ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 25, 2, 349—368, 1977
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

ZASTOSOWANIE ZASADY GAUSSA DO PRZYBLIŻONEGO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH PRZEWODZENIA CIEPŁA

JAN TALER (KRAKÓW)

W pracy przedstawiono metodę przybliżonego rozwiązywania zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła w ciałach stałych opartą na zasadzie najmniejszego działania (Gaussa), którą zastosowano do przekształconego przez Biota równania przewodzenia ciepła. Przedstawiono również praktyczne zastosowanie metody, rozważając nieustalone pole temperatury w półprzestrzeni, na granicy której dany jest strumień cieplny zależny od czasu i temperatury powierzchni.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

A, B, C stałe,

$a=\frac{\lambda}{c\rho}$ współczynnik wyrównania temperatury,

$b_i(t)$ współczynniki zależne od czasu,

c ciepło właściwe,

F_ν siła działająca na ν-ty punkt układu punktów materialnych,

$f(T_s, t)$ strumień cieplny na granicy półprzestrzeni,

m, n, p wykładniki (stałe),

m_ν masa ν-tego punktu,

$N=\frac{\alpha\delta}{\lambda}$ liczba Biota,

r współrzędna,

T temperatura,

T_0 temperatura otoczenia,

T_s temperatura granicy półprzestrzeni,

$T_s^*=\frac{T_s\lambda}{f\sqrt{at}}$ bezwymiarowa temperatura granicy półprzestrzeni,

t czas,

$\bar{\mathbf{v}}_\nu$ prędkość ν-tego punktu materialnego,

$\bar{\mathbf{w}}_\nu$ przyspieszenie ν-tego punktu materialnego,

x współrzędna,

Z działanie Gaussa,

α współczynnik wnikania ciepła,

δ głębokość wnikania ciepła,

$$\eta = 1 - \frac{T_s}{T_0},$$

$$\eta' = \frac{T_s}{T_0} - 1 = -\eta,$$

λ współczynnik przewodzenia ciepła,

$$\mu = \frac{T_s}{T_0} + 1$$

ρ gęstość.

1. Wstęp

W ostatnich latach rozwijają się bardzo szybko metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych przewodzenia ciepła, szczególnie wariacyjne [1 i 2]. Większość zasad wariacyjnych tworzona jest analogicznie do różniczkowych i całkowych zasad wariacyjnych mechaniki analitycznej [3, 4, 5 i 6], np. odpowiednikiem dobrze znanej metody Galerkina jest zasada d'Alemberta, co podkreślał sam Galerkin [7]. Również wariacyjna metody Vujanovica [6, 8, 9 i 10] skonstruowana jest analogicznie do zasady Hamiltona.

W pracach [5, 11 i 12] zastosowano metodę Gaussa do prawa Fouriera, a w pracy [13] do równania różniczkowego przewodzenia ciepła. Jak wiadomo z mechaniki analitycznej [14 i 15] zasada Gaussa mówi, że działanie Z układu punktów materialnych w ruchu rzeczywistym ma wartość minimalną równą zeru, a więc wariacja Z jest równa zeru:

$$\delta Z = \sum_{\nu=1}^{n} (\overline{\mathbf{F}}_\nu - m_\nu \overline{\mathbf{w}}_\nu)\, \delta \overline{\mathbf{w}}_\nu = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

gdzie działanie Z określone jest wzorem

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{m_\nu} (\overline{\mathbf{F}}_\nu - m_\nu \overline{\mathbf{w}}_\nu)^2, \qquad \nu = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Cechą charakterystyczną w zasadzie Gaussa jest to, że przy wyznaczaniu wariacji δZ przyjmuje się $\delta \overline{\mathbf{F}}_\nu = 0$, a zatem wariacji podlegają tylko przyśpieszenia.

Samojłowicz [11] stosując zasadę Gaussa określa działanie Z funkcją

$$Z = \int_V \frac{1}{\lambda} (\overline{\mathbf{J}}_q + \lambda \operatorname{grad} T)^2\, dV, \tag{1.3}$$

gdzie $\overline{\mathbf{J}}_q$ oznacza wektor strumienia ciepła.

W myśl zasady Gaussa wariację Z określa się przy założeniach [5, 11 i 12]

$$\begin{aligned} &\delta \overline{\mathbf{J}}_q \neq 0, \quad \delta(\lambda \operatorname{grad} T) = 0, \\ &\delta \overline{\mathbf{J}}_q = 0, \quad \delta(\lambda \operatorname{grad} T) \neq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

VUJANOVIC i BAČLIČ [13] stosują zasadę najmniejszego działania bezpośrednio do równania przewodzenia ciepła; działanie Z określone jest wzorem [13]

$$Z = \int_V (X-Y)^2 \, dV, \tag{1.5}$$

gdzie $X \equiv \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)$, $Y \equiv \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$.

Podobnie jak poprzednio, rozważone są dwa przypadki:

$$\text{a)} \quad \delta X \neq 0, \quad \delta Y = 0 \quad \text{oraz} \quad \text{b)} \quad \delta X = 0, \quad \delta Y \neq 0. \tag{1.6}$$

Vujanovic i Bačlič przedstawiają szereg przykładów, w których demonstrują zastosowanie swojej metody. Podstawową wadą ich metody jest to, że zmienną, względem której minimalizuje się (1.5), wybiera się intuicyjnie, uwzględniając oczywiście warunki (1.6). Minimalizacja Z przeprowadzona jest albo względem tzw. «kompleksu czasowego», albo względem tzw. «kompleksu przestrzennego», które stanowią funkcje zależne od parametrów pomocniczych w rozwiązaniu przybliżonym. Trudność tę łatwo ominąć wybierając w pierwszym przypadku (1.6a) jako zmienne niezależne parametry pomocnicze q_i w rozwiązaniu przybliżonym, tj. w przypadkach rozważanych w pracy [13], albo temperaturę powierzchni T_s lub głębokość wnikania ciepła, natomiast w drugim przypadku $\dot{T}_s$ lub $\dot{\delta}$. Łatwo wykazać, że w drugim przypadku, tj. gdy (1.5) minimalizowane jest względem $\dot{q}_i$, metoda ta sprowadza siędo metody Kantorowicza:

$$\int_V \left[\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] \frac{\partial T}{\partial q_i} dV, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.7}$$

W pracy [13] rozważono również pole temperatury w półprzestrzeni, na granicy której dany jest dowolny strumień ciepła. W przypadku minimalizacji względem «kompleksu czasowego», jako zmienne niezależne wzięto jednocześnie $\dot{T}_s$ i $\dot{\delta}$ oraz zastosowano metodę mnożników Lagrange'a. Jeżeli natomiast jako zmienną niezależną wybralibyśmy $\dot{\delta}$, to otrzymalibyśmy rozwiązanie identyczne do rozwiązania z pracy [8]. Wybierając jako zmienną niezależną $\dot{T}_s$ otrzymamy rozwiązanie równie dokładne jak w poprzednim przypadku. Jako kompleks przestrzenny wybrano aT_s/δ. Bardzo łatwo wykazać, że ten sam wynik otrzymamy wybierając jako zmienną niezależną T_s. Podobne uwagi odnoszą się również do pozostałych przykładów rozpatrzonych przez VUJANOVICA i BAČLIČA w pracy [13].

Można zauważyć, że w przypadku minimalizacji Z względem «kompleksu czasowego» metoda VUJANOVICA [13] sprowadza się do metody Galerkina lub Kantorowicza, podobnie jak metoda wariacyjna przedstawiona w pracach [6, 8, 9 i 10] (w przypadku liniowego równania przewodzenia ciepła).

W pracy [13] zastosowano również minimalizację Z względem «kompleksu czasowego» w przypadku nieliniowego, dwuwymiarowego równania przewodzenia ciepła. Również w tym przypadku stosując metodę Galerkina otrzyma się ten sam wynik. Przykład zastosowania metody Galerkina do nieliniowego równania przewodzenia ciepła przedstawiony jest w pracy KRAJEWSKIEGO [19].

2. Opis metody

W niniejszej pracy zasada Gaussa zostanie zastosowana do przekształconego według Biota równania przewodzenia ciepła [20]. Liniowe równanie przewodzenia ciepła

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)-\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=0 \tag{2.1}$$

Biot przekształca wprowadzając wektor $\overline{\mathbf{H}}(x, y, z, t)$, który spełnia równanie [20 i 3]

$$c\rho T=-\operatorname{div}\overline{\mathbf{H}}. \tag{2.2}$$

Podstawiając (2.2) do (2.1) widzimy, że (2.1) jest spełnione, gdy

$$\operatorname{grad} T+\frac{1}{\lambda}\dot{\overline{\mathbf{H}}}=0. \tag{2.3}$$

Jak wykazano w pracy [11] wektor $\overline{\mathbf{H}}$ ma prostą interpretację fizykalną wbrew zarzutom przedstawionym w pracy [2]:

$$\overline{\mathbf{H}}=\int_0^t \overline{\mathbf{J}}_q\,dt, \tag{2.4}$$

gdzie $\overline{\mathbf{J}}_q$ oznacza strumień ciepła. Wektor $\overline{\mathbf{H}}$ wyraża więc ilość ciepła jaka przechodzi przez jednostkę rozważanej powierzchni w przedziale czasu $(0, t)$.

Analogicznie do zasady Gaussa działanie Z w odniesieniu do równania (2.3) można przedstawić w postaci

$$Z=\frac{1}{2}\int_V \lambda\left(\operatorname{grad} T+\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)^2 dV. \tag{2.5}$$

Porównując zależności (1.2) i (2.5) można przeprowadzić analogię wielkości mechanicznych z cieplnymi:

$$\overline{\mathbf{F}}_v \leftrightarrow \operatorname{grad} T, \quad \overline{\mathbf{w}}_v \leftrightarrow -\dot{\overline{\mathbf{H}}}, \quad m_v \leftrightarrow \frac{1}{\lambda}. \tag{2.6}$$

Oczywiście jest to analogia formalna i w wyciąganiu dalej idących wniosków należy być ostrożnym.

Podobnie jak w zasadzie najmniejszego działania rozważone zostaną dwa przypadki:

$$\delta(\operatorname{grad} T)=0, \quad \delta\left(\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)\neq 0 \tag{2.7}$$

oraz

$$\delta(\operatorname{grad} T)\neq 0, \quad \delta\left(\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)=0. \tag{2.8}$$

W myśl zasady Gaussa Z osiąga wartość minimalną, a więc $\delta Z=0$, a zatem przeprowadzając wariację jednocześnie względem $\operatorname{grad} T$ i $\dot{\overline{\mathbf{H}}}/\lambda$ otrzymuje się

$$(2.9)\qquad \delta Z=\int_V \lambda\left(\operatorname{grad} T+\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)\delta(\operatorname{grad} T)\,dV+\int_V \lambda\left(\operatorname{grad} T+\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)\delta\left(\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)dV=0.$$

Uwzględniając warunek (2.7), w pierwszym z rozważanych przypadków, z (2.9) otrzymujemy

$$(2.10)\qquad \int_V \lambda\left(\operatorname{grad} T+\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)\delta\left(\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)dV=0$$

oraz w drugim przypadku

$$(2.11)\qquad \int_V \lambda\left(\operatorname{grad} T+\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)\delta(\operatorname{grad} T)\,dV=0.$$

Dalsze rozważania ograniczone zostaną do liniowych równań przewodzenia ciepła, gdy współczynnik przwodzenia ciepła jest stały i niezależny od temperatury.

Załóżmy, podobnie jak Biot [20 i 3], że wektor $\overline{\mathbf{H}}$ jest funkcją skończonej liczby parametrów pomocniczych $q_1, q_2, \ldots, q_n$ współrzędnych x, y, z oraz czasu t, tj. że

$$(2.12)\qquad \overline{\mathbf{H}}=\overline{\mathbf{H}}(q_1, q_2, \ldots, q_n, x, y, z, t).$$

W pierwszych z rozważanych przypadków jako zmienne niezależne przyjęte zostaną pochodne względem czasu parametrów pomocniczych (współrzędnych uogólnionych), tj. $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Wówczas wariacja $\dot{\overline{\mathbf{H}}}/\lambda$ wynosi

$$(2.13)\qquad \delta\left(\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}\,\delta\,(\dot{\overline{\mathbf{H}}})=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\partial\dot{q}_i}\,\delta\dot{q}_i.$$

Zauważmy jednak, że

$$(2.14)\qquad \dot{\overline{\mathbf{H}}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{\mathbf{H}}}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\overline{\mathbf{H}}}{\partial t},$$

a więc z (2.14) wynika zależność

$$(2.15)\qquad \frac{\partial\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial\overline{\mathbf{H}}}{\partial q_i}.$$

Podstawiając (2.15) do (2.13) otrzymuje się

$$(2.16)\qquad \delta\left(\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{\mathbf{H}}}{\partial q_i}\,\delta\dot{q}_i.$$

Po podstawieniu (2.16) do (2.10) i uwzględnieniu, że wariacje $\delta\dot{q}_i$ są dowolne otrzymuje się układ n równań, z którego wyznacza się n parametrów q_i:

$$(2.17)\qquad \int_V \left(\operatorname{grad} T+\frac{\dot{\overline{\mathbf{H}}}}{\lambda}\right)\frac{\partial\overline{\mathbf{H}}}{\partial q_i}\,dV,\qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Zauważmy, że identyczny układ równań otrzymuje się w metodzie Biota, tj. z równania [20 i 3]:

$$\int_V \left(\operatorname{grad} T + \frac{\dot{\bar{\mathbf{H}}}}{\lambda} \right) \delta \bar{\mathbf{H}} \, dV = 0 \tag{2.18}$$

po uwzględnieniu zależności

$$\delta \bar{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial q_i} . \delta q_i . \tag{2.19}$$

Biot, wprowadzając potencjał termiczny

$$V = \frac{1}{2} \int_V c\rho T^2 \, dV, \tag{2.20}$$

funkcję dysypacji

$$D = \frac{1}{2} \int_V \frac{\dot{\bar{\mathbf{H}}}^2}{\lambda} dV \tag{2.21}$$

oraz siłę termiczną

$$Q_i = - \int_A T \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial q_i} \bar{n} dA , \tag{2.22}$$

przekształca równanie (2.18) do postaci

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.23}$$

Z punktu widzenia praktycznego zastosowania metody Biota równanie (2.23) jest zbędne, gdyż do odbliczeń można wykorzystać równanie (2.17) przedstawione w postaci skalarowej, co przedstawione jest w przykładach do niniejszego artykułu.

Uwzględniając analogię (2.6), tj. $\bar{\mathbf{w}}_\nu \leftrightarrow -\dot{\bar{\mathbf{H}}}$, oraz wynikającą z niej następną $\bar{\mathbf{v}} \leftrightarrow -\bar{\mathbf{H}}$, należy zauważyć, że metoda Biota określona równaniem (2.18) jest odpowiednikiem zasady Jourdaina w mechanice analitycznej, która określona jest przez równanie [15]

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\bar{\mathbf{F}}_\nu - m_\nu \bar{\mathbf{w}}_\nu) \delta \bar{\mathbf{v}}_\nu = 0 . \tag{2.24}$$

Do tego samego wniosku, ale nieco inną drogą dochodzi Samojłowicz [11].

Z przedstawionych powyżej rozważań wynika, że pierwszy z rozważanych przypadków, tj. przypadek równania (2.10), sprowadza się do wariacyjnej metody Biota. Z kolei rozważony zostanie dokładniej drugi przypadek określony równaniem (2.11).

Biorąc pod uwagę równania (2.12) i (2.2) pole temperatury można wyrazić w postaci

$$\mathring{T} = T(q_1, q_2, ..., q_n, x, y, z, t) . \tag{2.25}$$

W równaniu (2.11) jako zmienne niezależne podlegające wariacji przyjmuje się parametry q_i (współrzędne uogólnione), a zatem

$$\delta(\operatorname{grad} T) = \operatorname{grad}(\delta T) = \operatorname{grad} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i. \tag{2.26}$$

Podstawiając (2.26) do (2.11) i uwzględniając, że δq_i są dowolne oraz że $\lambda = \text{const}$, otrzymuje się układ n równań różniczkowych liniowych, z których wyznacza się n parametrów q_i:

$$\int_V \left(\operatorname{grad} T + \frac{\dot{\mathbf{H}}}{\lambda} \right) \operatorname{grad} \frac{\partial T}{\partial q_i} dV = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.27}$$

Powyższe równania oraz (2.17) stanowią układ równań różniczkowych wykorzystywanych w obliczeniach praktycznych, dlatego też wydaje się celowe przedstawienie równań (2.17) i (2.27) w postaci skalarnej. Rozważania ograniczone zostaną do jednowymiarowego równania przewodzenia ciepła. Równanie (2.1) ma wówczas postać

$$\frac{\lambda}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^p \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2.28}$$

gdzie $p = 0$ dla płyty, $p = 1$ dla cylindra oraz $p = 2$ dla kuli.

Równanie (2.2) napisane dla rozważanego przypadku sprowadza się do równania

$$c\rho T = -\frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} (r^p H), \qquad \mathbf{H} = (H, 0, 0), \tag{2.29}$$

a równanie różniczkowe (2.3) przyjmuje postać

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{2.30}$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności układom równań różniczkowych (2.17) i (2.27) można dodać inną postać:

układowi równań (2.17)

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) r^p \, dr = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{2.31}$$

oraz układowi równań (2.27)

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial t} \right) \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial q_i} r^p \, dr = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.32}$$

Pole temperatury aproksymuje się zwykle wielomianem m-tego stopnia:

$$T = \sum_{i=0}^{m} b_i(t) \, r^i. \tag{2.33}$$

Podobnie jak w metodzie Biota oraz bilansu cieplnego [20 i 21] przy wyznaczaniu współczynników $b_0, b_1, ..., b_m$ wykorzystane zostanie pojęcie głębokości wnikania ciepła [3 i 20], która jest parametrem pomocniczym (współrzędną uogólnioną) wyznaczaną z równania (2.31) lub z równania (2.32). Trzy współczynniki b_0, b_1 i b_2 można wyznaczyć z warunków brzegowych. Przykładowo, jeśli rozpatrujemy półprzestrzeń lub pierwszą fazę wnikania ciepła w ściance płaskiej [20], to stałe te wyznacza się z warunku brzegowego na granicy półprzestrzeni lub na powierzchni ścianki oraz z warunków wynikających z definicji głębokości wnikania ciepła:

$$T(x=\delta)=0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(x=\delta)=0.$$

Pozostałe współczynniki wyznaczane są w tzw. warunków gładkości krzywej aproksymującej rozkład temperatury w punkcie o współrzędnej $x=\delta$

$$\left.\frac{\partial^s T}{\partial x^s}\right|_{x=\delta}=0, \quad s=2, 3, ..., m-2. \tag{2.34}$$

Jeżeli w (3.33) $m=2$, to warunki (3.34) są zbędne. W przypadku płyty jednostronnie izolowanej lub walca i kuli ogrzewanej lub chłodzonej z zewnątrz, warunek (3.34) może być również stosowany w drugiej fazie wnikania ciepła w przypadku, gdy $m>2$. Jeżeli przeciwległa ścianka płyty lub kuli i walca wydrążonego nie jest izolowana, to należy ograniczyć się do $m=2$ [22].

W przypadku współrzędnych cylindrycznych i sferycznych aproksymacja pola temperatury wielomianem (2.33) nie zapewnia dostatecznej dokładności [23 i 24] i do (2.33) należy dodać $b_{m+1} \ln r$ [24] w przypadku współrzędnych cylindrycznych oraz b_{m+1}/r w przypadku współrzędnych sferycznych [26]. Należy zwrócić uwagę, że wówczas powinien być spełniony warunek $r>0$.

W dalszej części pracy przedstawione zostanie praktyczne zastosowanie przedstawionej metody a także analiza jej dokładności.

3. Przykład zastosowania metody

Określone zostanie przybliżone pole temperatury w półprzestrzeni na granicy, której dany jest strumień cieplny zależny od czasu t i temperatury powierzchni półprzestrzeni T_s, a więc przy warunku brzegowym

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=f(T_s, t) \tag{3.1}$$

oraz przy warunku początkowym

$$T(x, 0)=0. \tag{3.2}$$

Stosując technikę zaproponowaną przaz Lardnera [27] oraz Rafalskiego i Żyszkowskiego [28, 29, 30 i 31] wprowadzone zostaną dwa parametry pomocnicze: temperatura powierzchni półprzestrzeni T_s oraz głębokość wnikania ciepła δ, przy czym tylko jeden z nich będzie traktowany jako niezależny, ponieważ obydwa parametry związane są warunkiem brzegowym (3.1).

Pole temperatury aproksymowane zostanie wielomianem (2.33). Współczynniki b_i wyznaczone zostaną z warunków brzegowych

$$T(0,t)=T_s, \quad T(\delta,t)=0, \quad -\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=\delta}=0 \tag{3.3}$$

oraz z warunków głębokości (2.34).

Podstawiając wyznaczone w ten sposób współczynniki b_i do (2.33) pole temperatury można przedstawić w postaci

$$T(x,t)=T_s\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^m, \qquad 0\leqslant x\leqslant\delta, \qquad t>0. \tag{3.4}$$

Po podstawieniu (3.4) do warunku brzegowego (3.1) otrzymuje się zależność między T_s i δ:

$$m\lambda T_s=\delta f(T_s,t). \tag{3.5}$$

Podstawiając (3.4) do (3.1) ($p=0$) otrzymuje się po uwzględnieniu warunku $H|_{x=\delta}=0$

$$H=\frac{\rho c T_s\delta}{m+1}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^{m+1}. \tag{3.6}$$

Najpierw wykorzystany zostanie układ równań (2.32), który w danym przypadku redukuje się do jednego równania. Jako zmienna niezależna traktowana jest temperatura na granicy półprzestrzeni, a więc $q_1=T_s$.

Równanie (2.32) ma więc postać

$$\int_0^\delta\left(\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial H}{\partial t}\right)\frac{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial T_s}dx=0. \tag{3.7}$$

Uwzględniając, że

$$\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{mT_s}{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^{m-1},$$
$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{a(m+1)}\left[(\dot{T}_s\delta+\dot{\delta}T_s)\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^{m+1}+\frac{(m+1)T_s x}{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^m\dot{\delta}\right] \tag{3.8}$$

oraz

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial T_s}=-\frac{m}{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^{m-1} \tag{3.9}$$

i podstawiając (3.8) i (3.9) do (3.7) otrzymuje się równanie różniczkowe

$$\frac{1}{(m+1)(2m+1)}T_s\dot{T}_s+\frac{3m+1}{2m(m+1)(2m+1)}\frac{T_s^2\dot{\delta}}{\delta}=\frac{ma}{2m-1}\frac{T_s^2}{\delta^2}. \tag{3.10}$$

Z równania (3.10) wyeliminowane zostaną δ i $\dot{\delta}$. Z (3.5) wynika

$$\delta = \frac{m\lambda T_s}{f(T_s, t)}. \tag{3.11}$$

Różniczkując (3.11) względem czasu otrzymuje się

$$\dot{\delta} = \frac{1}{f}\left[m\lambda \dot{T}_s - \frac{m\lambda T_s}{f}(f' \dot{T}_s + \dot{f})\right], \tag{3.12}$$

gdzie $f' = \partial f / \partial T_s$.

Przekształcając (3.10) za pomocą (3.11) i (3.12) otrzymuje się

$$\frac{5m+1}{2m(m+1)(2m+1)} T_s \dot{T}_s - \frac{3m+1}{2m(m+1)(2m+1)} \frac{T_s^2}{f} \times (f' \dot{T}_s + \dot{f}) = \frac{a}{m(2m-1)} \frac{f^2}{\lambda^2}. \tag{3.13}$$

W dalszej części pracy z równania (3.13) wyznaczona zostanie temperatura T_s.

Jako następny przypadek rozważone zostanie równanie (2.32), gdy zmienną niezależną będzie głębokość wnikania ciepła, tj. gdy $q_1 = \delta$.

Równanie (2.32) ma wówczas postać

$$\int_0^\delta \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial H}{\partial t}\right) \frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial \delta} dx = 0. \tag{3.14}$$

Rozpatrzony zostanie przypadek, gdy $m=3$, podobnie jak w pracach [8, 13, 21 i 27]:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial \delta} = \frac{3T_s}{\delta^2}\left(1 - \frac{x}{\delta^2}\right)^2 - \frac{3T_s}{\delta^3}\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)x, \tag{3.15}$$

a następnie podstawiając wraz z zależnościami (3.8) (dla $m=3$) do (3.14) otrzymuje się równanie różniczkowe, które po wyeliminowaniu z niego δ i $\dot{\delta}$ za pomocą (3.11) i (3.12) ma postać

$$11 T_s \dot{T}_s - 6 \frac{T_s^2}{f}(f' \dot{T}_s + \dot{f}) = 7a \frac{f^2}{\lambda^2}. \tag{3.16}$$

Następnie ten sam problem co w poprzednich dwóch przypadkach przeanalizowany zostanie z wykorzystaniem równania (2.31), czyli zastosowana zostanie metoda Biota.

Rozważania przeprowadzone zostaną przy $m=3$ zarówno w przypadku, gdy zmienną niezależną będzie T_s jak i δ.

Najpierw zmienną niezależną będzie T_s. Wówczas równanie (2.31) ma postać

$$\int_0^\delta \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial H}{\partial t}\right) \frac{\partial H}{\partial T_s} dx = 0. \tag{3.17}$$

Wyznaczając

$$\frac{\partial H}{\partial T_s}=\frac{\rho c\delta}{4}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^4, \tag{3.18}$$

a następnie podstawiając wraz z (3.8) do (3.17) po wykonaniu operacji identycznych do poprzednich przypadków otrzymuje się równanie różniczkowe

$$35T_s\dot{T}_s-21\frac{T_s^2}{f}(f'\dot{T}_s+\dot{f})=24a\frac{f^2}{\lambda^2}. \tag{3.19}$$

Jako ostatnie przypadek zastosowane zostanie równanie (2.31), gdy zmienną niezależną będzie δ.

Równanie (2.31) sprowadza się do równania

$$\int_0^\delta\left(\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial H}{\partial t}\right)\frac{\partial H}{\partial\delta}dx=0. \tag{3.20}$$

Wyznaczając na podstawie wzoru (3.6)

$$\frac{\partial H}{\partial\delta}=\frac{\rho cT_s}{4}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^4+\frac{\rho cT_s}{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^3x \tag{3.21}$$

i postępując podobnie jak w poprzednich przypadkach, otrzymuje się równanie następujące:

$$19T_s\dot{T}_s-12\frac{T_s^2}{f}(f'\dot{T}_s+\dot{f})=\frac{40a}{3}\frac{f^2}{\lambda^2}. \tag{3.22}$$

Łatwo zauważyć, że otrzymane we wszystkich rozważanych przypadkach równania różniczkowe różnią się tylko stałymi współczynnikami. Zatem równania (3.13), (3.16), (3.19) i (3.22) można przedstawić jednym równaniem:

$$AT_s\dot{T}_s-B\frac{T_s^2}{f}(f'\dot{T}_s+\dot{f})=\frac{Caf^2}{\lambda^2}. \tag{3.23}$$

Równanie (3.23) rozwiązane zostanie dla kilku szczególnych przypadków.

Przypadek I. $f=f_0=\text{const.}$

W tym przypadku równanie (3.23) ma znacznie prostszą formę:

$$AT_s\dot{T}_s=Ca\frac{f^2}{\lambda^2}, \tag{3.24}$$

gdyż $f'=0$ i $\dot{f}=0$.

Całkując równanie (3.24) przy warunku początkowym $T_s|_{t=0}=0$ otrzymuje się

$$T_s=\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{\frac{2C}{A}at}. \tag{3.25}$$

Zatem z równania (3.13) otrzymuje się uwzględniając (3.25) przy $m=3$ następujący wzór:

$$T_s=1{,}1832\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{at},\quad \text{gdyż}\quad A=\frac{4}{42},\quad C=\frac{1}{15};$$

przy $m=4$

$$T_s=1{,}1066\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{at}.$$

Z równania (3.16) ($m=3$) znajdziemy

$$T_s=1.1282\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{at},\quad \text{gdyż}\quad A=11,\quad C=7,$$

Z równania (3.19)

$$T_s=1{,}1711\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{at},\quad \text{gdyż}\quad A=35,\quad C=24$$

oraz z równania (3.22)

$$T_s=1{,}1847\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{at},\quad \text{gdyż}\quad A=19,\quad C=\frac{40}{3}.$$

Rozwiązanie dokładne wynosi [34]

$$T_s=1{,}1284\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{at}.$$

W celu porównania przedstawione zostanie kilka wyników otrzymanych innymi metodami.

GOODMAN [21] stosując metodę bilansu cieplnego otrzymuje przy $m=2$

$$T_s=1{,}2247\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{at},$$

przy $m=3$

$$T_s=1{,}1547\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{at}.$$

VALLERANI [32] stosując również metodę bilansu cieplnego i wykładniczy profil temperatury otrzymuje

$$T_s=1{,}0\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{at}.$$

LEBON i CASAS-VAZQUEZ [33] stosując metodę bardzo zbliżoną do metody lokalnego potencjału [2 i 4] oraz wykładniczy profil temperatury otrzymują

$$T_s=1{,}1747\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{at}$$

oraz VUJANOVIC w pracy [13]

$$T_s=1{,}1269\frac{f_0}{\lambda}\sqrt{at}.$$

Z przedstawionego zestawienia wynika, że wszystkie przedstawione tu wzory dobrze aproksymują rozwiązanie dokładne.

Przypadek II. $f=f(t)$.

W tym przypadku równanie (3.13) ma postać

$$A T_s \dot{T}_s - B \frac{T_s^2}{f} \dot{f} = C a \frac{f^2}{\lambda^2}, \tag{3.26}$$

ponieważ $f'=0$. Równanie (3.26) rozwiązane zostanie dla przypadku gdy $f=f_0 t^{\frac{n}{2}}$.

Uwzględniając warunek początkowy $T_s|_{t=0}=0$ znajdziemy następujące rozwiązanie (3.26):

$$T_s = \frac{f_0 t^{\frac{1}{2}n}}{\lambda} \sqrt{at} \left(\frac{2C}{A\left[n\left(1-\frac{B}{A}\right)+1\right]} \right)^{1/2}. \tag{3.27}$$

Wprowadzając temperaturę bezwymiarową T_s^*, (3.27) można przedstawić ją w następującej postaci:

$$T_s^* = \frac{T_s \lambda}{f\sqrt{at}} = \left(\frac{2C}{n(A-B)+A} \right)^{1/2}. \tag{3.28}$$

Wyznaczając T_s^* z (3.28), otrzymujemy kolejno: dla równania (3.13)

$$T_s^* = \left(\frac{4(m+1)(2m+1)}{(2m-1)(2nm+5m\ 1)} \right)^{1/2}, \tag{3.29}$$

dla równania (3.16)

$$T_s^* = \left(\frac{14}{5n+11} \right)^{1/2},$$

dla równania (3.19)

$$T_s^* = \left(\frac{48}{14n+35} \right)^{1/2},$$

oraz dla równania (3.22)

$$T_s^* = \left(\frac{80}{21n+57} \right)^{1/2}.$$

Rozwiązanie dokładne [34] jest następujące:

$$T_{sd}^* = \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)}, \tag{3.30}$$

gdzie Γ oznacza funkcję gamma Eulera.

Dla porównania przytoczone zostaną wyniki otrzymane innymi metodami.

Metoda bilansu cieplnego daje

$$T_s^* = \left(\frac{2(m+1)}{m(n+2)} \right)^{1/2}. \tag{3.31}$$

VALLERANI [32] stosując metodę bilansu cieplnego i wykładniczy profil temperatury otrzymuje

$$T_s^* = \left(\frac{2}{n+2}\right)^{1/2}.$$

LEBON i CASAS-VAZQUEZ [33] znaleźli

$$T_s^* = \left(\frac{1{,}38}{1+\frac{n}{2}\cdot 0{,}5959}\right)^{1/2},$$

a VUJANOVIC [13]

$$T_s^* = \left(\frac{80}{36n+63}\right)^{1/2}.$$

W tablicy 1 przedstawiono porównanie rozwiązań przybliżonych z dokładnym.

Tablica 1. Porównanie bezwymiarowej temperatury granicy półprzestrzeni T_s^* obliczonej wg zależności przybliżonych z wartościami dokładnymi T_{sd}^*, gdy na granicy półprzestrzeni dany jest strumień cieplny określony zależnością $-\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=0} = f_0 t^{\frac{n}{2}}$

Autorzy (praca)	Profil temperatury	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
Rozwiązanie dokładne [34]		1,1284	0,8862	0,7523	0,6647	0,6018
Niniejsza praca (3.13)	(3.4), $m=3$	1,1832	1,0090	0,8944	0,8117	0,7483
	(3.4), $m=4$	1,1066	0,9416	0,8337	0,7559	0,6965
	(3.4), $m=5$	1,0622	0,9027	0,7985	0,7237	0,6667
	(3.4), $m=6$	1,0332	0,8772	0,7757	0,7028	0,6472
	(3.4), $m=3{,}6478$	1,1284	0,9608	0,8510	0,7718	0,7113
Niniejsza praca (3.16)	(3.4), $m=3$	1,1282	0,9354	0,8165	0,7338	0,6720
Niniejsza praca (3.19) (m. Biota)	(3.4), $m=3$	1,1711	0,9897	0,8729	0,7895	0,7263
Niniejsza praca (3.22) (m. BIOTA)	(3.4), $m=3$	1,1847	1,0127	0,8989	0,8165	0,7532
VALLERANI [32]	$T=T_s e^{-\frac{x}{\delta}}$	1,0000	0,8165	0,7071	0,6325	0,5774
LEBON i CASAS-VAZAQEZ [33]	$T=qe^{-(fx+1)^2}$	1,1747	1,0311	0,9299	0,8536	0,7935
VUJANOVIC [13]	(3.4), $m=3$	1,1269	0,8989	0,7698	0,6840	0,6218
Metoda bilansu cieplnego	(3.4), $m=2$	1,2247	1,0000	0,8660	0,7746	0,7071
	(3.4), $m=3$	1,1547	0,9428	0,8165	0,7303	0,6667
	(3.4), $m=4$	1,1180	0,9129	0,7906	0,7071	0,6455
	(3.4), $m=5$	1,0954	0,8944	0,7746	0,6928	0,6325
	(3.4), $m=6$	1,0801	0,8819	0,7638	0,6831	0,6236
	(3.4), $m=3{,}6592$	1,1284	0,9213	0,7979	0,7137	0,65148

Z przytoczonego porównania wynika, że dokładność danej metody zależy również od wykładnika m, co przedstawiono na przykładzie rozwiązania równania (3.13) a także rozwiązania otrzymanego za pomocą metody bilansu cieplnego. Jeżeli za kryterium dokładności przyjąć odchylenie przybliżonej temperatury powierzchni półprzestrzeni od temperatury powierzchni otrzymanej z rozwiązania dokładnego, to w rozważanym przypadku łatwo wyznaczyć taką wartość $m=m_{\rm opt}$, aby na powierzchni półprzestrzeni temperatura przybliżona równała się dokładnej przy danym n. Optymalną wartość m otrzymuje się z równania

$$T_s^* = T_{sd}^*.$$

Z porównania (3.29) z (3.30) wynika, że

$$m_{\rm opt} = \frac{(2n+3)\,T_{sd}^{*2} + \sqrt{\Delta}}{2[T_{sd}^{*2}(4n+10)-8]}, \tag{3.32}$$

gdzie

$$\Delta = [(2n+3)\,T_{sd}^{*2}+12]^2 + 4\,[T_{sd}^{*2}(4n+10)-8]\,(T_{sd}^{*2}+4),$$

T_{sd}^* określa zależność (3.30).

Z (3.32) otrzymuje się $m_{\rm opt}=3{,}6478$ dla $n=0$, $m_{\rm opt}=5{,}6031$ dla $n=1$. Podobnie można wyznaczyć $m_{\rm opt}$ dla innych n.

Postępując podobnie jak wyżej, w przypadku rozwiązania (3.31) otrzymanego za pomocą metody bilansu cieplnego znajdziemy

$$m_{\rm opt} = \frac{2}{(n+2)\,T_{sd}^{*2}-2}; \tag{3.33}$$

$m_{\rm opt}=3{,}6592$ dla $n=0$, $m_{\rm opt}=5{,}6172$ dla $n=1$, $m_{\rm opt}=7{,}5809$ dla $n=2$.

Przy wykładniku $m_{\rm opt}$ temperatura powierzchni półprzestrzeni przybliżona i dokładna są sobie równe przy danym n.

Przypadek III. $f=f(T_s)$.

W tym przypadku $\dot{f}=0$ i równanie (3.23) po scałkowaniu stronami ma postać

$$\int\limits_0^{T_s} \frac{AT_s f - BT_s^2 f'}{Cf^3}\, dT_s = \frac{at}{\lambda^2}. \tag{3.34}$$

Najpierw rozważone zostaną nieliniowe warunki brzegowe postaci

$$f(T_s) = H(T_s+T_0)^n = HT_0^n\left(\frac{T_s}{T_0}+1\right)^n, \quad n>1, \tag{3.35}$$

gdzie H jest stałą Stefana-Boltzmana.

Wprowadzając oznaczenie

$$\mu = \frac{T_s}{T_0}+1 \tag{3.36}$$

i podstawiając (3.35) do (3.34), po scałkowaniu otrzymuje się

$$\left[\frac{A-Bn}{-2n+2}\mu^{-2n+2}-\frac{A-2Bn}{-2n+1}\mu^{-2n+1}+\frac{B}{2}\mu^{-2n}\right]\Bigg|_1^{\mu}=\frac{CH^2T_0^{2n-2}}{\lambda^2}at, \quad n>1. \tag{3.37}$$

W przypadku gdy $n=4$, (3.37) redukuje się do

$$\frac{4B-A}{6C}\mu^{-6}+\frac{A-8B}{7C}\mu^{-7}+\frac{B}{2C}\mu^{-8}+\frac{A-B}{42C}=\frac{H^2T_0^6}{\lambda^2}at. \tag{3.38}$$

Poszczególne równania, po podstawieniu wartości A, B i C do (3.38), przyjmują postać:

równanie (3.13), $m=3$

$$\frac{5}{14}\mu^{-6}-\frac{40}{49}\mu^{-7}+\frac{25}{56}\mu^{-8}+\frac{5}{392}=\frac{H^2T_0^6}{\lambda^2}at; \tag{3.39}$$

równanie (3.16)

$$\frac{13}{42}\mu^{-6}-\frac{37}{49}\mu^{-7}+\frac{3}{7}\mu^{-8}+\frac{5}{294}=\frac{H^2T_0^6}{\lambda^2}at; \tag{3.40}$$

równanie (3.19)

$$\frac{49}{144}\mu^{-6}-\frac{133}{148}\mu^{-7}+\frac{7}{16}\mu^{-8}+\frac{1}{72}=\frac{H^2T_0^6}{\lambda^2}at; \tag{3.41}$$

równanie (3.22)

$$\frac{29}{80}\mu^{-6}-\frac{33}{40}\mu^{-7}+\frac{9}{20}\mu^{-8}+\frac{1}{80}=\frac{H^2T_0^6}{\lambda^2}at. \tag{3.42}$$

Z równania (3.37) łatwo otrzymać rozwiązania rozważanego przypadku przy innych niż podane wartościach n. GOODMAN [21] stosując metodę bilansu cieplnego otrzymuje

$$\frac{1}{4}\mu^{-6}-\frac{9}{14}\mu^{-7}+\frac{3}{8}\mu^{-8}+\frac{1}{36}=\frac{H^2T_0^6}{\lambda^2}at \tag{3.43}$$

oraz VUJANOVIC [13]

$$\frac{3}{140}+\frac{3}{16}\mu^{-6}-\frac{153}{280}\mu^{-7}+\frac{27}{80}\mu^{-8}=\frac{H^2T_0^6}{\lambda^2}at. \tag{3.44}$$

Wszystkie przedstawione wyżej wyniki dobrze przybliżają rozwiązanie dokładne [34].

W przypadku gdy na powierzchni półprzestrzeni dany jest warunek brzegowy

$$f=H(T_s-T_0)^n=HT_0^n\left(\frac{T_s}{T_0}-1\right)^n, \quad n>1 \tag{3.45}$$

i gdy wprowadzimy oznaczenie

$$\eta'=\frac{T_s}{T_0}-1, \tag{3.46}$$

to zamiast równania (3.37) otrzymujemy

$$\left[\frac{A-Bn}{-2n+2}\eta'^{-2n+2}+\frac{A-2Bn}{-2n+1}\eta'^{-2n+1}+\frac{B}{2}\eta'^{-2n}\right]\Bigg|_{-1}^{\eta'}=\frac{CH^2T_0^{2n-2}}{\lambda^2}at, \quad n>1. \tag{3.47}$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku na podstawie (3.47) można wyznaczyć równania określające η' przy różnych n.

Przypadek III obejmuje również warunki brzegowe III rodzaju, tj. gdy wymiana ciepła między powierzchnią półprzestrzeni a stykającym się z nią medium odbywa się na drodze konwekcji. Wtędy

$$f(T_s)=\alpha(T_0-T_s)=\alpha T_0\left(1-\frac{T_s}{T_0}\right). \tag{3.48}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\eta=1-\frac{T_s}{T_0}, \tag{3.49}$$

z równania (3.34) otrzymuje się

$$\frac{A-B}{C}\ln\eta-\frac{2B-A}{C}\frac{1}{\eta}+\frac{B}{2C}\frac{1}{\eta^2}+\frac{3B-2A}{2C}=\frac{\alpha^2}{\lambda^2}at. \tag{3.50}$$

Równanie (3.50) prowadzi w przypadku równania (3.13) dla $m=3$ do równania

$$\frac{15}{28}\ln\eta-\frac{5}{14}\frac{1}{\eta}+\frac{25}{56}\frac{1}{\eta^2}-\frac{5}{56}=\frac{\alpha^2}{\lambda^2}at; \tag{3.51}$$

w przypadku równania (3.16)

$$\frac{5}{7}\ln\eta-\frac{1}{7}\frac{1}{\eta}+\frac{3}{7}\frac{1}{\eta^2}-\frac{2}{7}=\frac{\alpha^2}{\lambda^2}at; \tag{3.52}$$

w przypadku równania (3.19)

$$\frac{7}{12}\ln\eta-\frac{7}{24}\frac{1}{\eta}+\frac{7}{16}\frac{1}{\eta^2}-\frac{7}{48}=\frac{\alpha^2}{\lambda^2}at; \tag{3.53}$$

w przypadku równania (3.22)

$$\frac{21}{40}\ln\eta-\frac{3}{8}\frac{1}{\eta}+\frac{9}{20}\frac{1}{\eta^2}-\frac{3}{40}=\frac{\alpha^2}{\lambda^2}at. \tag{3.54}$$

Razelos w pracy [35] otrzymuje

$$\frac{1}{12}\left[\frac{N(N+6)}{2}-9\ln\left(\frac{N+3}{3}\right)\right]=\frac{\alpha^2}{\lambda^2}at,$$

gdzie $N=\alpha\delta/\lambda$ oznacza liczbę Biota oraz

$$\eta=1-\frac{N}{3+N}=\frac{3}{3+N}.$$

W pracy Vujanovica [13] mamy

$$\frac{27}{80}\frac{1}{\eta^2}+\frac{9}{40\eta}+\frac{9}{10}\ln\eta-\frac{9}{16}=\frac{\alpha^2}{\lambda^2}at.$$

W tablicy 2 porównano wartości T_s/T_0 otrzymane ze wzorów (3.52) i (3.54) z wartościami dokładnymi obliczonymi wg wzoru [34]

$$\left(\frac{T_s}{T_0}\right)_d=1-\exp\frac{\alpha^2}{\lambda^2}at\Big)\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha^2}{\lambda^2}at\right)^{1/2}. \tag{3.55}$$

Wartości funkcji $\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x$ brano z tablic [36]. Błąd aproksymacji wyznaczano wg wzoru

$$R=\frac{\left(\frac{T_s}{T_0}\right)_d-\left(\frac{T_s}{T_0}\right)}{\left(\frac{T_s}{T_0}\right)_d}\cdot 100\,[\%].$$

Tablica 2. Porównanie rozwiązań przybliżonych z rozwiązaniem dokładnym w przypadku, gdy na granicy półprzestrzeni dane są warunki brzegowe III rodzaju

Rozwiązanie dokładne	Rozwiązania przybliżone				$\frac{\alpha^2}{\lambda^2}at$
	Równanie (3.52)		Równanie (3.54) (Metoda Biota)		
$\left(\frac{T_s}{T_0}\right)_d$	$\frac{T_s}{T_0}$	$R\,[\%]$	$\frac{T_s}{T_0}$	$R\,[\%]$	
0,09794	0,0973	0,653	0,1015	−3,635	0,00886
0,1979	0,1955	1,213	0,2025	−2,324	0,0435
0,4029	0,3944	2,11	0,4030	−0.025	0,2885
0,6118	0,5959	2,60	0,6019	1,618	1,3385
0,8155	0,7991	2,01	0,8002	1,876	8,4706

Z przedstawionej tablicy wynika, że wzory przybliżone bardzo dobrze aproksymują rozwiązanie dokładne.

4. Wnioski

Zastosowanie zasady Gaussa do przekształconego przez Biota równania przewodzenia ciepła prowadzi do dwóch niezależnych od siebie metod, z których jedna jest dobrze znaną metodą Biota. Ze względu na prosty wybór zmiennych niezależnych, względem których minimalizowany jest funkcjonał Z określony wzorem (2.5), przedstawiona metoda jest bardzo prosta w zastosowaniach praktycznych.

Z przedstawionych przykładów wynika, że dokładność metody jest dobra. Można również zauważyć, że dokładność wyników w przypadku, gdy Z minimalizowany jest względem parametrów q_i jest nie mniejszą od dokładności, gdy Z jest minimalizowany względem $\dot{q}_i$, tzn. w metodzie Biota.

Literatura cytowana w tekście

1. Л. А. Коздоба, *Методы решения нелинейных задач теплопроводности*, Изд. Наука, Москва 1975.
2. R. S. Schechter, *The variational method in engineering*, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1967.
3. M. A. Biot, *Variational principles in heat transfer, A unified Lagrangian analysis of dissipative phenomena*, Clarendon Press, Oxford 1970.
4. P. Glansdorff, I. Prigogine, *Thermodynamic theory of structure, stability and flucutations*, Wiley — Interscience, London 1971.
5. I. Gyarmati, *Non-equilibrium thermodynamics, field theory and variational principles*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970.
6. B. Vujanovic, *An approach to linear and nonlinear heat transfer problem using a Lagrangian*, AIAA Journal, **9**, 1, 1971.
7. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Физматгиз, Москва 1962.
8. B. Vujanovic, *Heat transfer with nonlinear boundary conditions via a variational principle*, AIAA Journal, **9**, 2, 197
9. D. Djukic, B. Vujanovic, *On a new variational principle of Hamiltonian type for classica field theory*, ZAMM, **51**, 611–616, 1971.
10. B. Vujanovic, D. Djukic, *On one variational principle of Hamilton's type for nonlinear heat transfer problem*, Int. J. Heat Mass Transfer, **15**, 5, 1972.
11. Ю. А. Самойлович, *Принцип Гаусса в теории теплопроводности*, Теплофизика Высоких Температур, 12, 2, 1974.
12. И. Дярматы, *Об общем вариационном принципе неравновесной термодинамики*, Журнал Физической Химии, **39**, 6, 1965.
13. B. Vujanovic, B. Baclic, *Applications of Gauss's principle of least constraint to the nonlinear heat — transfer problem*, Int. J. Heat Mass Transfer, **19**, 7, 1976.
14. C. Lanczo , *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press, Toronto 1962.
15. R. Gutowski, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
16. L. Ousager, *Reciprocal relations in irreversible processes*, I. Phys. Rev., **37**, 405–426, 1931.
17. A. Stark, *Approximation methods for the solution of heat conduction problems using Gyamati's principle*, Annalen der Physik, **7**, 31, 1, 53–75, 1974.
18. B. A. Finlayson, *The method od weighted residuals and variational principles*, Academic Press, New York 1972.
19. B. Krajewski, *On a direct variational method for nonlinear heat transfer*, Int. J. Heat Mass Transfer, **18**, 495–502, 1975.
20. M. A. Biot, *New methods in heat flow analysis with application to flight structures*, J. Aeronaut. Sci., **24**, 857–873, 1957.
21. T. R. Goodman, *Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer* in: Advances in Heat Transfer, 1, Academic Press, New York 1964.
22. J. Taler, K. Rup, *Zastosowanie metody bilansu cieplnego do określenia nieustalonego pola temperatur i naprężeń w ściance płaskiej*, Inżyn. Chem., **3**, 1976.
23. T. J. Lardner, F. V. Pohle, *Application of the heat balance integral to problems of cylindrical geometry*, J. Appl. Mech., **28**, 310–312, 1961.
24. T. J. Lardner, *Approximate heat conduction solutions for nonplanar geometric*, J. Heat Transfer, **3**, 423–425, 1965.
25. Б. А. Красовицкий, Ф. С. Попов, *Температурный режим горных выработок*, Инженерно-физический Журнал, 31, 2, 1976.
26. C. W. Bowman, D. M. Ward, A. I. Johnson, O. Trass, *Mass transfer from fluid and solid spheres at low Reynolds numbers*, Can J. Chem. Eng., **39**, 9–13, 1961.
27. T. J. Lardner, *Biot's variational principle in heat conduction*, AIAA Journal, **1**, 1, 1963.

28. P. Rafalski, W. Żyszkowski, *Lagrangian approach to the nonlinear boundary heat transfer problem*, AIAA Journal, **6**, 8, 1968.
29. P. Rafalski, W. Żyszkowski, *On the variational principles for hea conduction problem*, AIAA Journal, 7, 606–609, 1969.
30. W. Żyzkowki, *The transient temperature distribution in one-dimensional heat conduction problems with nonlinear boundary conditions*, J. Heat Transfer, **2**, 77–82, 1969.
31. W. Żyzkowski, *The transient temperature distribution in a slab subjected to radiative and convective heating calculated by variational method*, Int. J. Heat Mass Transfer, **16**, 917–932, 1973.
32. E. Vallerani, *Integral technique solutions to a class of simple ablation problems*, Meccanica, 2, 1974.
33. G. Lebon, J. Casas-Vazquez, *Lagrangian formulation of unsteady non-linear heat transfer problems*, J. Eng. Mathematics, **8**, 1, 1974.
34. H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford 1959,
35. P. Razelo?, *Methods of obtaining approximate solutions*, in: Handbook of heat transfer. W. M. Rohsenowa, J. P. Hartnett'a, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1973.
36. *Таблицы вероятностных функций*, Том 2, Вычислительный Центр АН СССР, Москва 1970.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В статье представлен метод приближённого решения уравнений теплопродовности основанный на применении принципа Гаусса к уравнению теплопроводности, использованному в вариационном методе Био. Минимализируя термодинамический аналог функционала Гаусса, получены два независимые метода, один из которых является вариационным методом Био.

В качестве примера использования предложенного метода, определено приближённое, распределение температуры в полупространстве, на границе которого задан тепловой поток зависящий нелинейно от темпераратуры границы полупространства и времени.

Полученные результаты хорошо апрксимируют точные решения.

Summary

APPLICATION OF GAUSS'S PRINCIPLE OF LEAST CONSTRAINT TO APPROXIMATE SOLUTION OF HEAT CONDUCTION EQUATION

The method presented in this paper is based on the application of the Gauss's principle to heat conduction equation transformed by Biot, i.e. to Fourier's law of conduction relating the heat flux $\dot{H}$ to the temperature gradient.

Minimizing a functional associated with the transformed heat conduction equation two independent methods are obtained. One of these methods is equivalent to Biot's variational principle. The methods formulated here are used for the determination of the temperature distribution in semi-infinite body with a nonlinear boundary condition. The results are compared with exact solutions whenever they are available or with those obtained by other approximate methods like Goodman's, Vujanowic's etc. In all the cases, an agreement is very satisfactory.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 listopada 1976 r.