ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 26, 2, 259—265, 1978
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

OPTYMALNA KOREKCJA UKŁADU DYNAMICZNEGO

WŁODZIMIERZ GAWROŃSKI (GDAŃSK)

Równania opisują proces dynamiczny w sposób przybliżony. Jeżeli znany jest proces rzeczywisty, wówczas skorygować można współczynniki równań tak, aby proces opisany równaniem był bliższy rzeczywistego. W pracy omówiono tego typu korekcję w przypadku, gdy proces opisany jest równaniem macierzowym. Korekcja ta jest optymalna ze względu na wskaźnik jakości korekcji, który charakteryzuje odległość procesu opisywanego od mierzonego. Korekcja ta dotyczy ruchu swobodnego, ruchu wymuszonego harmonicznego i zagadnienia statycznego.

Wykaz oznaczeń

$\mathrm{col}(\cdot)$	wektor,
$\mathrm{diag}(\cdot)$	macierz diagonalna,
$\mathrm{tr}\, A$	ślad macierzy A,
$A>0$	macierz dodatnio określona,
I	macierz jednostkowa,
$E^{p\times q}_{p\times q}$	macierz permutacji [2],
$\otimes$	symbol iloczynu prostego macierzy,
$\mathrm{rs}\, A$	rozwinięcie wierszowe macierzy A [2],
$\mathrm{cs}\, A$	rozwinięcie kolumnowe macierzy A [2],
$m\times n$	wymiary macierzy.

1. Wstęp

Model opisujący proces fizyczny jest uproszczeniem opisywanego zjawiska, a jego parametry znane są w przybliżeniu. Uproszczenie opisu zjawiska polegać może na tym, że rząd równania różniczkowego opisującego zjawisko jest zbyt niski. Stwierdzenie o przybliżonych wartościach parametrów układu oznacza tu, że są te wartości wyznaczone nieoptymalnie. Za wartość optymalną zbioru parametrów charakteryzujących układ rozumiemy tu te wartości, przy których odchyłka wartości otrzymanej z modelu od wartości rzeczywistej (zmierzonej lub otrzymanej z innego, budzącego zaufanie źródła informacji) jest najmniejsza.

W pracy zajmiemy się tym ostatnim zagadnieniem w przypadku obliczeń drgań własnych i wymuszonych drgań okresowych. Zjawiska te opisywane są następującymi równaniami:

a) ruch swobodny

$$MQA-KQ=0, \tag{1.1}$$

b) ruch wymuszony

$$GX = P, \tag{1.2}$$

gdzie M jest macierzą bezwładności układu $(n\times n)$, K macierzą sztywności układu $(n\times n)$, Q macierzą wektorów własnych $(n\times m)$, $m\leqslant n$, Λ macierzą widmową układu $(m\times m)$, $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\omega_{01}^2, \ldots, \omega_{0m}^2)$, a ω_{0i} jest i-tą częstością własną. W drugim równaniu $G = K + j\omega L - \omega^2 M$ oznacza macierz podatności dynamicznej, K, M jak wyżej, L macierz tłumienia, ω częstość kołową wymuszenia, $j = \sqrt{-1}$, X zespoloną macierz przemieszczeń harmonicznych, P zespoloną macierz wymuszeń harmonicznych, obie o wymiarach $n\times r$.

2. Opis metody

Dana jest macierz ε określona wzorem

$$\varepsilon = HA - B. \tag{2.1}$$

Należy dobrać tak macierz H, aby przy danych macierzach A, B, V wskaźnik jakości

$$J = \mathrm{tr}\,(\varepsilon V \varepsilon^T) \tag{2.2}$$

osiągnął wartość minimalną. Macierze A, B są wymiaru $n\times m$, H jest macierzą symetryczną $(n\times n)$, V jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną $m\times m$.

Wskaźnik jakości J osiąga wartości ekstremalne, gdy

$$\frac{\partial J}{\partial H} = 0. \tag{2.3}$$

Wstawiając (2.1) do (2.2), mamy

$$J = \mathrm{tr}\,(HAVA^T H - BVA^T H - HAVB^T + BVB^T).$$

Na podstawie reguł różniczkowania [1] otrzymujemy

$$\frac{\partial J}{\partial H} = AVA^T H + HAVA^T - AVB^T - BVA^T. \tag{2.4}$$

Równanie $\partial J/\partial H = 0$ sprowadza się do następującego równania:

$$\bar{A}H + H\bar{A} = \bar{B}, \tag{2.5}$$

gdzie

$$\bar{A} = AVA^T, \qquad \bar{B} = AVB^T + BVA^T. \tag{2.6}$$

Równanie (2.5) wyznacza punkt ekstremalny. Na to, aby punkt ekstremalny był punktem, dla którego wskaźnik J osiąga minimum, wystarczy, aby macierz $\partial/\partial H\cdot$ $\cdot(\partial J/\partial H)$ była określona dodatnio. Aby sprawdzić warunki dodatniej określoności tej macierzy, różniczkujemy (2.4) przy następujących oznaczeniach (2.6):

$$\frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right) = \frac{\partial}{\partial H}(\bar{A}H + H\bar{A} - \bar{B}) = (I\otimes\bar{A})\frac{\partial H}{\partial H} + \frac{\partial H}{\partial H}(I\otimes\bar{A}) = (I\otimes\bar{A})E_{n\times n}^{n\times n} + E_{n\times n}^{n\times n}(I\otimes\bar{A}),$$

gdzie $E_{n\times n}^{n\times n}$ jest macierzą permutacji [2].

Jeżeli oznaczymy $\mathscr{A}_1=(I\otimes\bar{A})E^{n\times n}_{n\times n}$ oraz $\mathscr{A}_2=E^{n\times n}_{n\times n}(I\otimes\bar{A})$, to obie te macierze możemy przedstawić w postaci

$$\mathscr{A}_1=e^T\otimes \mathrm{cs}\,\bar{A}, \qquad \mathscr{A}_2=e\otimes \mathrm{rs}\,\bar{A},$$

gdzie $e=\mathrm{cs}\,I$. Ponieważ $\bar{A}$ jest symetryczna, gdyż V jest symetryczna, więc [2]

$$\mathrm{rs}\,\bar{A}=\mathrm{rs}\,\bar{A}^T=(\mathrm{cs}\,\bar{A})^T$$

czyli

$$\mathscr{A}_2=e\otimes(\mathrm{cs}\,\bar{A})^T=\mathscr{A}_1^T,$$

a więc w końcu

$$\frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{\partial J}{\partial H}\right)=\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_1^T \tag{2.7}$$

jest macierzą symetryczną. Jeżeli $\bar{A}$ jest dodatnio określona, to powyższa druga pochodna jest dodatnio określona i punkt ekstremalny jest punktem minimum.

3. Korekcja układu w ruchu swobodnym

Ruch swobodny opisany jest równaniem (1.1). Częstości drgań własnych ω_{0i} i postacie drgań własnych q_i, $i=1,m$; $m\leqslant n$, obliczone z (1.1) oraz częstości $\bar{\omega}_{0i}$ i postacie $\bar{q}_i$ $(i=1,m)$ otrzymane z pomiarów są różne, stąd równanie (1.1) po wstawieniu wielkości mierzonych $\bar{\Lambda}$ i $\bar{Q}$ ma postać

$$M\bar{Q}\bar{\Lambda}-K\bar{Q}=\varepsilon\neq 0. \tag{3.1}$$

Wielkość ε jest z reguły niezerowa i mówi o tym, że równanie (1.1) nie aproksymuje w sposób dokładny procesu obserwowanego. Definiujemy wskaźnik $J=\mathrm{tr}\,(\varepsilon V\varepsilon^T)$ jako miarę dokładności $(V>0)$. Zakładamy, że macierz K jest wyznaczona dokładnie, dokładność zaś wyznaczenia wyrazów macierzy M nie jest wystarczająca (gdy macierz K nie jest wystarczająco dokładnie wyznaczona, procedura jest podobna). Należy więc skorygować macierz M tak, aby przybliżyć wyniki obliczeń do wartości zmierzonych (zakładamy, że pomiary budzą zaufanie). Nową skorygowaną macierz M otrzymujemy ze wzoru

$$\bar{M}=M+\Delta M. \tag{3.2}$$

Macierz korygującą ΔM należy wyznaczyć w ten sposób, aby zminimalizować wskaźnik J.

Z równania (1.1) po wstawieniu (3.2) otrzymamy

$$\Delta M\bar{Q}\bar{\Lambda}+M\bar{Q}\bar{\Lambda}-K\bar{Q}=\varepsilon. \tag{3.3}$$

Wprowadzając następujące oznaczenia

$$A=\bar{Q}\bar{\Lambda}, \qquad B=K\bar{Q}-M\bar{Q}\bar{\Lambda}, \qquad H=\Delta M, \tag{3.4}$$

znajdujemy, że równanie (3.3) przybiera postać (2.1). Korzystamy więc z uprzednich wyprowadzeń i uzasadnień, aby na podstawie (2.4) znaleźć ΔM_0 jako optymalną wartość ΔM. Otrzymujemy ją z następującego równania:

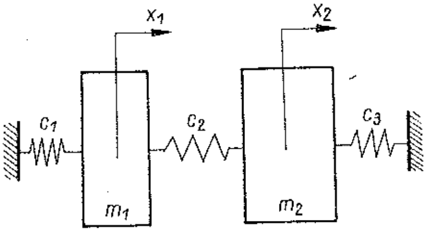
$$\bar{A}\Delta M + \Delta M\bar{A} = \bar{B}, \tag{3.5}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{A} &= AVA^T = \bar{Q}\bar{A}V\bar{A}\bar{Q}^T, \\ \bar{B} &= C + C^T, \\ C &= (K\bar{Q} - M\bar{Q}\bar{A})\,V\bar{A}\bar{Q}^T = \varepsilon V\bar{A}\bar{Q}^T. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ponieważ $\bar{A} > 0$, więc punkt ekstremalny jest punktem minimum.

PRZYKŁAD 1. Wyznaczanie masy cieczy towarzyszącej. Dany jest układ pokazany na rys. 1, przy czym $c_1 = c_2 = 10$, $c_3 = 40$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Układ ten zanurzony jest w cieczy i wykonuje drgania swobodne. Z pomiarów wynika, że częstości drgań własnych układu zanurzonego wynoszą $\bar{\omega}_1 = 3{,}742$, $\bar{\omega}_2 = 5{,}099$, formy zaś drgań są następujące $\bar{q}_1 = \mathrm{col}\,(1; 0{,}6)$, $\bar{q}_2 = \mathrm{col}\,(1; -0{,}9)$. Częstości te i formy różnią się od częstości i form obliczonych dla układu niezanurzonego. Jedną z przyczyn tej różnicy jest to, że w ruchu układu bierze udział pewna część cieczy. Należy wyznaczyć jej wielkość tak, aby różnica między pomiarami a wartościami uzyskanymi z układu ze skorygowanymi parametrami bezwładnościowymi była minimalna.



Rys. 1.

Macierze mas i sztywności układu z rys. 1 mają następującą postać:

$$M = \mathrm{diag}\,(1, 2), \qquad K = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 50 \end{bmatrix}.$$

Obliczone stąd wartości i wektory własne wynoszą $\omega_1 = 3{,}873$, $\omega_2 = 5{,}477$, $q_1 = \mathrm{col}\,(1; 0{,}5)$, $q_2 = \mathrm{col}\,(1; -1)$. Z danych otrzymujemy

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}6 & -0{,}9 \end{bmatrix}, \qquad \bar{A} = \mathrm{diag}\,(14; 26),$$

a stąd na podstawie (3.4)

$$A = \bar{Q}\bar{A} = \begin{bmatrix} 14 & 26 \\ 8{,}4 & -23{,}4 \end{bmatrix}, \qquad B = K\bar{Q} - M\bar{Q}\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3{,}2 & -8{,}2 \end{bmatrix},$$

a więc z (3.6) dla $V = I$ mamy

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 872 & 490{,}8 \\ -490{,}8 & -618{,}1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} 156 & -238{,}6 \\ -238{,}6 & 437{,}5 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązując dla tych macierzy równanie (3.5) otrzymujemy korygującą macierz:

$$\Delta M = \begin{bmatrix} 0{,}0751 & -0{,}0255 \\ -0{,}0255 & 0{,}3336 \end{bmatrix}.$$

Tak więc macierz bezwładności $\bar{M}$ układu skorygowanego wynosi

$$\bar{M} = M + \Delta M = \begin{bmatrix} 1{,}0751 & -0{,}0255 \\ -0{,}0255 & -2{,}3336 \end{bmatrix}.$$

Dla tej macierzy otrzymujemy następujące częstości i formy drgań własnych: $\omega_{01\text{opt}} = 3{,}709$, $\omega_{02\text{opt}} = 5{,}105$, $q_{1\text{opt}} = \text{col}\,(1; 0{,}540)$, $q_{2\text{opt}} = \text{col}\,(1; -0{,}858)$.

Wielkości te, otrzymane z układu skorygowanego, są bliższe wartościom zmierzonym i są optymalne w tym sensie, że każda inna korekcja macierzy bezwładności spowoduje oddalenie się wartości obliczonych od wartości zmierzonych.

4. Korekcja układu w okresowym ruchu wymuszonym

Ruch wymuszony układu (z częstością ω) opisany jest równaniem (1.2). Niech przemieszczenia $X = [x_1, ..., x_r]$ będą obliczone z (1.2), przemieszczenia zaś $\bar{X} = [\bar{x}_1, ...$ $..., \bar{x}_r]$ otrzymane są z pomiarów, przy czym $\Delta X = \bar{X} - X \neq 0$. W ten sposób, z równania (1.2), po wstawieniu wielkości mierzonych, otrzymujemy niezerową wartość ε zdefiniowaną wzorem

$$\varepsilon = G\bar{X} - P \neq 0. \tag{4.1}$$

Równanie (1.2) nie aproksymuje procesu mierzonego w sposób dokładny. Przyjmując jako miarę dokładności wskaźnik $J = \text{tr}\,(\varepsilon V \varepsilon^*)$ $(V > 0)$, korygujemy macierz podatności dynamicznej G w ten sposób, aby wskaźnik J przyjął wartość minimalną. Korekcję tę, podobnie jak uprzednio przeprowadzamy, wyznaczając w zależności

$$\bar{G} = G + \Delta G \tag{4.2}$$

macierz ΔG. Wstawiając do (4.1) skorygowaną macierz $\bar{G}$ ze wzoru (4.2), znajdziemy

$$\varepsilon = HA - \bar{B}, \tag{4.3}$$

gdzie

$$H = \Delta G, \qquad A = \bar{X}, \qquad B = P - G\bar{X}. \tag{4.4}$$

Równanie (4.3) jest identyczne z równaniem (2.1), stąd na podstawie (2.5) równanie dla macierzy ΔG minimalizującej J jest następujące:

$$\bar{A}\Delta G + \Delta G\bar{A} = \bar{B}, \tag{4.5}$$

przy czym

$$\bar{A} = \bar{X}V\bar{X}^*, \qquad \bar{B} = \bar{X}VB^T + BV\bar{X}^*. \tag{4.6}$$

Przykład 2. Układ o dwu stopniach swobody (rys. 1) obciążony został siłami $p_1 = \text{col}\,(0; 5)$, $p_2 = \text{col}\,(-24; 37)$. Wstępnie oszacowano $c_1 = c_2 = 10$, $c_3 = 20$. Przemieszczenia obliczone dla tych sztywności wynoszą: od siły p_1 — przemieszczenie

$x_1 = \mathrm{col}\,(0,1; 0,2)$, a od siły p_2 — przemieszczenie $x_2 = \mathrm{col}\,(-0,7; 1,0)$. Zmierzono przemieszczenia wywołane tymi siłami i otrzymano $x_1 = \mathrm{col}\,(0,15; 0,25)$, $x_2 = \mathrm{col} \cdot (-0,75; 1,0)$. Oznaczamy $P = [p_1; p_2]$, $X = [x_1; x_2]$, $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$. Należy skorygować macierz sztywności G w ten sposób, aby otrzymana macierz $\bar{G} = G + \Delta G$ dawała minimalny błąd $\varepsilon = \bar{G}\bar{X} - P$.

Macierz korekcyjną ΔG znajdujemy z równania (4.5). W tym celu z (4.4) obliczamy macierz B:

$$B = P - G\bar{X} = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

Ze wzorów (4.6) dla $V = I$, mamy

$$\bar{A} = \bar{X}\bar{X}^T = \begin{bmatrix} -0,5850 & -0,7125 \\ -0,7125 & 1,0625 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \bar{X}B^T + B\bar{X}^T = \begin{bmatrix} 1,65 & 1,1 \\ -1,1 & -1,5 \end{bmatrix}.$$

Dla tych macierzy równanie (4.5) posiada następujące rozwiązanie:

$$\Delta G = \begin{bmatrix} -3,0552 & -1,3506 \\ -1,3506 & -1,6116 \end{bmatrix},$$

a więc skorygowana macierz sztywności wynosi

$$\bar{G} = G + \Delta G = \begin{bmatrix} 16,9448 & -11,3506 \\ -11,3506 & 28,3884 \end{bmatrix}.$$

W celu sprawdzenia obliczamy dla tej macierzy przemieszczenia $X_0 = [x_{01}, x_{02}]$ od obciążenia P; otrzymujemy

$$X_0 = \bar{G}^{-1}P = \begin{bmatrix} 0,1611 & -0,7421 \\ 0,2406 & 1,0066 \end{bmatrix},$$

a więc korekcja daje:

$$\|\bar{X} - X_0\| < \|\bar{X} - X\|.$$

5. Wnioski i zastosowania

Metoda służy do korekcji własności układu dynamicznego w przypadku, gdy parametry układu są trudne do wyznaczenia lub wyznaczone są z dużą niedokładnością. Metoda jest narzędziem do szacowania wielkości tych parametrów. Przykładem zastosowania tej metody jest wyznaczanie tzw. «wody towarzyszącej» w obliczeniach okrętowych, szacowanie wielkości tłumienia w drganiach wymuszonych, ocena sztywności łożysk i podparć wałów, określanie wielkości wpływu filmu olejowego w łożyskach na amplitudy drgań. Metodę tę można stosować również w przypadku, gdy analizuje się wycinek większego układu (analiza lokalna). W takim przypadku powiązanie wycinka z całym układem modeluje się przez własności brzegu wycinka i sposobem wyżej opisanym można wyznaczyć te własności.

Literatura cytowana w tekście

1. M. Athans, *The matrix minimum principle*, Information and Control, 11, 1968.
2. W. J. Vetter, *Matrix calculus operations and Taylor expansions*, SIAM Review, **15**, 2, 1973.

Резюме

ОПТИМАЛЬНАЯ КОРРЕКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Уравнения представляют динамический процесс приближенно. Если имеется измеренный процесс, тогда можно исправить коэффициенты уравнений так, чтобы описанный процесс был близкий измеренному. В работе описана этого рода коррекция для процесса представленного матричным уравнением. Коррекция эта является оптимальной по отношению к указателю точности коррекции. Коррекция описана для свобдного движения системы, вынужденно гармонического движения и системы в статическом состоянии.

Summary

OPTIMAL CORRECTION OF A DYNAMIC SYSTEM

Equations describe a dynamic process approximately. However the coefficients of equations can be changed in such a way, that the computed process will be closer to the measured process. In the paper that correction for a process described by a matrix equation is presented. This correction is optimal with respect to the accuracy index and refers to the free motion, forced harmonic motion and static analysis.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lutego 1977 r.