ROZPRAWY INŻYNIERSKIE ENGINEERING TRANSACTIONS 27, 3, 463–482, 1979
Polska Akademia Nauk Instytut Podstawowych Problemów Techniki

DRGANIA LOSOWE PRĘTA BĘDĄCEGO ELEMENTEM PEWNEGO UKŁADU HYBRYDOWEGO

MAREK PIETRZAKOWSKI (WARSZAWA)

W pracy przedstawiono statystyczną analizę drgań prostego układu hybrydowego pod działaniem losowego wymuszenia kinematycznego. Badany układ złożony jest z pręta podpartego na brzegach na dyskretnych elementach lepkosprężystych. Wymuszenie stanowią pionowe i kątowe przemieszczenia podpór będące stacjonarnymi procesami losowymi drugiego rzędu. Stosując analizę korelacyjną wyznaczono czasowo-przestrzenne funkcje korelacji losowego pola przemieszczeń i sił wewnętrznych dla procesów zginania i skręcania pręta oraz odpowiadające im wariancje. Wyniki przykładu liczbowego zilustrowano wykresami.

1. Wstęp

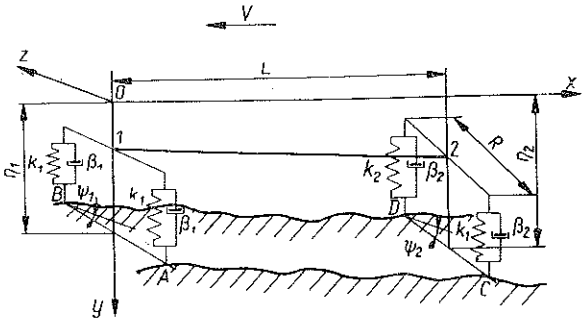
Wzrastające zadania transportu drogowego związane z ilością i różnorodnością przewożonych ładunków spowodowały powstanie wielu typów pojazdów specjalnych. Wśród nich dość liczną grupę stanowią przyczepy niskopodłogowe i naczepy kontenerowe. Budowa doskonalszych pod względem funkcjonalnym i konstrukcyjnie nowocześniejszych a tym samym bardziej ekonomicznych środków transportowych, wymaga od konstruktora znajomości wszystkich zjawisk związanych z ich eksploatacją.

Jedną z istotniejszych informacji jest stan odkształcenia i obciążenia poszczególnych elementów konstrukcji będący skutkiem oddziaływań statycznych oraz związanych z ruchem pojazdu obciążeń dynamicznych. Zmienne obciążenia towarzyszące jeździe po nierównościach drogi wywołują drgania elementów pojazdu i przewożonego ładunku. Naturalną konsekwencją jest zmęczenie materiału prowadzące często do zniszczenia konstrukcji. Zjawisko to jest bardziej niebezpieczne dla pojazdów o dużym rozstawie osi lub w przypadku smukłych elementów konstrukcji przewożonych na zestawach jezdnych. Do przeprowadzenia analizy dynamicznej takich pojazdów nie wystarczają modele dyskretne, niezbędne jest stworzenie schematu dynamicznego zawierającego elementy ciągłe. Modele takie noszą nazwę dynamicznych układów hybrydowych.

Biorąc pod uwagę losowy charakter mikroprofilu drogi, jako źródła zaburzeń towarzyszących ruchowi pojazdu, konieczne jest zastosowanie metod teorii prawdopodobieństwa do analizy dynamicznej układu. Pewną próbą rozwiązania problemu jest niniejsza praca.

2. Opis układu

Badany układ (rys. 1) stanowi pryzmatyczny, jednorodny, lepkosprężysty pręt o masie M, podparty na dwóch podporach modelujących zestawy jezdne. Podpory te składają się z równolegle połączonych, za pomocą nieskończenie sztywnego i nieważkiego pręta, dyskretnych elementów lepkosprężystych. Węzły 1 i 2 łączące pręt z podporami ograniczają stopnie swobody do obrotu w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez oś pręta.



Rys. 1. Schemat obliczeniowy układu.

Ruch układu wymuszają przemieszczenia podpór: pionowe $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ i kątowe $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, które zgodnie ze stosowanym matematycznym modelem nierówności drogi są stacjonarnymi procesami losowymi drugiego rzędu o znanej funkcji korelacji. W celu uproszczenia analizy przyjęto, że dopuszczalne jest określenie pionowych przemieszczeń węzłów podporowych przy założeniu nieskończonej sztywności pręta i redukowaniu masy do środka ciężkości, a kątów obrotu skrajnych przekrojów pręta przy warunku redukcji osiowego, masowego momentu bezwładności układu do końców pręta.

Przyjęto następujące oznaczenia:
0, x, y, z bezwładnościowy układ odniesienia, η_1, η_2 współrzędne pionowe określone wzorami

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(y_A + y_B), \qquad \eta_2 = \frac{1}{2}(y_C + y_D),$$

w których y_A, y_C, y_C, y_D oznaczają współrzędne pionowe punktów styku kół z drogą, ψ_1, ψ_2 kąty określające przewyższenie prawego koła nad lewym, L długość pręta, R rozstaw kół pojazdu, v prędkość jazdy, k_1, k_2 współczynniki sprężystości podpór, β_1, β_2 współczynniki tłumienia.

3. Drgania poprzeczne

Uwzględniając tłumienie w materiale pręta za pomocą modelu Voigta, otrzymano następujące równanie drgań poprzecznych w bezwładnościowym układzie 0, x, y, z:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ\left[\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t}\right] = 0, \tag{3.1}$$

gdzie μ oznacza masę pręta na jednostkę długości, E moduł Younga materiału pręta, J geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta, α współczynnik określający wewnętrzne tłumienie.

Rozwiązanie równania (3.1) spełnia zerowe warunki początkowe oraz zakładając, że znane są przemieszczenia węzłów 1 i 2, następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} &y(0,t)=y_{,1}(t), \qquad \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0, \\ &y(L,t)=y_2(t), \qquad \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

W celu sprowadzenia równania (3.1) do jednorodnych warunków brzegowych podstawiono

$$y(x,t)=\left(1-\frac{x}{L}\right)y_1(t)+\frac{x}{L}y_2(t)+u(x,t). \tag{3.3}$$

Po uporządkowaniu otrzymano równanie niejednorodne z zerowymi warunkami początkowymi i brzegowymi, gdzie wymuszenie jest funkcją losową czasu i przestrzeni, przy czym w czasie jest to stacjonarny proces losowy:

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+EJ\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\alpha\frac{\partial^5 u}{\partial x^4\,\partial t}\right]=\mu\left[\left(1-\frac{x}{L}\right)\ddot{y}_1(t)+\frac{x}{L}\ddot{y}_2(t)\right]. \tag{3.4}$$

Rozwiązanie równania (3.4) jest szeregiem według układu funkcji własnych:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(t)\,U_n(x). \tag{3.5}$$

Funkcje własne $U_n(x)$ dla przypadku swobodnego podparcia belki mają postać

$$U_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.6}$$

Podstawiając do równania (3.4) funkcje (3.5) i (3.6) oraz dokonując ortonormalizacji względem funkcji własnych układu, na podstawie warunku ortogonalności funkcji własnych

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx=\frac{L}{2}\delta_{nm},$$

gdzie δ_{nm} jest symbolem Kroneckera, otrzymano układ n równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\ddot{\xi}_n(t)+\alpha\Omega_n^2\dot{\xi}_n(t)+\Omega_n^2\xi_n(t)=A_{1n}\ddot{y}_1(t)+A_{2n}\ddot{y}_2(t), \qquad n=1,2,3,\ldots, \tag{3.7}$$

W układzie równań (3.7) przyjęto oznaczenia

$$\Omega_n^2 = \frac{EJ}{\mu}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4,$$

$$A_{1n} = -\frac{2}{L^2}\int_0^L \left(1-\frac{x}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = -\frac{2}{n\pi},$$

$$A_{2n} = -\frac{2}{L^2}\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{n\pi}(-1)^n.$$

W wyniku transformacji Fouriera równania (3.7) oraz wykorzystując ogólne rozwiązanie w postaci (3.5), wyznaczono wektor przepustowości widmowej badanego układu:

$$\mathbf{H}_u(x,\omega) = [H_{u1}(x,\omega), \quad H_{u2}(x,\omega)]. \tag{3.8}$$

Składowe wektora $H_u(x,\omega)$ są przepustowościami widmowymi przy niezależnie występujących przemieszczeniach węzłów 1 i 2 pręta:

$$H_{u1}(x,\omega) = \frac{u_1(x,\omega)}{\ddot{y}_1(\omega)} = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi x}{L}}{n(\Omega_n^2-\omega^2+i\alpha\Omega_n^2\,\omega)},$$

$$H_{u2}(x,\omega) = \frac{u_2(x,\omega)}{\ddot{y}_2(\omega)} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\dfrac{n\pi x}{L}}{n(\Omega_n^2-\omega^2+i\alpha\Omega_n^2\,\omega)}.$$

Zakładając, że przemieszczenia $y_1(t)$ i $y_2(t)$ są stacjonarnymi procesami losowymi drugiego rzędu, na podstawie korelacyjnej teorii funkcji losowych, można określić gęstość widmową czasowo -przestrzennego pola losowego $u(x,t)$:

$$S_u(x_1,x_2,\omega) = \overline{\mathbf{H}_u(x_1,\omega)}\,\mathbf{S}_{\ddot{y}}(\omega)\,\mathbf{H}_u(x_2,\omega)^T, \tag{3.9}$$

gdzie $\overline{\mathbf{H}_u(x,\omega)}$ oznacza wektor o elementach zespolonych, sprzężonych z $\mathbf{H}_u(x,\omega)$, $\mathbf{H}_u(x,\omega)^T$ wektor transponowany oraz $\mathbf{S}_{\ddot{y}}(\omega)$ kwadratową macierz widmową losowych funkcji $\ddot{y}_1(t)$, $\ddot{y}_2(t)$.

Gęstość widmowa $S_u(x_1,x_2,\omega)$ jest wielkością skalarową i dla skorelowanych procesów $y_1(t)$ i $y_2(t)$ ma postać

$$\begin{aligned} S_u(x_1,x_2,\omega) = {} & \overline{H_{u1}(x_1,\omega)}\,H_{u1}(x_2,\omega)\,S_{\ddot{y}11} + \overline{H_{u2}(x_1,\omega)}\,H_{u1}(x_2,\omega)\,S_{\ddot{y}21} + \\ & + \overline{H_{u1}(x_1,\omega)}\,H_{u2}(x_2,\omega)\,S_{\ddot{y}12} + \overline{H_{u2}(x_1,\omega)}\,H_{u2}(x_2,\omega)\,S_{\ddot{y}22}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Wykorzystując podany przez Wienera i Chinczyna związek między funkcją korelacji $K(\tau)$, a gęstością widmową $S(\omega)$

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega,$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau,$$

można wyznaczyć czasowo-przestrzenną funkcję korelacji losowego pola ugięć,

$$K_u(x_1, x_2, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(x_1, x_2, \omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega, \tag{3.11}$$

pod warunkiem, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_u(x_1, x_2, \omega)\, d\omega < \infty .$$

Uwzględniając (3.10) i (3.8) po elementarnych przekształceniach otrzymano następującą postać czasowo-przestrzennej funkcji korelacji:

$$K_u(x_1, x_2, \tau) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{nm} \sin\frac{n\pi x_1}{L} \sin\frac{m\pi x_2}{L} \int_{-\infty}^{\infty} S_{nm}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \tag{3.12}$$

Przyjmując w wyrażeniu (3.12) $\tau = 0$ oraz $x_1 = x_2 = x$ wyznaczono wariancję losowego pola ugięć:

$$\sigma_u^2(x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{nm} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \int_{-\infty}^{\infty} S_{nm}(\omega)\, d\omega . \tag{3.13}$$

We wzorach (3.12) i (3.13) występuje funkcja

$$S_{nm}(\omega) = \frac{S_{y11}^{\cdot\cdot} - (-1)^m S_{y12}^{\cdot\cdot} - (-1)^n S_{y21}^{\cdot\cdot} + (-1)^{n+m} S_{y22}^{\cdot\cdot}}{(\Omega_n^2 - \omega^2 - i\alpha\,\Omega_n^2\,\omega)(\Omega_m^2 - \omega^2 + i\alpha\Omega_m^2\,\omega)} .$$

W podobny sposób, jak statystyczne parametry losowego pola odkształceń pręta, można otrzymać czasowo-przestrzenną funkcję korelacji losowego pola sił wewnętrznych, tzn. momentów gnących i sił tnących będących skutkiem działającego wymuszenia. Zakładając, że w zginanym pręcie o wytężeniu materiału decydują naprężenia normalne, na podstawie znanej z teorii zginania różniczkowej zależności

$$M(x) = -EJ\frac{d^2 u(x)}{dx^2}$$

wyznaczono wektor przepustowości widmowej dla pola momentów gnących:

$$\mathbf{H}_M(x, \omega) = [H_{M1}(x, \omega), \quad H_{M2}(x, \omega)], \tag{3.14}$$

którego składowe są równe

$$H_{M1}(x, \omega) = -\frac{2EJ\pi}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin\dfrac{n\pi x}{L}}{\Omega_n^2 - \omega^2 + i\alpha\Omega_n^2\,\omega},$$

$$H_{M2}(x, \omega) = \frac{2EJ\pi}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n \sin\dfrac{n\pi x}{L}}{\Omega_n^2 - \omega^2 + i\alpha\,\Omega_n^2\omega}.$$

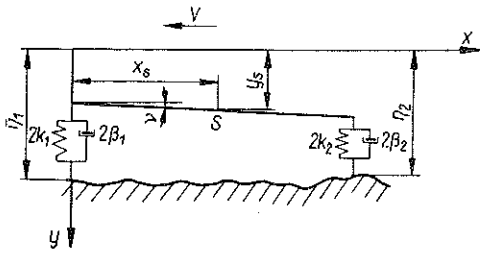
Czasowo-przestrzenną funkcję korelacji i wariancję losowego pola momentów gnących określają następujące wzory:

$$(3.15)\quad K_M(x_1, x_2, \tau)=\left(\frac{2EJ\pi}{L^2}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} nm \sin\frac{n\pi x_1}{L}\sin\frac{m\pi x_2}{L}\times \int_{-\infty}^{\infty} S_{nm}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega.$$

oraz

$$(3.16)\quad \sigma_M^2(x)=\left(\frac{2EJ\pi}{L^2}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} nm \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\int_{-\infty}^{\infty} S_{nm}(\omega)\, d\omega.$$

Aby skorzystać ze wzorów obliczeniowych (3.12), (3.13) oraz (3.15), (3.16), niezbędna jest znajomość macierzy gęstości widmowych procesów przyspieszeń końców pręta. Macierz tę można wyznaczyć, mierząc w czasie reakcje zestawów jezdnych na rozpatrywany element ramy lub transportowany przedmiot, a następnie wyznaczając gęstości widmowe pomierzonych procesów. Dokonanie takich pomiarów nie jest jednak zawsze możliwe.



Rys. 2. Schemat obliczeniowy przy założeniu nieskończonej sztywności pręta.

W pracy, dla określenia macierzy $S_{\ddot{y}}(\omega)$, założono podobnie jak w [4], że pręt jest ciałem sztywnym poruszającym się w płaszczyźnie pionowej w wyniku działania sił $F_1(t)$ i $F_2(t)$ będących reakcjami elementów modelujących zestawy jezdne (rys. 2).

Równania ruchu pręta mają postać

$$(3.17)\quad \begin{aligned} M\ddot{y}_s &= F_1(t)+F_2(t),\\ J_z\ddot{\nu} &= -F_1(t)\,x_s+F_2(t)(L-x_s), \end{aligned}$$

gdzie x_s, y_s oznaczają współrzędne środka ciężkości, ν kąt obrotu pręta w płaszczyźnie zginania, F_1, F_2 reakcje podpór, M masę pręta, J_z masowy moment bezwładności względem osi centralnej, prostopadłej do płaszczyzny zginania.

Uwzględniając następujące zależności

$$y_s = y_1\left(1-\frac{x_s}{L}\right)+y_2\frac{x_s}{L},$$

$$\nu=\frac{y_2-y_1}{L},$$

$$F_1(t)=2\{[\eta_1(t)-y_1(t)]\,k_1+[\dot{\eta}_1(t)-\dot{y}_1(t)]\,\beta_1\},$$

$$F_1(t)=2\{[\eta_2(t)-y_2(t)]\,k_2+[\dot{\eta}_2(t)-\dot{y}_2(t)]\,\beta_2\},$$

otrzymano układ równań opisujących pionowe przemieszczenia $y_1(t)$, $y_2(t)$ końców pręta:

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1+n_1\ddot{y}_2+2h_1\dot{y}_1+\omega_1^2 y_1=\omega_1^2\eta_1(t)+2h_1\dot{\eta}_1(t),\\ &\ddot{y}_2+n_2\ddot{y}_1+2h_2\dot{y}_2+\omega_2^2 y_2=\omega_2^2\eta_2(t)+2h_2\dot{\eta}_2(t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

przy oznaczeniach następujących:

$$2h_1=\frac{2\beta_1}{Mp_1},\qquad \omega_1^2=\frac{2k_1}{Mp_1},\qquad n_1=\frac{p_2}{p_1},$$

$$2h_2=\frac{2\beta_2}{Mp_3},\qquad \omega_2^2=\frac{2k_2}{Mp_3},\qquad n_2=\frac{p_2}{p_3},$$

$$p_1=\left[(L-x_s)^2+\frac{J_z}{M}\right]\frac{1}{L^2},\qquad p_2=\left[(L-x_s)x_s-\frac{J_z}{M}\right]\frac{1}{L^2},$$

$$p_3=\left(x_s^2+\frac{J_z}{M}\right)\frac{1}{L^2}.$$

Stosując przekształcenie Fouriera do układu równań (3.18) zbudowano macierz przepustowości widmowej:

$$\mathbf{H}(\omega)=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

której wyrazy wynoszą

$$H_{kl}(\omega)=\frac{n_k\omega^2(\omega_l^2+i2h_l\omega)}{D(\omega)}\qquad \text{dla}\quad k\neq l,$$

$$H_{kl}(\omega)=\frac{\omega_1^2\omega_2^2-\omega^2(\omega_k^2+4h_1h_2)+i2\omega[h_1\omega_2^2+h_2\omega_1^2-h_k\omega^2]}{D(\omega)}$$

$$\text{dla } k=l,\quad k,l=1,2,$$

przy oznaczeniu

$$D(\omega)=\omega^4(1-\eta_1\eta_2)-\omega^2(\omega_1^2+\omega_2^2+4h_1h_2)+\omega_1^2\omega_1^2+i2\omega[h_1\omega_2^2+h_2\omega_1^2-\omega^2(h_1+h_2)]$$

Poszukiwaną macierz gęstości widmowych procesów przyspieszeń końców pręta określa wzór

$$\mathbf{S}_y^{\cdot\cdot}(\omega)=\overline{\mathbf{H}(\omega)}\,\mathbf{S}_\eta^{\cdot\cdot}(\omega)\,\mathbf{H}(\omega)^T, \tag{3.20}$$

gdzie $S_\eta^{\cdot\cdot}(\omega)$ jest kwadratową macierzą gęstości widmowych drugich pochodnych procesów $\eta_1(t)$ i $\eta_2(t)$ stanowiących wymuszenie.

Ponieważ procesy $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ i ich pochodne różnią się przesunięciem w czasie o $T=L/v$, więc gęstości widmowe $S_{\eta 11}^{\cdot\cdot}$ i $S_{\eta 22}^{\cdot\cdot}$ są sobie równe:

$$S_{\eta_{11}}^{\cdot\cdot}=S_{\eta_{22}}^{\cdot\cdot}=S_\eta^{\cdot\cdot}(\omega), \tag{3.21}$$

a wzajemne gęstości funkcji wymuszających są wielkościami zespolonymi sprzężonymi:

$$S_{\eta 12}^{\cdot\cdot}(\omega)=e^{-i\omega T}S_\eta^{\cdot\cdot}(\omega)=\overline{S_{\eta 21}^{\cdot\cdot}(\omega)}. \tag{3.22}$$

Uwzględniając własności wymuszenia określone wzorami (3.21), (3.22) otrzymano macierz gęstości widmowych przyspieszeń końców pręta:

$$\mathbf{S}_y^{\cdot\cdot}(\omega)=S_\eta^{\cdot\cdot}(\omega)\begin{bmatrix}\bar{H}_1 H_1 & \bar{H}_1 H_2\\ \bar{H}_2 H_1 & \bar{H}_2 H_2\end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

w której dowolny wyraz

$$\bar{H}_k H_l=\bar{H}_{k1} H_{l1}+\bar{H}_{k2} H_{l1}\, e^{i\omega T}+\bar{H}_{k1} H_{l2}\, e^{-i\omega T}+\bar{H}_{k2} H_{l2}, \qquad k, l=1, 2.$$

Wyrazy $\bar{H}_k H_1$ macierzy $S_{lj}(\omega)$ obliczono na podstawie wzorów (3.19):

$$\bar{H}_1 H_1=\frac{1}{|D(\omega)|^2}\{4(h_1^2+n_1^2 h_2^2)\omega^6+[\omega_1^4+\omega_2^2(n_1^2\omega_2^2-8h_1^2)+16h_1^2 h_2^2]\omega^4+$$

$$+2[2h_1^2\omega_2^4+\omega_1^4(2h_2^2-\omega_2^2)]\omega^2+\omega_1^4\omega_2^4+4n_1[(h_1\omega_2^2-h_2\omega_1^2-4h_1 h_2^2)\omega^5-h_1\omega_2^4\omega^3]\times$$

$$\times\sin\omega^1-2n_1[4h_1 h_2\omega^6-\omega_1^2(4h_2^2-\omega_2^2)\omega^4-\omega_1^2\omega_2^4\omega^2]\cos\omega T\},$$

$$\bar{H}_2 H_2=\frac{1}{|D(\omega)|^2}\{4(h_2^2+n_2^2 h_1^2)\omega^6+[\omega_2^4+\omega_1^2(n_2^2\omega_1^2-8h_2^2)+16h_1^2 h_2^2]\omega^4+$$

$$+2[2h_2^2\omega_1^4+\omega_2^4(2h_1^2-\omega_1^2)]\omega^2+\omega_1^4\omega_2^4-4n_2[(h_2\omega_1^2-h_1\omega_2^2-4h_1^2 h_2)\omega^5-h_2\omega_1^4\omega^3]\times$$

$$\times\sin\omega T-2n_2[4h_1 h_2\omega^6-\omega_2^2(4h_1^2-\omega_1^2)\omega^4-\omega_1^4\omega_2^2\omega^2]\cos\omega T\},$$

$$\bar{H}_1 H_2=\frac{1}{|D(\omega)|^2}\{\omega^2 W(\omega)+2\omega^3 G(\omega)\sin\omega T+F(\omega)\cos\omega^1+$$

$$-i[2\omega^3 Z(\omega)+F_1(\omega)\sin\omega T-2\omega^3 G_1(\omega)\cos\omega T\}$$

$$\bar{H}_2 H_1=\overline{\bar{H}_1 H_2},$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$|D(\omega)|^2=[\omega^4(1-n_1 n_2)-\omega^2(\omega_1^2+\omega_2^2+4h_1 h_2)+\omega_1^2\omega_2^2]^2+$$

$$+4\omega^2[\omega^2(h_1+h_2)-h_1\omega_2^2-h_2\omega_1^2]^2,$$

$$F(\omega),\ F_1(\omega)=4h_1 h_2(1\pm n_1 n_2)\omega^6+[\omega_1^2\omega_2^2(1\pm n_1 n_2)+4(4h_1^2 h_2^2-h_1^2\omega_2^2-h_2^2\omega_1^2)]\times$$

$$\times\omega^4+(4h_1^2\omega_2^4+4h_2^2\omega_1^4-\omega_1^2\omega_2^4-\omega_1^4\omega_2^2)\omega^2+\omega_1^4\omega_2^4,$$

$$G(\omega),\ G_1(\omega)=[(1\pm n_1 n_2)(h_2\omega_1^2-h_1\omega_2^2)+4h_1 h_2(h_2-h_1)]\omega^2+h_1\omega_2^4-h_2\omega_1^4,$$

$$W(\omega)=-4\omega^4(n_1 h_2^2+n_2 h_1^2)+\omega^2(4n_1 h_2^2\omega_1^2+4n_2 h_1^2\omega_2^2-n_2\omega_1^4-n_1\omega_2^4)+$$

$$+\omega_1^2\omega_2^2(n_1\omega_2^2+n_2\omega_1^2),$$

$$Z(\omega)=4h_1 h_2(n_2 h_1-n_1 h_2)\omega^2-n_1 h_1\omega_2^4+n_2 h_2\omega_1^4$$

oraz gdzie $\overline{\bar{H}_1 H_2}$ oznacza wielkość zespoloną sprzężoną z $\bar{H}_1 H_2$.

Na podstawie wyników badań opublikowanych w pracach [5 i 6] funkcję korelacji wzdłużnego profilu drogi aproksymowano wyrażeniem

$$\mathbf{K}_\eta(\tau)=\sigma_\eta^2 e^{-\lambda|\tau|}\cos\delta\tau, \tag{3.24}$$

w którym λ, δ są współczynnikami o wartościach zależnych od charakteru nierówności i prędkości ruchu pojazdu; σ_η^2 oznacza tu wariancję pionowych nierówności drogi.

Tak przyjętej funkcji korelacji odpowiada następująca gęstość widmowa:

$$S_\eta(\omega)=\frac{\sigma_\eta^2\lambda}{\pi}\,\frac{b^2+\omega^2}{\omega^4+2a\omega^2+b^4}, \tag{3.25}$$

gdzie

$$b^2=\lambda^2+\delta^2, \qquad a=\lambda^2-\delta^2.$$

Mimo że wyrażenie aproksymujące $K_\eta(\tau)$ charakteryzuje nieróżniczkowalną funkcję losową, uzasadnione jest obliczenie gęstości widmowej reakcji układu, w danym przypadku losowego pola ugięć, momentów gnących i sił tnących, postępując formalnie tak, jakby gęstość widmowa procesu $\eta(t)$ odpowiadała funkcji losowej dwukrotnie różniczkowalnej. Warunkiem jest istnienie skończonej wariancji odpowiedzi układu przy wymuszaniu, którego gęstość widmowa na postać

$$S_{\ddot\eta}(\omega)=\omega^4 S_\eta(\omega).$$

Analiza całek występujących we wzorach (3.13), (3.16) po uwzględnieniu (3.23) dowodzi, że warunek ten w badanym przypadku jest spełniony.

Obliczenia wykonano dla następujących danych:

$$L=12\ [m], \qquad x_c=6\ [\mathrm{m}],$$

$$E=2{,}06\cdot 10^{11}\left[\frac{N}{m^2}\right], \qquad J_z=\frac{\mathrm{ML}^2}{12}=5616\ [\mathrm{kg\ m^2}],$$

$$J=5\cdot 10^{-5}\ [m^4], \qquad k_1=k_2=5\cdot 10^5\left[\frac{N}{m}\right],$$

$$A=5\cdot 10^{-3}\ [m^2],$$

$$\alpha=0.02\ [s], \qquad \beta_1=\beta_2=1{,}5\cdot 10^3\left[\frac{Ns}{m}\right],$$

$$\rho=7{,}8\cdot 10^3\left[\frac{\mathrm{kg}}{m^3}\right]; \qquad v=5\left[\frac{m}{s}\right], \qquad T=2{,}4\ [s].$$

Dane dotyczące nierówności drogi przyjęto na podstawie pracy [6]:

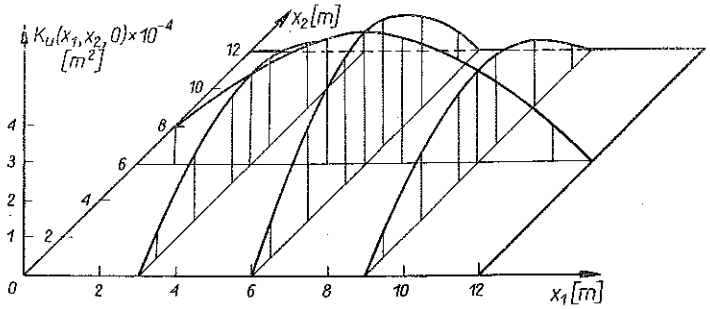
$$\sigma_\eta=0{,}05\ [m],$$

$$\lambda_1=0{,}21\left[\frac{1}{s}\right], \qquad \lambda=\lambda_1 v=1{,}05\left[\frac{1}{s}\right],$$

$$\delta_1=0{,}78\left[\frac{1}{s}\right], \qquad \delta=\delta_1 v=3{,}9\left[\frac{1}{s}\right].$$

Wyniki obliczeń zilustrowano wykresami.

Rys. 3 przedstawia czasowo-przestrzenną funkcję korelacji losowego pola ugięć pręta dla $\tau=0$, czyli wykres tzw. współczynnika korelacji procesów pionowych przemieszczeń dowolnych punktów osi pręta. Wykres funkcji $K_u(x_1, x_2, 0)$ ma cztery



Rys. 3. Współczynnik korelacji losowego pola ugięć.

płaszczyzny symetrii: $x_1=L/2$, $x_2=L/2$ oraz $x_1=x_2$, $x_1+x_2=L$. Wynikają stąd następujące własności współczynnika korelacji:

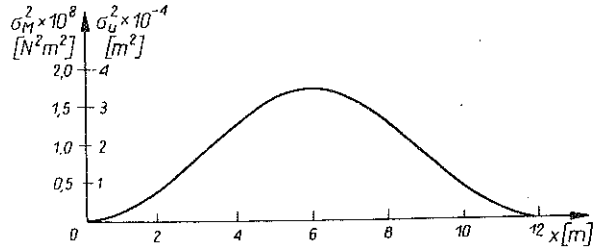
1) procesy określające przemieszczenia punktów osi pręta znajdujących się w takiej samej odległości od przekroju środkowego są jednakowo skorelowane;

2) jeżeli jeden z procesów określa ugięcia wybranego punktu osi pręta, to współczynnik korelacji ma największą wartość, w przypadku gdy drugi jest procesem przemieszczeń środka pręta;

3) maksymalna wartość współczynnika korelacji jest równa wariancji ugięć środka pręta;

4) wartość współczynnika korelacji jest równa zeru dla procesów, z których przynajmniej jeden określa przemieszczenia końców pręta, co wynika z przyjętej niezależności takich procesów;

5) przekroje płaszczyznami symetrii $x_1=x_2$ oraz $x_1+x_2=L$ dają obraz zmienności wariancji ugięć dowolnego punktu osi pręta.

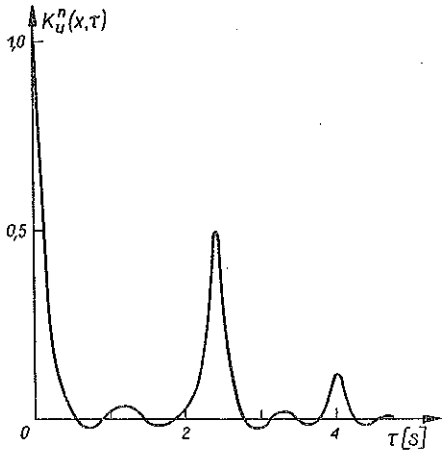


Rys. 4. Wariancja losowego pola ugięć i momentów gnących.

Przebieg współczynnika korelacji losowego pola momentów gnących $K_M(x_1, x_2, 0)$ ma te same cechy co omówiony wykres współczynnika korelacji ugięć. W przypadku gdy szeregi (3.8) i (3.16) są szybko zbieżne, co jest spełnione w badanym przykładzie, można przyjąć, że rzędne obu wykresów są proporcjonalne.

Na rys. 4 pokazano zmienność wariancji losowego pola ugięć i momentów gnących w zależności od współrzędnej x przekroju pręta.

Interesujący jest wykres unormowanej funkcji autokorelacji $K_u^n(x, \tau)$ wykonany dla środkowego przekroju pręta (rys. 5). Wykres ten wykazuje wyraźne maksimum po czasie τ równym przesunięciu T procesów $\eta_1(t)$ i $\eta_2(t)$ modelujących przyjęte



Rys. 5. Unormowana funkcja korelacji ugięć środkowego przekroju pręta.

wymuszenie kinematyczne. Oznacza to, że wartości realizacji badanego procesu (ugięcie lub moment gnący) w danej chwili wpływają na wartości jego realizacji po czasie T.

4. Drgania skrętne

Postępując podobnie jak w przypadku drgań poprzecznych, zbadano drgania skrętne pręta przy losowym wymuszeniu kinematycznym układu będącym matematycznym modelem poprzecznego profilu drogi.

Dla lepkosprężystego pręta opisanego modelem Voigta równania ruchu ma postać

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial t}\right] = 0, \tag{4.1}$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia: $\theta(x, t)$ przedstawia kąt obrotu przekroju pręta w bezwładnościowym układzie odniesienia, $c^2 = GJ_s/\rho J_0$, GJ_s sztywność skrętna pręta oraz ρJ_0 masowy moment bezwładności względem osi pręta przypadający na jednostkę długości.

Równanie (4.1) spełnia zerowe warunki początkowe oraz następujące warunki brzegowe:

$$\theta(0, t) = \theta_1(t), \quad \theta(L, t) = \theta_2(t). \tag{4.2}$$

Po podstawieniu do równania (4.1) i warunków (4.2) funkcji

$$\theta(x, t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\theta_1(t) + \frac{x}{L}\theta_2(t) + \varphi(x, t), \tag{4.3}$$

w której $\varphi(x, t)$ jest względnym kątem skręcenia przekroju, otrzymano równanie drgań skrętnych pręta przy zerowych warunkach początkowych i brzegowych.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t}\right] = -\left(1 - \frac{x}{L}\right)\ddot{\theta}_1(t) - \frac{x}{L}\ddot{\theta}_2(t). \tag{4.4}$$

Rozwiązanie równania (4.4) jest szeregiem według układu funkcji własnych,

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(t)\Phi_n(x). \tag{4.5}$$

Funkcje własne w przypadku swobodnego skręcania pręta mają postać

$$\Phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{4.6}$$

Podstawiając do równania (4.4) funkcje (4.5) i (4.6), a następnie dokonując ortonormalizacji względem funkcji własnych układu otrzymano następujące równanie dla n-tej współrzędnej głównej $\zeta_n(t)$:

$$\ddot{\zeta}_n(t) + \omega_n^2 \alpha \dot{\zeta}_n(t) + \omega_n^2 \zeta_n(t) = A_{1n}\ddot{\theta}_1(t) + A_{2n}\ddot{\theta}_2(t), \tag{4.7}$$

w którym

$$\omega_n^2 = c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

oraz A_{1n}, A_{2n} oznaczają współczynniki identyczne jak w równaniu (3.7). W celu przeprowadzenia analizy korelacyjnej, podobnie jak w przypadku drgań giętnych, wyznaczono wektor przepustowości widmowej układu:

$$H_\varphi(x, \omega) = [H_{\varphi 1}(x, \omega), H_{\varphi 2}(x, \omega)] \tag{4.8}$$

o składowych równych

$$H_{\varphi 1}(x, \omega) = \frac{\varphi_1(x, \omega)}{\ddot{\theta}_1(\omega)} = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{n\pi x}{L}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\alpha\omega_n^2\omega},$$

$$H_{\varphi 2}(x, \omega) = \frac{\varphi_2(x, \omega)}{\ddot{\theta}_2^2(\omega)} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\dfrac{n\pi x}{L}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\alpha\omega_n^2\omega},$$

a następnie gęstość widmową czasowo-przestrzennego pola losowego $\varphi(x, t)$ (losowość dotyczy czasu)

$$S_\varphi(x_1, x_2, \omega) = \overline{H_\varphi(x_1, \omega)}\, S_{\ddot{\theta}}(\omega)\, H_\varphi(x_2, \omega)^T, \tag{4.9}$$

gdzie $S_0^{\cdot\cdot}(\omega)$ jest kwadratową macierzą widmową dla sygnałów $\ddot{\theta}_1(t)$ i $\ddot{\theta}_2(t)$. Po wykonaniu wskazanych równaniem (4.9) działań i uwzględnieniu wzoru (4.8) otrzymano

$$(4.10)\qquad S_\varphi(x_1, x_2, \omega) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{nm} \sin\frac{n\pi x_1}{L} \sin\frac{m\pi x_2}{L} \frac{S_{\ddot{\theta}11}^{\cdot\cdot} - (-1)^m S_{\ddot{\theta}12}^{\cdot\cdot} - (-1)^n S_{\ddot{\theta}21}^{\cdot\cdot} + (-1)^{n+m} S_{\ddot{\theta}22}^{\cdot\cdot}}{(\omega_n^2 - \omega^2 - i\alpha\omega_n^2\omega)(\omega_m^2 - \omega^2 + i\alpha\omega_m^2\omega)}.$$

Ponieważ całkowity kąt skręcenia przekroju pręta jest równy

$$(4.11)\qquad \Phi(x, t) = [\theta_2(t) - \theta_1(t)]\frac{x}{L} + \varphi(x, t),$$

przeto gęstość widmowa $S_\Phi(x_1, x_2, \omega)$ losowego pola $\Phi(x, t)$ ma postać

$$(4.12)\qquad S_\Phi(x_1, x_2, \omega) = \frac{x_1 x_2}{L^2}[S_{\theta 11} + S_{\theta 22} - S_{\theta 12} - S_{\theta 21}] + S_\varphi(x_1, x_2, \omega) +$$

$$+ \frac{x_1}{L}[S_{\theta 2\varphi}(x_2, \omega) - S_{\theta 1\varphi}(x_2, \omega)] + \frac{x_2}{L}[S_{\varphi\theta_2}(x_1, \omega) - S_{\varphi\theta_1}(x_1, \omega)].$$

Wzajemną gęstość widmową $S_{\theta i\varphi}$ dowolnego procesu wymuszającego $\theta_i(t)$ i odpowiedzi układu $\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x, t)$ określono na podstawie [1] w następującej formie:

$$S_{\theta i\varphi}(x, \omega) = \sum_{j=1}^{m} H_j(x, \omega) S_{\theta ij}(\omega),$$

gdzie m jest sumą procesów wymuszających, $H_j(x, \omega)$ jest przepustowością widmową postaci

$$H_j(x, \omega) = \frac{\varphi_j(x, \omega)}{\theta_j(\omega)}$$

Dla rozważanego przykładu otrzymano

$$(4.13)\qquad \begin{aligned} S_{\theta 1\varphi}(x, \omega) &= -\omega^2[H_{\varphi 1}(x, \omega) S_{\theta 11} + H_{\varphi 2}(x, \omega) S_{\theta 12}], \\ S_{\theta 2\varphi}(x, \omega) &= -\omega^2[H_{\varphi 1}(x, \omega) S_{\theta 21} + H_{\varphi 2}(x, \omega) S_{\theta 22}], \\ S_{\varphi\theta 1}(x, \omega) &= \overline{S_{\theta 1\varphi}(x, \omega)}, \qquad S_{\varphi\theta 2}(x, \omega) = \overline{S_{\theta 2\varphi}(x, \omega)}. \end{aligned}$$

Korzystając z różniczkowej zależności między kątem skręcenia przekroju pręta, a momentem skręcającym, obliczono gęstość widmową losowego pola momentów skręcających:

$$(4.14)\qquad S_{\mathfrak{M}}(x_1, x_2, \omega) = (GJ_s)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} S_\Phi(x_1, x_2, \omega).$$

Uwzględniając (4.14) oraz (4.12) i (4.13) wyznaczono czasowo-przestrzenną funkcję korelacji $K_{\mathfrak{M}}(x_1, x_2, \tau)$ oraz wariancję $\sigma^2_{\mathfrak{M}}(x)$:

$$(4.15)\quad K_{\mathfrak{M}}(x_1, x_2, \tau) = \left(\frac{GJ_s}{L}\right)^2 \left\{ K_{(\theta_2-\theta_1)}(\tau) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x_1}{L} \cos\frac{m\pi x_2}{L} \times \right.$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} R_{nm}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\frac{n\pi x_1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R_n(\omega)}\, e^{i\omega\tau}\, d\omega + \right.$$
$$\left.\left. + \cos\frac{n\pi x_2}{L} \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega \right] \right\}$$

oraz

$$(4.16)\quad \sigma^2_{\mathfrak{M}}(x) = \left(\frac{GJ_s}{L}\right)^2 \left\{ \sigma^2_{(\theta_2-\theta_1)} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \int_{-\infty}^{\infty} R_{nm}(\omega)\, d\omega + \right.$$
$$\left. + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L} \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\omega)\, d\omega \right\},$$

gdzie

$$R_{nm}(\omega) = \frac{S''_{\theta 11} - (-1)^m S''_{\theta 12} - (-1)^n S''_{\theta 21} + (-1)^{n+m} S''_{\theta 22}}{(\omega_n^2 - \omega^2 + i\alpha\omega_n^2\,\omega)\,(\omega_m^2 - \omega^2 - i\alpha\omega_m^2\,\omega)},$$

$$R_n(\omega) = \frac{(-S_{\theta 11} - (-1)^n S_{\theta 22} + S_{\theta 21} + (-1)^n S_{\theta 12})\,\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\alpha\omega_n^2\,\omega},$$

$$\overline{R_n(\omega)} = \frac{(-S_{\theta 11} - (-1)^n S_{\theta 22} + S_{\theta 12} + (-1)^n S_{\theta 21})\,\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\alpha\omega_n^2\,\omega}$$

oraz gdzie

$$K_{(\theta_2-\theta_1)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (S_{\theta 11} + S_{\theta 22} - S_{\theta 12} - S_{\theta 21})\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

oznacza funkcję korelacji całkowitego kąta skręcenia pręta oraz $\sigma^2_{(\theta_2-\theta_1)}$ oznacza jego wariancję.

W celu określenia macierzy gęstości widmowych $S_\theta(\omega)$, podobnie jak dla zginania, przyjęto pewne uproszczenia. Założono, że uzasadnione jest dokonanie redukcji masowego momentu bezwładności układu względem osi pręta do jego skrajnych przekrojów.

Schemat obliczeniowy stosowany przy wyznaczeniu przemieszczeń kątowych $\theta_1(t)$ i $\theta_2(t)$ przedstawia rys. 6. Układ równań ruchu ma postać

$$(4.17)\quad J_1\ddot{\theta}_1 + \kappa(\theta_1 - \theta_2) = \mathfrak{M}_1(t), \qquad J_2\ddot{\theta}_2 + \kappa(\theta_2 - \theta_1) = \mathfrak{M}_2(t),$$

gdzie J_1, J_2 oznaczają zredukowane, osiowe momenty bezwładności układu, $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ oznaczają momenty skręcające pochodzące od zestawów jezdnych oraz $\kappa = GJ_s/L$ sprężystości pręta.

gdzie

$$D(\omega)=\omega^4-\omega^2(\omega_1^2+\nu_1^2+\omega_2^2+\nu_2^2+4\gamma_1\gamma_2)+\nu_1^2\nu_2^2+\omega_1^2\nu_2^2+\omega_2^2\nu_1^2+$$
$$+i2\omega[\gamma_1(\omega_2^2+\nu_2^2)+\gamma_2(\omega_1^2+\nu_1^2)-\omega^2(\gamma_1+\gamma_2)].$$

Poszukiwaną macierz gęstości widmowych kątów obrotu skrajnych przekrojów pręta obliczono na podstawie (3.20), zamieniając $\ddot{y}$ na θ oraz $\ddot{\eta}$ na ψ:

$$\mathbf{S}_\theta(\omega)=\overline{\mathbf{H}(\omega)}\,\mathbf{S}_\psi(\omega)\,\mathbf{H}(\omega)^{\mathrm{T}}, \tag{4.21}$$

gdzie $\mathbf{S}_\psi(\omega)$ jest kwadratową macierzą widmową funkcji losowych związanych z poprzecznym profilem drogi.

Poprzeczny profil drogi, podobnie jak wzdłużny, oddziałuje na pojazd z przesunięciem czasowym T zależnym od odległości między zestawami jezdnymi i prędkości ruchu. W związku z tym spełnione są analogiczne do (3.21) i (3.22) zależności między gęstościami widmowymi tworzącymi macierz $S_\psi(\omega)$:

$$\begin{aligned} S_{\psi 11}(\omega)&=S_{\psi 22}(\omega)=S_\psi(\omega),\\ S_{\psi 12}(\omega)&=\overline{S_{\psi 21}(\omega)}=e^{-i\omega T}\,S_\psi(\omega). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Uwzględniając (4.22) otrzymano następującą postać macierzy gęstości widmowych $S_\theta(\omega)$:

$$S_\theta(\omega)=S_\psi(\omega)\begin{bmatrix}\bar{H}_1 H_1 & \bar{H}_1 H_2\\ \bar{H}_2 H_1 & \bar{H}_2 H_2\end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

gdzie elementy $\bar{H}_k H_l$ macierzy w swej ogólnej postaci określne są identycznie z (3.23).

Po podstawieniu do (4.23) wzorów (4.20) otrzymano wzory obliczeniowe następujące:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_1 H_1 &= \frac{1}{|D(\omega)|^2}\{4\gamma_1\omega^6+[\nu_1^4+8\gamma_1^2(\omega_2^2+\nu_2^2)+16\gamma_1^2\gamma_2^2]\omega^4+\\
&+2\{2[\gamma_2\nu_1^2+\gamma_1(\omega_2^2+\nu_2^2)]^2-\nu_1^2(\omega_2^2+\nu_2^2)(\nu_1^2+4\gamma_1\gamma_2)+2\omega_1^4\gamma_2^2\}\omega^2+\\
&+\nu_1^4(\omega_2^2+\nu_2^2)^2+\omega_1^4\nu_2^4+4\omega_1^2\omega[\omega^2(\gamma_1\nu_2^2-\gamma_2\nu_1^2-4\gamma_1\gamma_2^2)-\\
&-\gamma_2\nu_1^2\nu_2^2+(\omega_2^2+\nu_2^2)(\gamma_2\nu_1^2-\gamma_1\nu_2^2)]\sin\omega T++2\omega_1^2[-4\gamma_1\gamma_2\omega^4+\\
&+\omega^2(-\nu_1^2\nu_2^2+4\gamma_1\gamma_2\omega_2^2+4\gamma_2^2\nu_1^2)+\nu_1^2\nu_2^2(\omega_2^2+\nu_2^2)]\cos\omega T\},\\
\bar{H}_2 H_2 &= \frac{1}{|D(\omega)|^2}\{4\gamma_2\omega^6+[\nu_2^4+8\gamma_2^2(\omega_1^2+\nu_1^2)+16\gamma_1^2\gamma_2^2]\omega^4+\\
&+2\{2[\gamma_1\nu_2^2+\gamma_2(\omega_1^2+\nu_1^2)]^2-\nu_2^2(\omega_1^2+\nu_1^2)(\nu_2^2+4\gamma_1\gamma_2)+\\
&+2\omega_2^4\gamma_1^2\}\omega^2+\nu_2^4(\omega_1^2+\nu_1^2)+\omega_2^4\nu_1^4-4\omega_2^2\omega[\omega^2(\gamma_2\nu_1^2-\\
&-\gamma_1\nu_2^2-4\gamma_1^2\gamma_2)-\gamma_1\nu_1^2\nu_2^2+(\omega_1^2+\nu_1^2)(\gamma_1\nu_2^2-\gamma_2\nu_1^2)]\sin\omega T+\\
&+2\omega_2^2[-4\gamma_1\gamma_2\omega^4+\omega^2(-\nu_1^2\nu_2^2+4\gamma_1\gamma_2\omega_1^2+4\gamma_1^2\nu_2^2)+\\
&+\nu_1^2\nu_2^2(\omega_1^2+\nu_1^2)]\cos\omega T\},\\
\bar{H}_1 H_2 &= \frac{1}{|D(\omega)|^2}\{V(\omega)+P(\omega)\sin\omega T+R(\omega)\cos\omega T-i[2\omega U(\omega)+\\
&+R_1(\omega)\sin\omega T-P_1(\omega)\cos\omega T]\},\\
\bar{H}_2 H_1 &= \overline{\bar{H}_1 H_2},
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Uwzględniając (4.14) oraz (4.12) i (4.13) wyznaczono czasowo-przestrzenną funkcję korelacji $K_{\mathfrak{M}}(x_1, x_2, \tau)$ oraz wariancję $\sigma^2_{\mathfrak{M}}(x)$:

$$(4.15)\quad K_{\mathfrak{M}}(x_1, x_2, \tau) = \left(\frac{GJ_s}{L}\right)^2 \left\{ K_{(\theta_2-\theta_1)}(\tau) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x_1}{L} \cos\frac{m\pi x_2}{L} \times \right.$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} R_{nm}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\frac{n\pi x_1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R_n(\omega)}\, e^{i\omega\tau}\, d\omega + \right.$$
$$\left.\left. + \cos\frac{n\pi x_2}{L} \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega \right] \right\}$$

oraz

$$(4.16)\quad \sigma^2_{\mathfrak{M}}(x) = \left(\frac{GJ_s}{L}\right)^2 \left\{ \sigma^2_{(\theta_2-\theta_1)} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \int_{-\infty}^{\infty} R_{nm}(\omega)\, d\omega + \right.$$
$$\left. + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L} \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\omega)\, d\omega \right\},$$

gdzie

$$R_{nm}(\omega) = \frac{S''_{\theta 11} - (-1)^m S''_{\theta 12} - (-1)^n S''_{\theta 21} + (-1)^{n+m} S''_{\theta 22}}{(\omega_n^2 - \omega^2 + i\alpha\omega_n^2\,\omega)\,(\omega_m^2 - \omega^2 - i\alpha\omega_m^2\,\omega)},$$

$$R_n(\omega) = \frac{(-S_{\theta 11} - (-1)^n S_{\theta 22} + S_{\theta 21} + (-1)^n S_{\theta 12})\,\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\alpha\omega_n^2\,\omega},$$

$$\overline{R_n(\omega)} = \frac{(-S_{\theta 11} - (-1)^n S_{\theta 22} + S_{\theta 12} + (-1)^n S_{\theta 21})\,\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\alpha\omega_n^2\,\omega}$$

oraz gdzie

$$K_{(\theta_2-\theta_1)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (S_{\theta 11} + S_{\theta 22} - S_{\theta 12} - S_{\theta 21})\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

oznacza funkcję korelacji całkowitego kąta skręcenia pręta oraz $\sigma^2_{(\theta_2-\theta_1)}$ oznacza jego wariancję.

W celu określenia macierzy gęstości widmowych $S_\theta(\omega)$, podobnie jak dla zginania, przyjęto pewne uproszczenia. Założono, że uzasadnione jest dokonanie redukcji masowego momentu bezwładności układu względem osi pręta do jego skrajnych przekrojów.

Schemat obliczeniowy stosowany przy wyznaczeniu przemieszczeń kątowych $\theta_1(t)$ i $\theta_2(t)$ przedstawia rys. 6. Układ równań ruchu ma postać

$$(4.17)\quad J_1\ddot{\theta}_1 + \kappa(\theta_1 - \theta_2) = \mathfrak{M}_1(t), \qquad J_2\ddot{\theta}_2 + \kappa(\theta_2 - \theta_1) = \mathfrak{M}_2(t),$$

gdzie J_1, J_2 oznaczają zredukowane, osiowe momenty bezwładności układu, $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ oznaczają momenty skręcające pochodzące od zestawów jezdnych oraz $\kappa = GJ_s/L$ sprężystości pręta.

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$D(\omega)^2=[\omega_1^2\omega_2^2-(\omega_1^2+\nu_1^2)(\omega_2^2+\nu_2^2)+\omega^2(\omega_1^2+\nu_1^2+\omega_2^2+\nu_2^2+4\gamma_1\gamma_2)-\omega^4]^2+$$
$$+4\omega^2[\omega^2(\gamma_1+\gamma_2)-\gamma_1(\omega_2^2+\nu_2^2)-\gamma_2(\omega_1^2+\nu_1^2)]^2,$$
$$P(\omega),\ P_1(\omega)=2\omega\{\omega^4[4\gamma_1\gamma_2(\gamma_2-\gamma_1)-\gamma_1\nu_2^2+\gamma_2\nu_1^2]+$$
$$+\omega^2[(\omega_1^2+\omega_2^2)(\gamma_1\nu_2^2-\gamma_2\nu_2^2+\gamma_1\nu_2^4-\gamma_2\nu_1^4+4\gamma_1\gamma_2(\gamma_1\omega_2^2-\gamma_2\omega_1^2)]-$$
$$+\gamma_1\nu_2^4\omega_1^2+\gamma_2\nu_1^4\omega_2^2-\omega_1^2\omega_2^2(\gamma_1\nu_2^2-\gamma_2\nu_1^2)(1\pm1)\},$$
$$R(\omega),\ R_1(\omega)=4\gamma_1\gamma_2\omega^6+\omega^4[\nu_1^2\nu_2^2+4(4\gamma_1^2\gamma_2^2-\gamma_1\gamma_2(\omega_1^2+\omega_2^2)-$$
$$-\gamma_1^2\nu_2^2-\gamma_2^2\nu_1^2)]+\omega^2[4\gamma_1^2\nu_2^2(\omega_2^2+\nu_2^2)+4\gamma_2^2\nu_1^2(\omega_1^2+\nu_1^2)-8\gamma_1\gamma_2\omega_1^2\omega_2^2-$$
$$-\nu_1^2\nu_2^2(\omega_1^2+\nu_1^2+\omega_2^2+\nu_2^2)]+\nu_1^2\nu_2^2[(\omega_1^2+\nu_1^2)(\omega_2^2+\nu_2^2)\pm\omega_1^2\omega_2^2],$$
$$U(\omega)=\gamma_2\omega_2^2(4\gamma_1^2\omega^2+\nu_1^4)-\gamma_1\omega_1^2(4\gamma_2^2\omega^2+\nu_2^4),$$
$$V(\omega)=-4\omega^4(\omega_1^2\gamma_2^2+\omega_2^2\gamma_1^2)+\omega^2[\omega_1^2(4\gamma_2^2(\omega_1^2+\nu_1^2)-\nu_2^4)+$$
$$+\omega_2^2(4\gamma_1^2(\omega_2^2+\nu_2^2)-\nu_1^4)].$$

Występująca w równaniu (4.19) macierz gęstości widmowych przyspieszeń kątowych jest następująca:

$$\mathbf{S}_{\ddot{\theta}}^{\cdot\cdot}(\omega)=\omega^4\,\mathbf{S}_{\theta}(\omega). \tag{4.25}$$

Funkcję korelacji poprzecznego profilu drogi przyjęto za Silajewem [5] w postaci analogicznej do postaci dla profilu wzdłużnego:

$$K_{\Psi}(\tau)=\sigma_{\Psi}^2\,e^{-\lambda|\tau|}\cos\delta\tau.$$

Ze względu na nieróżniczkowalność tak opisanej funkcji losowej, przy obliczaniu gęstości widmowej losowego pola $\varphi(x,t)$, należy sprawdzić warunek zbieżności następującej całki:

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_{\varphi}(x_1,x_2,\omega)\,d\omega<\infty.$$

W omawianym przypadku warunek ten jest spełniony, o czym można przekonać się podstawiając (4.20) oraz (4.24) i (4.25). Do obliczeń przyjęto następujące dane:

$L=12$ [m],
$R=1{,}8$ [m],
$G=8\cdot10^{10}\left[\frac{N}{m^2}\right]$,
$J_s=2{,}5\cdot10^{-7}$ [m^4],
$J_0=5{,}186\cdot10^{-5}$ [m^4],
$\alpha=0{,}02$ [s],

$\rho=7{,}8\ 10^3\left[\frac{kg}{m^3}\right]$,
$J_1=J_2=0{,}985$ [kg m^2],
$\beta_1=\beta_2=1{,}5\cdot10^3\left[\frac{Ns}{m}\right]$,
$k_1=k_2=5\cdot10^5\left[\frac{N}{m}\right]$,
$T=2{,}4$ [s].

Wartość zredukowanego momentu bezwładności wyliczono z warunku równości pierwszej częstości własnej układu ciągłego i odpowiedniego, dyskretnego modelu zastępczego. Otrzymano wzór

$$J_1 = J_2 = \frac{2}{\pi^2} \rho J_0 L.$$

Dane dotyczące poprzecznego profilu drogi przyjęto na podstawie pracy [5]:

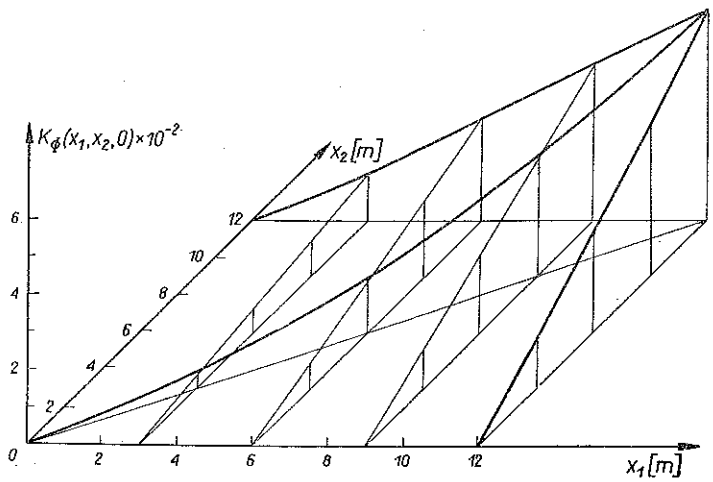
$$\sigma_\psi = 0{,}03,$$

$$\lambda_1 = 0{,}15 \left[\frac{1}{s}\right], \qquad \lambda = \lambda_1 v = 0{,}75 \left[\frac{1}{s}\right],$$

$$\delta_1 = 0{,}112 \left[\frac{1}{s}\right], \qquad \delta = \delta_1 v = 0{,}56 \left[\frac{1}{s}\right].$$

Wyniki obliczeń przedstawiono w formie wykresów.

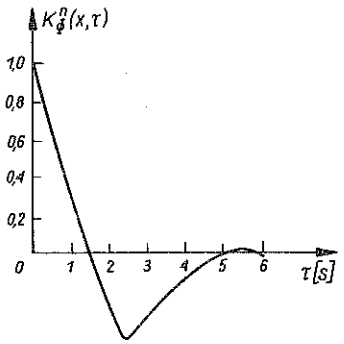
Na rys. 7 pokazano wykres współczynnika korelacji $K_\phi(x_1, x_2, 0)$ losowego pola kątów skręcania dowolnego przekroju pręta. Wykres ten można aproksymować



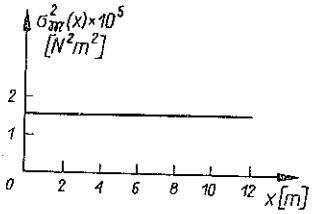
Rys. 7. Współczynnik korelacji losowego pola kątów skręcenia przekrojów pręta.

powierzchnią prostokreślną o ortogonalnych tworzących, leżących w płaszczyznach odpowiednio równoległych do płaszczyzn $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$. Współczynnik korelacji jest równy zeru dla procesów, z których przynajmniej jeden określa kąt obrotu przekroju pręta o współrzędnej $x = 0$. Wynika to z charakteru przyjętej funkcji $\Phi(x, t)$. Maksymalna wartość współczynnika korelacji jest równa wariancji całkowitego kąta skręcenia pręta. Przekrój wykresu $K_\phi(x_1, x_2, 0)$ dokonany płaszczyzną $x_1 = x_2$ jest obrazem wariancji $\sigma_\Phi^2(x)$ kątów skręcenia dowolnego przekroju pręta. Wykres wariancji odkształceń kątowych jest zbliżony do paraboli drugiego stopnia.

Unormowaną funkcję autokorelacji $K_{\Phi}^{n}(x, \tau)$ dla środkowego przekroju pręta przedstawia rys. 8. Na rys. 9 pokazano wykres wariancji momentów skręcających. Ponieważ wartości wariancji różnią się między sobą nie więcej niż o 1%, więc można



Rys. 8. Unormowana funkcja korelacji kątów skręcenia środkowego przekroju pręta.



Rys. 9. Wariancja losowego pola momentów skręcających.

przyjąć, że wariancja momentów skręcających jest stała dla dowolnego przekroju pręta.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że decydujący wpływ na statystyczne parametry procesu drgań skrętnych pręta na przyjęty, w celu wyznaczenia geometrycznych warunków brzegowych, model dyskretny. W modelu tym pręt jest nieważkim elementem sprężystym o względnym kącie skręcenia $(\theta_2-\theta_1)/L$ i sztywności skrętnej GJ_s. Wariancja losowego pola kątów skręcania przekrojów pręta zmienia się parabolicznie i wynosi

$$\sigma_{\Phi_1}^2(x)=\left(\frac{x}{L}\right)^2\sigma_{(Q_2-Q_1)}^2,$$

a wariancja momentów skręcających ma postać

$$\sigma_{\mathfrak{M}_1}^2=\left(\frac{GJ_s}{L}\right)^2\sigma_{(Q_2-Q_1)}^2$$

i jest stała dla każdego przekroju pręta.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. S. BENDAT, A. G. PIERSOL, *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*, PWN, Warszawa 1976.
2. B. SKALMIERSKI, A. TYLIKOWSKI, *Procesy stochastyczne w dynamice*, PWN, Warszawa 1973.
3. A. A. SWIESZNIKOW, *Podstawowe metody funkcji losowych*, PWN, Warszawa 1965.
4. Н. Николаенко, *Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций*, Машиностроение, Москва 1967.
5. А. А. Силяев, *Спектральна теория подрессоривания транспортных машин*, Машгиз., Москва 1963.

6. Z. BURDZIŃSKI, M. GORSKI, *Charakterystyki probabilistyczne i klasyfikacja nierówności terenu i dróg*, Prace Instytutu Transportu PW nr 8/1974.
7. S. KALISKI i inni, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.

Резюме

СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ БУДУЩЕГО ЭЛЕМЕНТОМ НЕКОТОРОЙ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

Представлен статистический анализ колебаний простой гибридной системы под действием случайного кинематического вынуждения. Исследуемая система состоит из стержня опирающегося по краям на дискретных вязкоупругих элементах. Вынуждение составляют вертикальные и угловые перемещения опор, будучие стационарными случайными процессами второго порядка. Применяя корреляционный анализ, определены времени-пространственные фуниции корреляции случайного поля перемещений и внутренних сил для процессов изгиба и кручения стержня, а также отвечающие им варианции. Результаты числового примера иллюстрированы графиками.

STRESZCZENIE

RANDOM VIBRATIONS OF A BAR-ELEMENT OF A HYBRID SYSTEM

The paper deals with statistical analysis of vibrations of a simple hybrid system under random kinematic excitation. A system consists of a bar supported by discrete viscoelastic elements.

The support displacements constituting excitation sources are considered as second-order, stationary random processes. The timespace functions of correlation for random displacements and internal forces are determined for bending and torsion of the bar; respective variations are also obtained. An example is being finally solved.

INSTYTUT PODSTAW BUDOWY MASZYN
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 kwietnia 1978 r.