraz nowoczesnych metod rozwiązywania stwarza możliwość analizowania pracy konstrukcji o dużym stopniu złożoności, która może być następstwem sposobu usytuowania konstrukcji w przestrzeni lub też może być związana z koniecznością zastosowania w opisie dużej liczby współrzędnych.

Metoda elementów skończonych stosowana coraz powszechniej, także do rozwiązywania problemów dynamicznych, w przypadku prostych zagadnień, np. drgania belek, ram i płyt, wymaga opisu zawierającego kilkanaście do kilkudziesięciu współrzędnych [1, 2, 3]. Przy tej ilości współrzędnych algorytmizacja rozwiązań może być przeprowadzona w sposób konwencjonalny, bez stosowania specjalnych zabiegów polegających na oszczędnym gospodarowaniu pamięcią operacyjną komputera lub stosowania pamięci zewnętrznych.

W pracy podjęto próbę rozwiązania problemu, dla którego zastosowanie metody elementów skończonych prowadzi, w szczególności przy użyciu najprostszych elementów, do opisu zawierającego znaczne ilości współrzędnych. Jako obiekt przyjęto izotropową tarczę prostokątną, poddaną działaniu ruchomej siły skupionej.

Doświadczenia i wnioski otrzymane w pracy nad powyższym zagadnieniem stanowią podstawę do podjęcia problematyki drgań nieustalonych, przy opisie zawierającym duże liczby stopni swobody (rzędu kilkuset).

2. OPIS ALGORYTMU

Podstawą rozwiązań jest element prostokątny o ośmiu współrzędnych, stanowiących liniowe przemieszczenia jego węzłów (rys. 1).

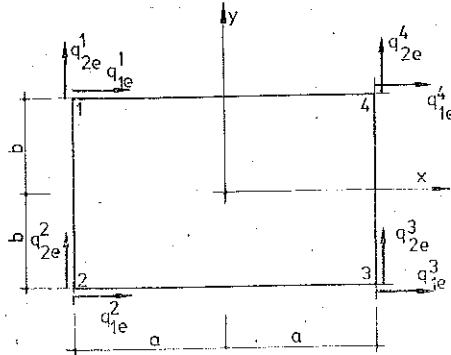
Funkcję przemieszczeń elementu przyjęto w postaci

$$(2.1) \quad \vec{f}(x, y, t) = \begin{bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{bmatrix}$$

Przemieszczenia węzłów elementu można przedstawić za pomocą funkcji u i v wzorami następującymi:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} q_{1e}^1(t) &= u(-a, b, t), & q_{2e}^1(t) &= v(-a, b, t), \\ q_{1e}^2(t) &= u(-a, -b, t), & q_{2e}^2(t) &= v(-a, -b, t), \\ q_{1e}^3(t) &= u(a, -b, t), & q_{2e}^3(t) &= v(a, -b, t), \\ q_{1e}^4(t) &= u(a, b, t), & q_{2e}^4(t) &= v(a, b, t), \end{aligned}$$

gdzie symbole q_{ie}^j oznaczają uogólnione przemieszczenia węzłów elementu.



Rys. 1

Po wprowadzeniu zmiany zmiennych geometrycznych określonych za pomocą wzorów

$$(2.3) \quad \xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad \xi, \eta \in [-1, 1],$$

funkcję przemieszczeń elementu przedstawiono w postaci

$$(2.4) \quad f(\xi, \eta, t) = N(\xi, \eta) \bar{q}_e(t) = \bar{q}_e^T(t) N^T(\xi, \eta),$$

gdzie

$$(2.5) \quad \bar{q}_e = [q_{1e}^1, q_{2e}^1, q_{1e}^2, q_{2e}^2, q_{1e}^3, q_{2e}^3, q_{1e}^4, q_{2e}^4]^T$$

oznacza wektor przemieszczeń węzłowych elementu oraz

$$(2.6) \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{15}, n_{16}, n_{17}, n_{18} \\ n_{21}, n_{22}, n_{23}, n_{24}, n_{25}, n_{26}, n_{27}, n_{28} \end{bmatrix}$$

funkcję kształtu elementu. Symbolem $[\]^T$ oznaczono transpozycję macierzy.

Macierzowa funkcja $N(\xi, \eta)$ ma elementy następujące:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} n_{11} &= n_{22} = (1 - \xi)(1 + \eta)/4, \\ n_{13} &= n_{24} = (1 - \xi)(1 - \eta)/4, \\ n_{15} &= n_{26} = (1 + \xi)(1 - \eta)/4, \\ n_{17} &= n_{28} = (1 + \xi)(1 + \eta)/4, \\ n_{12} &= n_{14} = n_{16} = n_{18} = n_{21} = n_{23} = n_{25} = n_{27} = 0. \end{aligned}$$

Wektor odkształceń elementu ma postać

$$(2.8) \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{1}{b} \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \\ \frac{1}{b} \frac{\partial N_1}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} \bar{q}_e = H \bar{q}_e.$$

Wektor naprężeń elementu ma postać

$$(2.9) \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = D \bar{\varepsilon},$$

gdzie D oznacza macierz sprężystości.

Dla płaskiego stanu naprężenia oraz przy założeniu izotropowości materiału mamy [4]

$$(2.10) \quad D = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} = Et D^*,$$

gdzie E oznacza moduł Younga, ν współczynnik Poissona oraz t grubość tarczy.

Równanie równowagi dynamicznej elementu ma postać [2]

$$(2.11) \quad \bar{F}_e = B_e \frac{d^2 \bar{q}_e}{dt^2} + R_e \frac{d\bar{q}_e}{dt} + K_e \bar{q}_e - \bar{F}_e^0,$$

gdzie wprowadzone zostały następujące oznaczenia:

wektor sił węzłowych elementu (rys. 2)

$$(2.12) \quad \bar{F}_e = [F_{1e}^1, F_{2e}^1, F_{1e}^2, F_{2e}^2, F_{1e}^3, F_{2e}^3, F_{1e}^4, F_{2e}^4]^T,$$

wektor równoważników obciążenia zewnętrznego

$$(2.13) \quad \bar{F}_e^0 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b N^T \bar{p}(x, y, t) dx dy,$$

macierz bezwładności elementu

$$(2.14) \quad B_e = mab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T N d\xi d\eta,$$

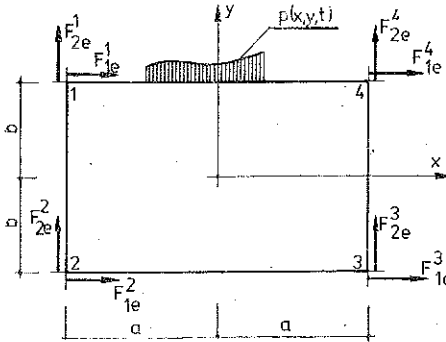
macierz sztywności elementu

$$(2.15) \quad K_e = Et \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H^T D^* H d\xi d\eta,$$

macierz tłumienia elementu [2],

$$(2.16) \quad R_e = rK_e.$$

W powyższych wzorach m oznacza masę rozłożoną elementu, a \bar{p} jest wektorem obciążenia zewnętrznego.



Rys. 2

W przypadku obciążenia elementu pionową siłą skupioną P , poruszającą się po górnej krawędzi elementu ze stałą prędkością v , mamy

$$(2.17) \quad \bar{p}(x, y, t) = \begin{bmatrix} P_x(x, y, t) \\ P_y(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P\delta(x+a-vt)\delta(y-b) \end{bmatrix},$$

gdzie $\delta(\)$ oznacza funkcję delta Diraca.

Uwzględnienie zmiany zmiennych (2.3) prowadzi do wzoru

$$(2.18) \quad \bar{F}_e^0 = -PN_2^T(\xi t - 1, 1),$$

gdzie

$$\xi t = vt/a, \quad 0 \leq \xi t \leq 2.$$

Z własności funkcji N_2 wynika szczegółowa postać wektora równoważników obciążenia zewnętrznego:

$$(2.19) \quad \bar{F}_e^0 = -\frac{P}{2} [0, 2 - \xi t, 0, 0, 0, 0, 0, \xi t]^T = -\frac{P}{2} \bar{S}.$$

Wielkości fizyczne problemu przedstawiono za pomocą wielkości: długości tarczy l_0 , masy tarczy M_0 , sztywności tarczy Et_0 (grubości tarczy t_0).

Po wprowadzeniu bezwymiarowych przemieszczeń i sił węzłowych określonych wzorami

$$(2.20) \quad \bar{q}_e^* = \bar{q}_e/l_0, \quad \bar{F}_e^* = \bar{F}_e/Et_0 l_0$$

oraz przy oznaczeniach

$$(2.21) \quad \begin{aligned} T_0 &= \sqrt{M_0/Et_0}, & t &= \tau T_0, & a &= \alpha l_0, & b &= \beta l_0, \\ m &= \mu M_0/l_0^2, & Et &= \varepsilon Et_0, & v &= \sigma l_0/T_0, \\ r &= \rho T_0, & P &= \gamma Et_0 l_0, & \xi t &= \sigma \tau / \alpha, \end{aligned}$$

otrzymujemy bezwymiarowe równanie równowagi dynamicznej elementu postaci

$$(2.22) \quad \bar{F}_e^* = B_e^* \ddot{q}^* + R_e^* \dot{q}_e^* + K_e^* \bar{q}_e^* - \bar{F}_e^{0*},$$

gdzie

$$B_e^* = \mu \alpha \beta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T N d\xi d\eta,$$

$$(2.23) \quad K_e^* = \varepsilon \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H^T D^* H d\xi d\eta,$$

$$R_e^* = \rho K_e^*, \quad \bar{F}_e^{0*} = -\frac{\gamma}{2} \bar{S}.$$

Symbiolem (\cdot) oznaczono różniczkowanie względem zmiennej τ .

Z postulatu równowagi sił węzłowych elementów w poszczególnych węzłach otrzymujemy równania ruchu struktury postaci

$$(2.24) \quad B_s \ddot{q}_s + R_s \dot{q}_s + K_s \bar{q}_s = \bar{F}_s^0,$$

które są układem równań różniczkowych zwyczajnych, drugiego rzędu o stałych współczynnikach.

Układ (2.24) całkujemy numerycznie przy zastosowaniu wariantu SPK metody stałego przyspieszenia [5] z wykorzystaniem zerowych warunków początkowych

$$(2.25) \quad \bar{q}_s(0) = 0 \text{ i } \dot{\bar{q}}_s(0) = 0.$$

3. ANALIZA NUMERYCZNA

Opierając się na rozważaniach z p. 2 zrealizowano program w języku ALGOL 1900 o nazwie TARCZA, w którym przyjęto następujące założenia organizacyjne:

a) tarcza dzielona jest na jednakowe elementy, których liczba określona jest iloczynem $N1 \times N2$, gdzie $N1$ oznacza liczbę elementów w poziomie, $N2$ liczbę elementów w pionie;

b) wymiary tarczy określają wielkości: długość l_0 oraz wysokość $h = \chi l_0$ (parametr wysokości χ można specyfikować dowolnie);

c) dowolnie można specyfikować parametry charakterystyczne: tłumienie ρ , prędkość σ , obciążenia γ oraz współczynnik Poissona ν ;

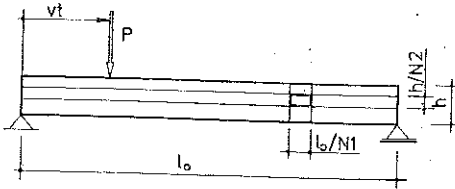
d) obliczenia można wykonywać dla dowolnej liczby kroków całkowania równań ruchu struktury;

e) przyjęto stałą grubość tarczy, w wyniku czego otrzymano $\varepsilon = 1$ i $\mu = 1$;

f) wyniki obliczeń drukowane są w tablicach zawierających przemieszczenia węzłów struktury oraz siły węzłowe poszczególnych elementów.

Przy użyciu programu wykonano liczne realizacje obliczeniowe. Wyniki niektórych z nich przedstawione są w niniejszej pracy.

Przykład 1. Rozważono belkę swobodnie podpartą (rys. 3). Na wstępie dokonano oszacowań rozwiązań statycznych dla siły skupionej działającej w środku rozpiętości. Dla $\gamma=1$, $\chi=0,1$ i $\nu=0$ otrzymano przemieszczenia środka belki zawarte w tabelicy 1.



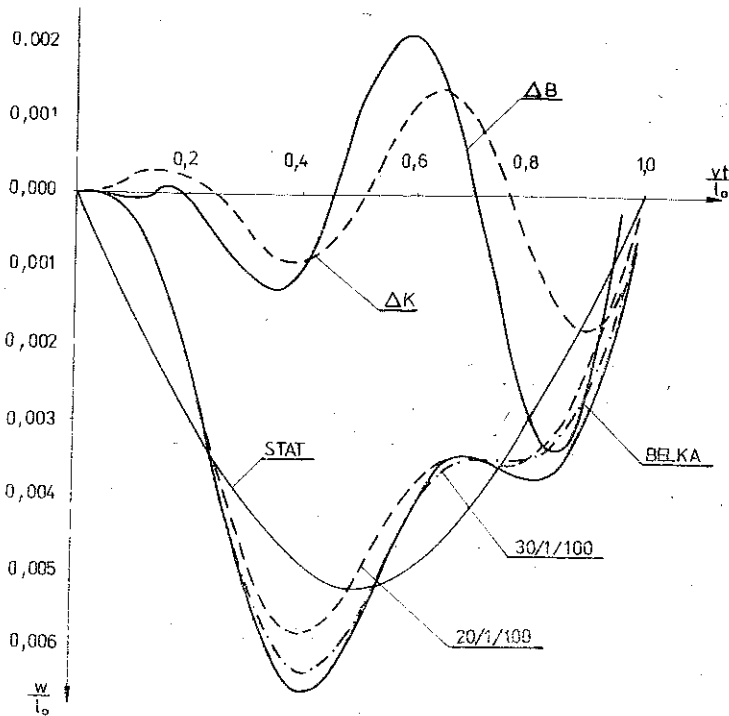
Rys. 3

Tabela 1

N1	N2	w_s/l_0
20	1	217,2
30	1	242,7
40	1	248,4
40	2	249,2
60	2	252,2
80	2	255,1

Dokładny wynik bez uwzględnienia wpływu sił poprzecznych jest równy $250 l_0$, a z ich uwzględnieniem $256 l_0$. Dla podziału 40×1 wyniki różnią się nieznacznie od wartości dokładnych (0,6% lub 3%). W analizie dynamicznej ten podział może być uznany za wystarczający.

Na rys. 4 przedstawiono przebiegi dynamiczne przemieszczenia środka belki dla podziałów: 20×1 , 30×1 i 40×1 . Wyniki uzyskano przy 100 krokach całkowania.



Rys. 4

Rozwiązanie dla podziału 40×1 porównano z wynikami uzyskanymi przy użyciu programu ANDBMES [6] dla danych:

$$(3.1) \quad P=0,25 EJ_0/l_0^2, \quad v=0,8 \sqrt{EJ_0/m_0^b/l_0}, \quad \rho=0,$$

gdzie EJ_0 oznacza sztywność giętą belki, l_0 długość belki, m_0^b masę rozłożoną belki. Dla $\chi=0,1$ mamy

$$(3.2) \quad J_0=t_0 l_0^3/12000 \text{ oraz } m_0^b=M_0/l_0,$$

co prowadzi do następujących wartości parametrów obciążenia i prędkości:

$$(3.3) \quad \gamma=0,000021, \quad \sigma=0,00728.$$

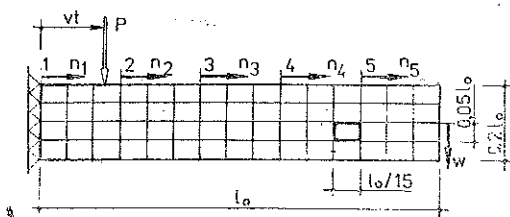
Krzywa oznaczona symbolem ΔB przedstawia różnice przebiegów belki i tarczy powiększone 10 razy.

Przeprowadzono również analizę wpływu liczby kroków całkowania na przebieg rozwiązania. Krzywa ΔK przedstawia różnice przebiegów dla 200 i 100 kroków przy podziale 30×1 powiększone 10 razy. W przypadku różnicy ΔB największe odchylenie rozwiązań wynosi $0,00034 l_0$, co w odniesieniu do maksymalnej wartości przebiegu równej $0,0065 l_0$ daje różnicę względną ok. 5%. Można więc przyjąć, że z praktycznego punktu widzenia rozwiązania te są zgodne, czyli podział na elementy jest wystarczający.

Z analizy różnicy ΔK można wyprowadzić wniosek, że całkowanie przy 100 krokach jest wystarczająco dokładne z praktycznego punktu widzenia. Wszystkie wyniki przedstawione są na tle rozwiązania statycznego (krzywa STAT), które jest statyczną linią wpływową przemieszczenia środka belki.

Tablica 2

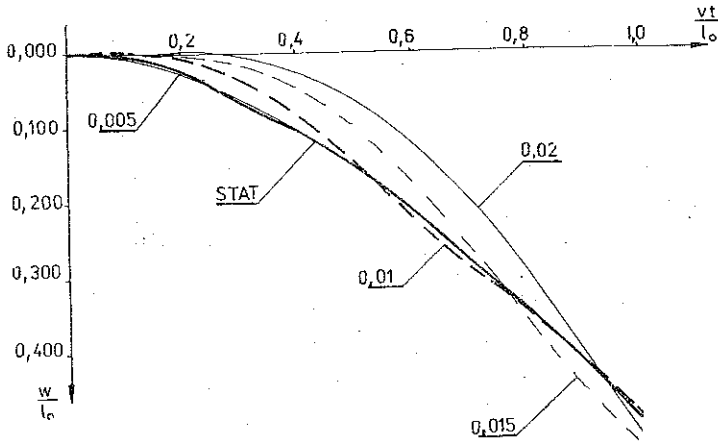
N1	N2	w/l ₀
15	4	489
20	4	499
25	4	504
30	4	506
40	4	509
50	4	510



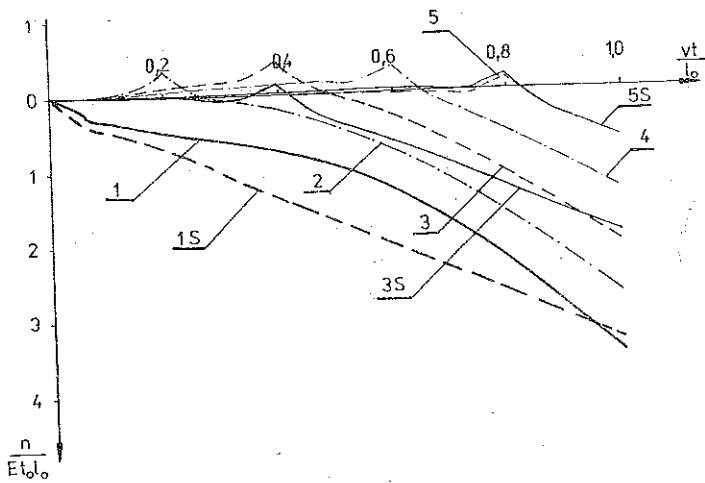
Rys. 5.

Przykład 2. Rozważono belkę wspornikową (rys. 5). Tak samo jak w przykładzie 1 dokonano na wstępie oszacowania rozwiązania statycznego dla siły przyłożonej na końcu wspornika. Dla $\gamma=1$, $\chi=0,2$ i $\nu=0$ otrzymano przemieszczenie końca wspornika zawarte w tablicy 2.

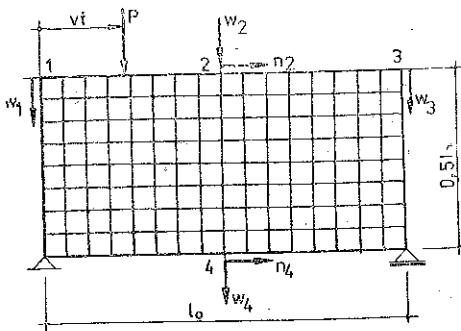
Dokładny wynik bez uwzględnienia wpływu sił poprzecznych jest równy $500 l_0$, a z ich uwzględnieniem $512 l_0$. Dla podziału 15×4 wyniki nieznacznie różnią się od wyników dokładnych (2% lub 4%). W rozwiązaniach dynamicznych przyjęto więc taki podział na elementy. Na rys. 6 przedstawiono wykresy dynamiczne przemieszczenia końca wspornika dla różnych wartości parametru prędkości $\sigma=0,005, 0,010,$



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Tablica 3

$N1$	$N2$	w_2/l_0
12	8	6,58
14	8	6,78
16	8	6,94
18	8	7,06
20	8	7,16

0,015 i 0,020. Wyniki uzyskano dla 50 kroków całkowania przy przyjęciu $\rho=0,01$ i $\gamma=1$. Krzywa STAT przedstawia przebieg statyczny. Na rys. 7 przedstawiono przebiegi dynamiczne napięć w węzłach 1, 2, 3, 4, 5, uzyskane dla $\sigma=0,02$. Dla węzłów 1, 3, 5, przedstawiono również wykresy statyczne.

Na zakończenie omawiania tego artykułu podamy wartości parametru prędkości i obciążenia dla tarczy o wymiarach $5 \times 1 \times 0,2$ m, wykonanej z żelbetu $q=2,4$ T/m³, $E=2 \cdot 10^6$ T/m², poddanej działaniu siły $P=10$ T poruszającej się z prędkością $v=10$ m/s:

$$M_0 = 5 \cdot 1 \cdot 0,2 \cdot 2,4/10 = 0,24 \text{ Ts}^2/\text{m},$$

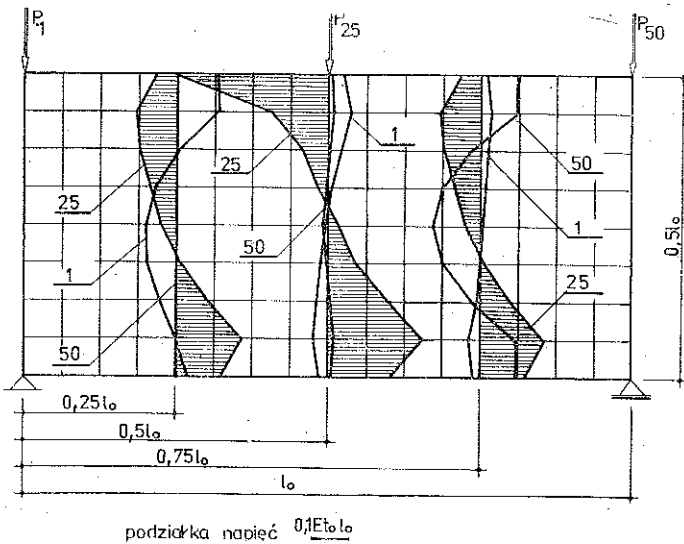
$$Et_0 = 2 \cdot 10^6 \cdot 0,2 = 4 \cdot 10^5 \text{ T/m},$$

$$T_0 = 0,24/4 \cdot 10^{-5} = 0,775 \cdot 10^{-3} \text{ s},$$

$$\sigma = vT_0/l_0 = 10 \cdot 0,775 \cdot 10^{-3}/5 = 0,00155,$$

$$\gamma = P/Et_0 l_0 = 10/4 \cdot 10^5 \cdot 5 = 0,5 \cdot 10^{-5}.$$

Przyjęte w rozważaniach wartości σ odpowiadają prędkościom 30—130 m/s.

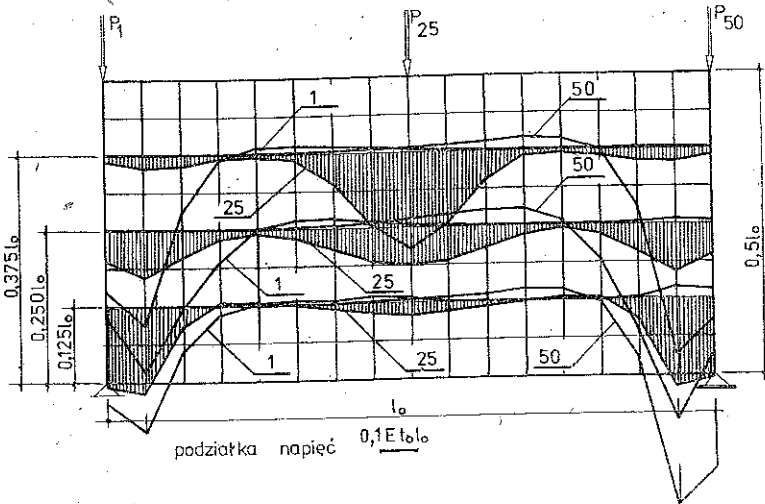


Rys. 9

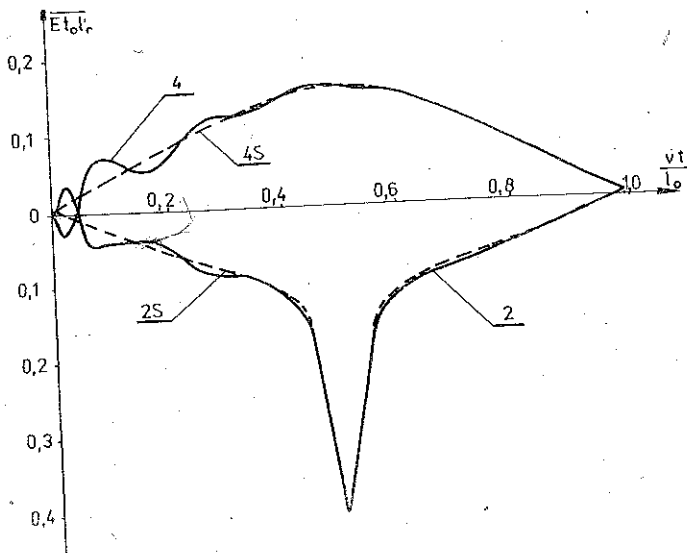
Przykład 3. Rozważano tarczę swobodnie podpartą (rys. 8), obciążoną siłą poruszającą się po jej górnej krawędzi. Oszacowanie statyczne dla pionowego przemieszczenia punktu 2, przy obciążeniu siłą działającą w tym punkcie, przedstawia tablica 3.

W rozwiązaniu dynamicznym przyjęto podział 16×8 . Obliczenia wykonano dla $\sigma=0,1$, $\nu=0,167$, $\rho=0,01$ i $\gamma=1$, przy 50 krokach całkowania równań ruchu. Na rys. 9 przedstawiono wykresy poziomych napięć w przekrojach pionowych $0,25 l_0$, $0,5 l_0$ i $0,75 l_0$ uzyskane po 1, 25 i 50 krokach. Na rys. 10 przedstawiono wykresy

pionowych napięć w przekrojach poziomych $0,125 l_0$, $0,25 l_0$ i $0,375 l_0$ uzyskane dla chwil jak poprzednio. Na rys. 11 przedstawiono wykresy dynamiczne poziomych napięć w punktach 2 i 4. Krzywe oznaczone literą S stanowią przebiegi statyczne.



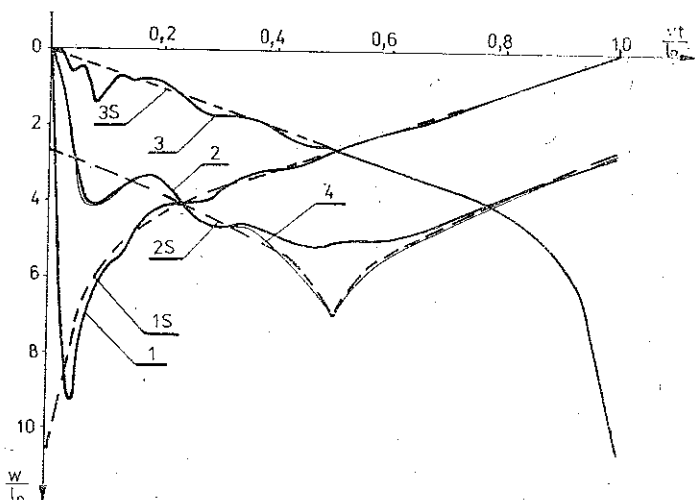
Rys. 10



Rys. 11

Na rys. 12 przedstawiono wykresy dynamiczne pionowych przemieszczeń punktów 1, 2, 3 i 4 na tle rozwiązań statycznych. Symetria wykresów z rys. 9 i 10 oraz wykresy 11 i 12 wskazują, że dla przyjętych parametrów prędkości i tłumienia efekty dynamiczne są znikome i zaznaczają się jedynie w początkowej fazie trwania zjawiska.

Wszystkie obliczenia wykonane zostały w Ośrodku Informatyki Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach na maszynie ODRA 1305 z pamięcią operacyjną 64 k. Czasy obliczeń dla poszczególnych realizacji były następujące: przykład 1 (40 el) — 10 s/krok, przykład 2: (60 el) — 20 s/krok, przykład 3: (128 el) — 60 s/krok.



Rys. 12

4. WNIOSKI

Przeprowadzone rozważania i wykonane realizacje obliczeniowe w pełni potwierdziły przydatność metody elementów skończonych do analizy nieustalonych drgań tarcz, poddanych działaniu ruchomej siły. Rozważany problem wymaga jednak, szczególnie przy zastosowaniu elementów niskiego rzędu, stosunkowo dużych pamięci operacyjnych maszyn cyfrowych. Konwencjonalne podejście do całkowania równań ruchu struktury, oparte na macierzy odwrotnej [5], stosowane przy rozwiązaniu struktur o małej liczbie stopni swobody [2 i 3] pozwoliło na rozwiązywanie zagadnień do 150 stopni swobody przy pamięci 64 k. Wykonano więc podejście wymagające rozwiązania układu równań algebraicznych w kolejnym kroku całkowania. Dodatkowe oszczędności uzyskano decydując się na generowanie macierzy globalnej w kolejnych krokach. W efekcie uzyskano możliwość rozwiązywania struktur do 600 stopni swobody.

Oddzielny problem stanowi czasochłonność obliczeń, związana głównie z koniecznością rozwiązywania układu równań algebraicznych w kolejnych krokach całkowania. Oszczędności w tym zakresie można by uzyskać przez zastosowanie specjalnych zabiegów dotyczących organizacji obliczeń wewnątrz procedury rozwiązywania równań algebraicznych do napisania tej procedury w języku wewnętrznym włącznie.

Zmniejszenie czasów obliczeń lub zwiększenie możliwości programu można też uzyskać przez zastosowanie elementów wyższego rzędu. Próby takie zostaną podjęte w przyszłości.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. M. YOSHIDA, W. WEAWER Jr, *Finite element analysis of beams and plates with moving loads*, Memoires, 31 I, 1971.
2. T. BOROWICZ, *Wyteżenie belek pod obciążeniem ruchomym*, Arch. Inż. Łąd., 24, 2, 219-235, 1978.
3. T. BOROWICZ, *Efekty dynamiczne w ustrojach belkowych przy działaniu ruchomych obciążeń rozłożonych*, Arch. Inż. Łąd., 24, 3, 317-326, 1978.
4. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
5. T. BOROWICZ, *Ocena niektórych metod numerycznego całkowania dynamicznych równań równowagi struktur dyskretnych*, Arch. Inż. Łąd., 23, 4, 497-509, 1977.
6. T. BOROWICZ, *Zastosowanie metody elementów skończonych w analizie drgań belek, wywołanych obciążeniami ruchomymi*, Kom. 20/76 Inst. Inż. Łąd. Pol. Wrocł., Wrocław 1976 [rozprawa doktorska].

Резюме

КОЛЕБАНИЯ ДИСКОВ ВЫЗВАННЫЕ ПОДВИЖНОЙ СИСОЙ

В работе представлен алгоритм, служащий для анализа колебаний дисков, вызванных подвижной нагрузкой. Этот алгоритм опирается на метод конечных элементов, причем деформация единичного, прямоугольного элемента описывается при помощи восьми составляющих перемещений его ребер. Согласно этому алгоритму приготовлена программа TARCZA, написанная на языке Алгол 1900, и она применена для расчетов на вычислительной цифровой машине Одра 1305. Некоторые из результатов иллюстрированы графиками.

SUMMARY

PLATE VIBRATIONS PRODUCED BY A MOVING FORCE

The paper presents an algorithm of analyzing the vibration of plates produced by a moving force. The algorithm is based on the finite element method, the deformation of each rectangular elements being represented by eight displacements of its corners. A program called TARCZA written in Algol 1900 is prepared and calculations are performed on The Odra 1305 computer. The results are illustrated by graphs.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 maja 1978 r.