

BADANIA DYSKRETNO-CIĄGŁEGO UKŁADU MECHANICZNEGO O WŁASNOŚCIACH LOSOWYCH

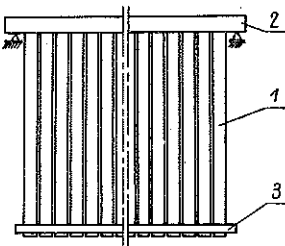
MARIAN S A R N A (BIELSKO-BIAŁA)

Praca stanowi kontynuację badań zawartych we wcześniejszych opracowaniach [4 i 5].

Dyskretno-ciągły układ mechaniczny złożony z pręta i szeregu oscylatorów harmoniczych, modelujący własności układu elektrod zbiorczych elektrofiltru, ma również pewne własności losowe. Uwzględniono losowość chwili zetknięcia mas dyskretnych z prętem oraz losowość zmian mas dyskretnych w czasie. Rozważania prowadzono zakładając, że przy wymuszeniu krótkotrwałym rozchodzą się jednowymiarowe, płaskie fale sprężyste. Wyznaczono wartości przeciętne i wariancję przemieszczeń oraz siły oddziaływania pręta na dowolną masę. Praca może znaleźć wykorzystanie w badaniach doświadczalnych nad własnościami elektrod zbiorczych oraz w ich projektowaniu.

WSTĘP

Elektrody zbiorcze elektrofiltru stanowią układ mechaniczny o złożonej strukturze geometrycznej oraz skomplikowanych własnościach fizycznych. Układ ten składa się z szeregu cienkościennej prętów (elektrod; rys. 1) zawieszonych wahadłowo w belce



Rys. 1. Układ el zbiorczych elektrofiltru

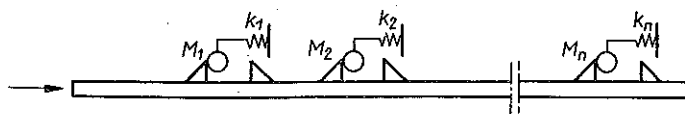
1 — elektroda zbiorcza, 2 — belka nośna, 3 — pręt wzbudzający

nośnej 2 oraz pręta 3 z otworami, w które luźno wchodzi elektrody 1. Podczas drgań układu wywołanych osiowym uderzeniem w pręt 3 następuje oddzielenie od elektrod pyłu zgromadzonego w wyniku elektrostatycznego osadzania. Mechanizm sił wiążących pył z elektrodami, jak i mechanizm oddzielania pyłu, są bardzo mało poznane. Nie są zbadane reologiczne własności pyłu na elektrodzie [1 i 2]. Mamy więc do analizy układ mechaniczny o ciągłym rozłożeniu mas, losowych warunkach początkowych (ustytuowanie początkowe), losowych zmianach masy i własności sprężystych elementów tegoż układu.

Podstawowym parametrem charakteryzującym funkcjonalność układu elektrod jest szczytowa wartość przyspieszeń, szczególnie przyspieszeń normalnych jako najbardziej efektywnych przy oczyszczaniu [2]. Wyznaczenie efektywne przyspieszeń wymaga odpowiedniego modelowania układu elektrod. W pracy [3] przyjęto model poszczególnej elektrody w formie cienkościennej pręta o profilu otwartym wg teorii Własowa. Otrzymane na tej podstawie równanie drgań skrętnych pręta nie było równaniem falowym i wyznaczenie przyspieszeń

przeprowadzono po uproszczeniu tego równania polegającym na sprowadzeniu go do dwóch równań hiperbolicznych.

W pracy [4] badano problem wyznaczania siły wymuszającej drgania w elektrodach przyjmując model podobny jak na rys. 2. Reakcję elektrody na pręt zastąpiono reakcją oscylatora harmonicznego. Przyjęto model zdeterminowany i rozpatrzono dla niego problem analizy syntezy optymalizacyjnej siły wzbudzającej drgania.



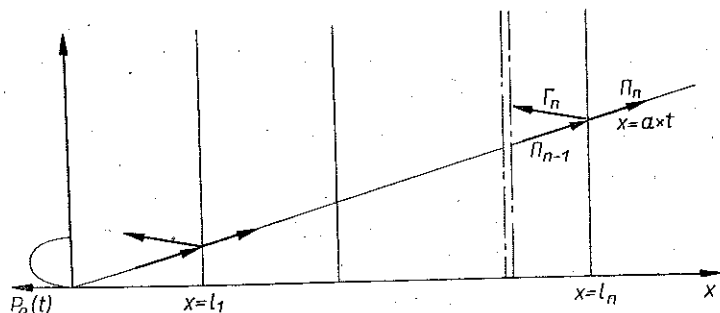
Rys. 2. Dyskretno-ciągły układ mechaniczny

W pracy [5] przeanalizowano takie same zagadnienie jak w pracy [4] z tym zastrzeżeniem, że w oddziaływaniu elektrod z prętem uwzględniono własności lepkosprężyste. Masy dyskretne połączone były ze sztywnym podłożem łącznikiem o własnościach modelu standardowego.

W niniejszej pracy przeanalizujemy własności modelu z rys. 2 przy założeniach podanych w pracach [4 i 5] oraz przyjmujemy, że warunki początkowe (położenie mas dyskretnych) są losowe, jak też że masy dyskretne maleją losowo w czasie. Przyjmujemy również, że korelacja wzajemna pomiędzy warunkami początkowymi różnych oscylatorów jest pomijalna.

1. DYSKRETNO-CIĄGŁY UKŁAD MECHANICZNY Z LOSOWYMI WARUNKAMI POCZĄTKOWYMI

Rozpatrzmy układ przedstawiony na rys. 2. Przyjmijmy na początek że masy dyskretne są stałe w czasie, warunki zaś początkowe losowe. Przyjmijmy również, że poprawne są założenia co do krótkotrwałości wymuszenia przyjmowane w pracach [4 i 5]: $2(l_n - l_{n-1}) \geq a\tau$, $2l_1 \geq a\tau$, tzn. pomijamy nakładanie się fal odbitych z falą



Rys. 3. Płaszczyzna fazowa badanego układu

padającą (rys. 3). Przy propagacji płaskiej, sprężystej, jednowymiarowej fali w przecię i stałym styku n -tej masy skupionej z prętem równanie ruchu masy ma postać [4]

$$(1.1) \quad \ddot{u}_n(t) + 2h\dot{u}_n(t) + \omega^2 u_n(t) = \frac{2}{M} \Pi_{n-1}(t),$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia: $h = \rho a s / M$, $\omega^2 = k / M$, $\lambda^2 = \omega^2 - h^2$ oraz gdzie a oznacza prędkość fali [m/s], $\Pi_{n-1}(t)$ ciśnienie na froncie fali dochodzącej do $x = l_n$ [N], S pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta [m²], M masę oscylatora [kg], k sztywność sprężyny [N/m] oraz ρ gęstość materiału [kg/m³]. Czas t mierzymy od chwili dotarcia fali do $x = l_n$ (rys. 3), tzn. $t = \bar{t} - x/a$ dla $x = l_n$. Równanie (1.1) jest równaniem zdeterminowanym. Jeżeli uwzględnimy losowość usytuowania masy w chwili początkowej, to równanie ruchu masy M przyjmuje postać

$$(1.2) \quad \ddot{u}_n(t) + 2h\dot{u}_n(t) + \omega^2 u_n(t) = \frac{2}{M} \Pi_{n-1}(t) U(t - \varepsilon_n),$$

gdzie $U(t - \varepsilon_n)$ jest funkcją stochastyczną Heaviside'a:

$$(1.3) \quad U(t - \varepsilon_n) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } t < \varepsilon_n; \\ 1, & \text{jeżeli } t \geq \varepsilon_n, \end{cases}$$

przy czym ε_n jest wielkością losową przyporządkowaną n -tej masie i wyznaczającą chwilę zetknięcia tej masy z prętem. Przyjmujemy, że po zetknięciu z prętem styk ten ma charakter podobny do styku przy zderzeniu plastycznym.

Równanie (1.2) jest stochastycznym równaniem różniczkowym w sensie »prawie na pewno« tzn. jest spełnione dla prawie wszystkich realizacji procesu stochastycznego. Proces $U(t - \varepsilon_n)$ przyjmujemy za proces mierzalny.

Z mierzalności procesu stochastycznego $U(t - \varepsilon_n)$ oraz z warunku $\int_T E \{ |U(t - \varepsilon_n)| \} dt < \infty$ wynika całkowalność w sensie Lebesgue'a prawie wszystkich jego realizacji. Zauważmy, że

$$\int_T E \{ |U(t - \varepsilon_n)| \} dt = \int_T [OP(t < \varepsilon_n) + 1P(t \geq \varepsilon_n)] dt = \int_T F_{\varepsilon_n}(t) dt = 1 < \infty,$$

gdzie $P(t \geq \varepsilon_n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że dla $t \geq \varepsilon_n$ funkcja Heaviside'a ma wartość 1, czyli ma miejsce styk masy z prętem. Wynika stąd, że dla prawie wszystkich realizacji procesu przy zerowych warunkach początkowych rozwiązanie równania (1.2) ma postać:

$$(1.4) \quad u_n(t) = \frac{2}{M} \int_0^t W_n(t-s) \Pi_{n-1}(s) U(s - \varepsilon_n) ds,$$

gdzie $W_n(t-s)$ jest impulsową funkcją przejścia układu:

$$\text{dla } \lambda > 0 \quad W_n(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-ht} \sin \lambda t, \quad \lambda = \omega^2 - h^2,$$

$$\text{dla } \lambda = 0 \quad W_n(t) = te^{-ht},$$

$$\text{dla } \lambda > 0 \quad W_n(t) = \frac{1}{\lambda_1} e^{-ht} \sin h(\lambda_1 t), \quad \lambda = h^2 - \omega^2.$$

Jeżeli masy M_n wszystkich oscylatorów i sztywności sprężyn (k_n) są identyczne, to impulsowe funkcje przejścia są identyczne i $W_n = W$. Dla zachowania ogólności rozważań będziemy stosowali oznaczenie W_n .

Wzór (1.4) dla pierwszej masy przyjmuje postać:

$$(1.5) \quad u_1(t) = \frac{2}{M} \int_0^t P(s) W_1(t-s) U(s-\varepsilon_1) ds.$$

Znajdziemy wartość przeciętną przemieszczenia $u_1(t)$. Wobec mierzalności procesu $U(t-\varepsilon_1)$ oraz spełnienia warunku (1.3), mamy

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(t) &= E\{u_1(t)\} = E\left\{\frac{2}{M} \int_0^t P(s) W_1(t-s) U(s-\varepsilon_1) ds\right\} = \\ &= \frac{2}{M} \int_0^t P(s) W_1(t-s) E\{U(s-\varepsilon_1)\} ds = \frac{2}{M} \int_0^t P(s) W_1(t-s) F_{\varepsilon_1}(s) ds, \end{aligned}$$

czyli

$$(1.6) \quad \bar{u}_1(t) = \frac{2}{M} \int_0^t P(s) W_1(t-s) F_{\varepsilon_1}(s) ds.$$

$F_{\varepsilon_1}(s)$ stanowi dystrybuantę rozkładu prawdopodobieństwa zetknięcia pierwszej masy z prętem, tj. $s \geq \varepsilon_1$.

Wyznamy z kolei autokorelację przemieszczenia $u_1(t)$:

$$\begin{aligned} K_{u, u_1}(t_1, t_2) &= \frac{4}{M^2} E \left\{ \int_0^{t_1} P(\bar{s}) W_1(t-\bar{s}) U(\bar{s}-\varepsilon_1) d\bar{s} \int_0^{t_2} P(s) W_1 \times \right. \\ &\quad \times (t-s) U(s-\varepsilon_1) ds \Big\} = \frac{4}{M^2} E \left\{ \int_0^{t_2} \left[\int_0^{t_1} P(\bar{s}) W_1(t-\bar{s}) U(\bar{s}-\varepsilon_1) P(s) W_1 \times \right. \right. \\ &\quad \times (t-s) U(s-\varepsilon_1) ds \Big] d\bar{s} \Big\} = \frac{4}{M^2} \int_0^{t_1} \left[\int_0^{t_2} P(\bar{s}) W_1(t-\bar{s}) P(s) W_1(t-s) \times \right. \\ &\quad \times E\{U(\bar{s}-\varepsilon_1) U(s-\varepsilon_1)\} ds \Big] d\bar{s}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że badany proces losowy ma następującą własność:

$$(1.7) \quad E\{U(\bar{s}-\varepsilon_1) U(s-\varepsilon_1)\} = \begin{cases} F_{\varepsilon_1}(s), & \text{jeżeli } \bar{s} > s, \\ F_{\varepsilon_1}(\bar{s}), & \text{jeżeli } \bar{s} < s, \\ F_{\varepsilon_1}(\bar{s}), & \text{jeżeli } \bar{s} = s. \end{cases}$$

Wobec (1.7) autokorelacja dla $t_1 = t_2 = t$ przyjmuje postać

$$(1.8) \quad K_{u, u_1}(t, t) = \frac{4}{M^2} \int_0^t P(\bar{s}) W_1(t-\bar{s}) d\bar{s} \int_0^t P(s) W_1(t-s) F_{\varepsilon_1}(s) ds = \\ = u_1(t) \Big|_{U(s-\varepsilon_1)=1} \bar{u}_1(t).$$

Symbol $u_1(t) \Big|_{U(s-\varepsilon_1)=1}$ oznacza, że przed całkowaniem, należy przyjąć, że funkcja losowa $U(s-\varepsilon_1)$ jest równa jedności, czyli całkować tak, jak dla zdeterminowanego

styku masy z prętem [4]. Dysponując wzorami (1.8) i (1.6), wariację przemieszczenia $u_1(t)$ przedstawić możemy w postaci

$$(1.9) \quad D^2 u_1(t) = K_{u_1 \dot{u}_1}(t, t) - [\bar{u}_1(t)]^2 = u_1(t) \Big|_{\bar{u}(s-\varepsilon_1)=1} - [\bar{u}_1(t)]^2.$$

Wartość przeciętna i wariacja określają podstawowe własności procesu stochastycznego.

Techniczny aspekt zagadnienia wymaga nie tyle opisu przemieszczenia, co raczej wyznaczenia siły oddziaływania pręta na masę skupioną. Wzór na siłę, ciśnienie na froncie fali przechodzącej i odbitej wyprowadzone w pracy [4] mają odpowiednio postać

$$(1.10) \quad \begin{aligned} R_n(t) &= 2[\Pi_{n-1}(t) - \Pi_n(t)], \\ \Pi_n(t) &= \rho a S \dot{u}_n(t), \\ \Gamma_n(t) &= \frac{1}{2} R_n(t). \end{aligned}$$

Jak wynika ze wzorów (1.10) wyznaczenie siły oddziaływania pręta na pierwszą masę wymaga znajomości pochodnej $\dot{u}_1(t)$. Różniczkując względem czasu funkcje (1.5) mamy

$$(1.11) \quad \dot{u}_1(t) = \frac{2}{M} \int_0^t \frac{dW_1(t-s)}{dt} P(s) U(s-\varepsilon_1) ds.$$

Z kolei podstawiając (1.11) do (1.10)₁ i uwzględniając, że $\Pi_0(t) = P(t) U(t-\varepsilon_1)$ otrzymujemy

$$(1.12) \quad R_1(t) = 2P(t) U(t-\varepsilon_1) - 4h \int_0^t \frac{d}{dt} W_1(t-s) P(s) U(s-\varepsilon_1) ds.$$

Stąd wartość przeciętna siły wynosi

$$(1.13) \quad \bar{R}_1(t) = 2P(t) F_{\varepsilon_1}(t) - 4h \int_0^t \frac{d}{dt} W_1(t-s) P(s) F_{\varepsilon_1}(s) ds.$$

Wyznamy następnie funkcję autokorelacyjną siły $K_{R_1 R_1}(t_1, t_2)$. Wykorzystując zależność (1.12) możemy napisać

$$\begin{aligned} K_{R_1 R_1}(t_1, t_2) &= 4E \left\{ \left[P_1(t_1) U(t_1-\varepsilon_1) - 2h \int_0^{t_1} \frac{d}{dt_1} W_1(t_1-s) P(s) U(s-\varepsilon_1) ds \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[P_2(t_2) U(t_2-\varepsilon_1) - 2h \int_0^{t_2} \frac{d^2}{dt_2^2} W_1(t_2-\bar{s}) P(\bar{s}) U(\bar{s}-\varepsilon_1) d\bar{s} \right] \right\} = \\ &= 4P(t_1) P(t_2) E \{ U(t_1-\varepsilon_1) U(t_2-\varepsilon_1) \} - 8h P(t_1) \int_0^{t_2} \frac{d}{dt_2} W_1(t_2-\bar{s}) P(\bar{s}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times E \{U(t_1 - \varepsilon_1) U(\bar{s} - \varepsilon_1)\} d\bar{s} - 8hP(t_2) \int_0^{t_1} \frac{d}{dt_1} W_1(t_1 - s) P(s) E \{U(t_2 - \varepsilon_1) \times \\ & \times (s - \varepsilon_1)\} ds + 16h^2 \int_0^{t_1} \left[\int_0^{t_2} \frac{d}{dt_1} W_1(t_1 - s) P(s) \frac{d}{dt_2} W_1(t_2 - \bar{s}) P(\bar{s}) \times \right. \\ & \left. \times E \{U(s - \varepsilon_1) U(\bar{s} - \varepsilon_1)\} d\bar{s} \right] ds. \end{aligned}$$

Wobec wzoru (1.7) autokorelacja $K_{R_1 R_1}(t_1, t_2)$ dla $t_1 = t_2 = t$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} (1.14) \quad K_{R_1 R_1}(t, t) &= 4P_1(t)^2 F_{\varepsilon_1}(t) - 16hP(t) \int_0^t \frac{d}{dt} W_1(t-s) F_{\varepsilon_1}(s) ds + \\ & + 16h^2 \int_0^t \frac{d}{dt} W_1(t-s) P(s) ds \int_0^t \frac{d}{dt} W_1(t-s) P(s) F_{\varepsilon_1}(s) ds = R_1(t) \Big|_{\bar{U}(s-\varepsilon_1)=1}^{\bar{R}_1(t)} \end{aligned}$$

Tak więc wariacja siły $R_1(t)$ jest następująca:

$$(1.15) \quad D_{R_1 R_1}^2(t) = R_1(t) \Big|_{\bar{U}(s-\varepsilon_1)=1}^{\bar{R}_1(t)} - [\bar{R}_1(t)]^2.$$

Wyprowadzone wyżej wzory dotyczące siły $R_1(t)$ i przemieszczenia $U_1(t)$ można łatwo uogólnić dla dowolnej n -tej masy. W tym celu, znając $\dot{u}_1(t)$ ze wzoru (1.11), wyznaczamy ze wzoru (1.10) ciśnienie $\Pi_1(t)$. Z kolei znając $\Pi_1(t)$ wyznaczamy ze wzoru (1.4) $u_2(t)$. Powtarzając ten proces dochodzimy do stwierdzenia, że wzór na przemieszczenie n -tej masy przyjmuje postać

$$\begin{aligned} (1.16) \quad u_n(t) &= \left(\frac{2}{M}\right)^n (\rho a S)^{n-1} \int_0^t W_n(t-s_n) U(s-\varepsilon_n) \left(\int_0^{s_n} \frac{d}{ds_n} W_{n-1}(s_n-s_{n-1}) \times \right. \\ & \times U(s_{n-1}-\varepsilon_{n-1}) \left[\int_0^{s_{n-1}} \frac{d}{ds_{n-1}} W_{n-1}(s_{n-1}-s_{n-2}) U(s_{n-2}-\varepsilon_{n-2}) \times \right. \\ & \times \left. \left. \left. \int_0^{s_{n-2}} \frac{d}{ds_{n-2}} W_{n-3}(s_{n-2}-s_{n-3}) U(s_{n-3}-\varepsilon_{n-3}) \left(\dots \int_0^{s_2} \frac{d^2}{ds^2} W_1(s_2-s_1) \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times U(s_1-\varepsilon_1) P(s_1) ds_1 \right) \dots ds_{n-3} \right] ds_{n-2} \right] ds_{n-1} \Big) ds_n. \end{aligned}$$

Wobec założenia o słabej korelacji wzajemnej badanych procesów stochastycznych dla różnych oscylatorów oraz wobec wzoru (1.7) wartość przeciętna przemieszczenia określona jest przez wzór

$$\begin{aligned} (1.17) \quad \bar{u}_n(t) &= \left(\frac{2}{M}\right)^n (\rho a S)^{n-1} \int_0^t W_n(t-s_n) F_{\varepsilon_n}(s_n) \left(\int_0^{s_n} \frac{d}{ds_n} W_{n-1}(s_n-s_{n-1}) \times \right. \\ & \times F_{\varepsilon_{n-1}}(s_{n-1}) \left[\int_0^{s_{n-1}} \frac{d}{ds_{n-1}} W_{n-2}(s_{n-1}-s_{n-2}) F_{\varepsilon_{n-2}}(s_{n-2}) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \int_0^{s_{n-2}} \frac{d}{ds_{n-2}} W_{n-3}(s_{n-2} - s_{n-3}) F_{\varepsilon_{n-3}}(s_{n-3}) \left(\dots \int_0^{s_2} \frac{ds_2}{d} W_1(s_2 - s_1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times F_{\varepsilon_1}(s_1) P(s_1) ds_1 \right) \dots ds_{n-3} \right\} ds_{n-2} \left[ds_{n-1} \right] ds_n.$$

Powtarzając dla $u_n(t)$ rozumowanie przeprowadzone przy wyznaczaniu wariacji przemieszczenia dla 1-szej masy dochodzimy do wniosku, że dla n -tej masy wariancja określona jest wzorem:

$$(1.18) \quad D_{u_n u_n}^2(t) = u_n(t) \left. \begin{array}{l} \ddot{u}_n(t) - [\ddot{u}_n(t)]^2 \\ U(s_{n-\varepsilon_n})=1 \\ \dot{U}(s_1-\varepsilon_1)=1 \end{array} \right|$$

Prędkość $\dot{u}_n(t)$ wyznaczamy różniczkując względem czasu funkcję (1.16). Z kolei podstawiając $\dot{u}_n(t)$ i $\dot{u}_{n-1}(t)$ do (1.10)_{1,2} wyznaczamy siłę oddziaływania pręta na n -tą masę:

$$(1.19) \quad R_n(t) = 2\rho a S [\dot{u}_{n-1}(t) - \dot{u}_n(t)].$$

Znalezienie wartości przeciętnej siły przy słabej korelacji wzajemnej jest już sprawą bardzo prostą.

Wyznamy z kolei wariancję siły $R_n(t)$. Korzystając ze związku (1.19) funkcję autokorelacyjną przedstawimy w postaci następującej:

$$K_{R_n R_n}(t_1, t_2) = 4(\rho a S)^2 E \{ [\dot{u}_{n-1}(t_1) - \dot{u}_n(t_1)] [\dot{u}_{n-1}(t_2) - \dot{u}_n(t_2)] \} = \\ = 4(\rho a S)^2 [E \{ \dot{u}_{n-1}(t_1) \dot{u}_{n-1}(t_2) \} + E \{ \dot{u}_n(t_1) \dot{u}_n(t_2) \} - E \{ \dot{u}_{n-1}(t_1) \dot{u}_n(t_2) \} - \\ - E \{ \dot{u}_n(t_1) \dot{u}_{n-1}(t_2) \}].$$

Powtarzając rozważania przeprowadzone przy wyznaczaniu autokorelacji (1.8) dla $t_1 = t_2 = t$ z powyższej zależności otrzymujemy

$$(1.20) \quad K_{R_n R_n}(t, t) = 4(\rho a S)^2 \left[\dot{u}_{n-1}(t) \left. \begin{array}{l} U(s_{n-1-\varepsilon_{n-1}})=1 \\ \dot{U}(s_1-\varepsilon_1)=1 \end{array} \right| \ddot{u}_{n-1}(t) + \dot{u}_n(t) \left. \begin{array}{l} U(s_{n-\varepsilon_n})=1 \\ \dot{U}(s_1-\varepsilon_1)=1 \end{array} \right| \ddot{u}_n(t) - \right. \\ \left. - 2\dot{u}_n(t) \left. \begin{array}{l} U(s_{n-1-\varepsilon_{n-1}})=1 \\ \dot{U}(s_1-\varepsilon_1)=1 \end{array} \right| \ddot{u}_n(t) \right].$$

Zatem wariancja siły określona jest wzorem

$$(1.21) \quad D_{R_n R_n}^2(t) = 4(\rho a S)^2 \left[\dot{u}_{n-1}(t) \left. \begin{array}{l} U(s_{n-1-\varepsilon_{n-1}})=1 \\ \dot{U}(s_1-\varepsilon_1)=1 \end{array} \right| \ddot{u}_{n-1}(t) + \dot{u}_n(t) \left. \begin{array}{l} U(s_{n-\varepsilon_n})=1 \\ \dot{U}(s_1-\varepsilon_1)=1 \end{array} \right| \ddot{u}_n(t) - \right. \\ \left. - 2\dot{u}_{n-1}(t) \left. \begin{array}{l} U(s_{n-1-\varepsilon_{n-1}})=1 \\ \dot{U}(s_1-\varepsilon_1)=1 \end{array} \right| \ddot{u}_n(t) \right] - 4(\rho a S)^2 \left[\dot{u}_{n-1}(t) \left. \begin{array}{l} U(s_{n-1-\varepsilon_{n-1}})=1 \\ \dot{U}(s_1-\varepsilon_1)=1 \end{array} \right| \ddot{u}_{n-1}(t) - \right. \\ \left. - \dot{u}_n(t) \left. \begin{array}{l} U(s_{n-\varepsilon_n})=1 \\ \dot{U}(s_1-\varepsilon_1)=1 \end{array} \right| \ddot{u}_n(t) \right]^2.$$

W przedstawionych wyżej rozważaniach wyznaczono przemieszczenie dowolnej masy oraz siłę oddziaływania na nią pręta. Wymagana jest przy tym znajomość

siły wejściowej $P_0(t)$ i dystrybuant rozkładu prawdopodobieństwa zetknięcia mas z prętem $F_{e_1}(t), \dots, F_{e_n}(t)$.

Wyznaczone wartości przeciętne, wariancje przemieszczenia i siły opisują najbardziej podstawowe własności badanego procesu stochastycznego, a w przypadku gdy proces ten byłby normalny, wyznaczają go w sposób jednoznaczny. Rozważania prowadzono dla fali propagującej się tylko w jednym kierunku. Założenie to sprzeczne prowadzi badany układ do układu typu kaskadowego, tj. n -ty oscylator «notuje» oddziaływanie $(n-1)$ -szych, natomiast nie «notuje» oddziaływania następnych. Przy krótkotrwałym wymuszeniu w sensie sprecyzowanym wyżej ($2(l_n - l_{n-1}) \geq at$) pominięcie fal odbitych jest do przyjęcia, natomiast dla wymuszeń bardziej długotrwałych należy fale odbite uwzględnić.

Uogólnienie rozważań na fale odbite prowadzi do komplikacji w ujęciu problemów losowych, ponieważ styk masy z prętem od chwili zetknięcia może nie być ciągły i opis procesów z wykorzystaniem funkcji Heaviside'a jest utrudniony. Dla wykorzystania przedstawionych rozważań w badaniach i projektowaniu istotne znaczenie ma wyznaczenie dystrybuant rozkładu prawdopodobieństwa $F_{e_1}(t), \dots, F_{e_n}(t)$ oraz sprawdzenie założenia o pomijalności korelacji wzajemnej tych procesów. Wyznaczenie dystrybuant rozkładu prawdopodobieństwa można wykonać bardzo prosto, prowadząc dla wielu realizacji procesu jednoczesną rejestrację przechodzenia fali dla danego przekroju pręta oraz impulsu uzyskiwanego przez daną masę. Przy badaniu korelacji wzajemnej chwili zetknięcia mas z prętem należy kompensować opóźnienie wynikłe ze skończonej prędkości propagacji fali w pręcie.

2. DYSKRETNO-CIĄGŁY UKŁAD MECHANICZNY Z LOSOWYMI ZMIENNYMI MASAMI

Przyjmijmy w dalszych rozważaniach, że masy dyskretnie $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ są zmienne w czasie. Zmiany te mają charakter losowy polegający na tym, że masa początkowa maleje. Taki stan rzeczy odpowiada zjawiskom zachodzącym w elektrofiltrze, gdyż podczas odpadania pyłu od elektrod zbiorczych następuje kruszenie i oddzielenie warstwy osiadłego pyłu, który opada w dół. W dalszym ciągu przyjmujemy również, że chwila zetknięcia masy z prętem jest losowa. W pracy [4] pokazano, że warunek równowagi sił działających na masę M_n ma postać

$$(2.1) \quad 2paS\ddot{u}_n(t) + R_n(t) = 2\Pi_{n-1}(t).$$

Siłę reakcji oscylatora $R_n(t)$ można przedstawić jako pochodną pędu:

$$(2.2) \quad R_n(t) = \frac{d}{dt} (M_n \dot{u}_n(t)) + ku_n(t) = \frac{dM_n(t)}{dt} \dot{u}_n(t) + M_n(t) \ddot{u}_n(t) + ku_n(t).$$

Współrzędna $u_n(t)$ oznacza w tym równaniu położenie środka masy M_n . Przyjmujemy, że w przybliżeniu współrzędna ta wyznacza po «rozpadnięciu się» masy położenie tej części masy M_n , która zachowuje styk z prętem. Przedstawmy masę $M_n(t)$ jako sumę składnika stałego zdeterminowanego i losowo zmiennego w czasie, czyli

$$(2.3) \quad M_n(t) = M_0 + \tilde{M}_n(t),$$

gdzie $M_0 = \text{const}$. Podstawiając (2.3) do (2.2) i (2.1) otrzymujemy:

$$(2.4) \quad [M_0 + \tilde{M}_n(t)] \ddot{u}_n + \left[2\rho a S + \frac{d\tilde{M}_n(t)}{dt} \right] \dot{u}_n + k u_n = 2\Pi_{n-1}(t).$$

Przyjmijmy dalej, że $|d\tilde{M}_n(t)/dt| \ll 2\rho a S$, co oznacza, że prędkość zmiany masy jest mała w stosunku do $2\rho a S$. Założenie to nie wydaje się być silnym ograniczeniem, ponieważ prędkość fali podłużnej a ma dużą wartość i w zagadnieniach elektrofiltrów współczynnik $2\rho a S$ przyjmuje wartość od ok. 10^2 do 10^5 kg/s. Wobec powyższego równanie (2.4) po prostym przekształceniu i uwzględnieniu że chwila zetknięcia masy z prętem jest losowa, przyjmuje postać

$$(2.5) \quad \ddot{u}_n + 2h\dot{u}_n + \frac{k}{M_0} u_n = 2 \frac{\Pi_{n-1}(t)}{M_0} U(t - \varepsilon_n) - \frac{\tilde{M}_n(t)}{M_0} \ddot{u}_n.$$

Równanie (2.5) można rozwiązać metodą perturbacyjną stosowaną dla tego typu zagadnień przez Samuela i Eringena [6]. Zgodnie z nią przy małych zmianach masy $\tilde{M}_n(t)$ w stosunku do M_0 można przyjąć

$$(2.6) \quad \tilde{M}_n(t) = \varepsilon B_n(t), \quad E\{B_n(t)\} = \bar{B}_n(t),$$

gdzie ε jest małym parametrem, a $\bar{B}_n(t)$ wartością przeciętną. Poszukujemy rozwiązania równania (2.5) w postaci szeregu:

$$(2.7) \quad u_n(t) = u_{(0)n}(t) + \varepsilon u_{(1)n}(t) + \varepsilon^2 u_{(2)n}(t) + \dots$$

Podstawiając (2.7) do równania (2.5) i przyrównując wyrazy o tych samych potęgach przy ε otrzymujemy

$$(2.8) \quad \ddot{u}_{(0)n} + 2h\dot{u}_{(0)n} + w_0^2 u_{(0)n} = 2 \frac{\Pi_{n-1}(t)}{M_0} U(t - \varepsilon_n),$$

$$\ddot{u}_{(j)n} + 2h\dot{u}_{(j)n} + w_0^2 u_{(j)n} = - \frac{B_n(t)}{M_0} \ddot{u}_{(j-1)n}.$$

Równanie (2.8) rozwiązywaliśmy już uprzednio (por. (1.4)), natomiast rozwiązanie równania rekurencyjnego (2.8)₂ ma postać

$$(2.9) \quad u_{(j)n}(t) = - \frac{1}{M_0} \int_0^t W_n(t-s) B_n(s) \ddot{u}_{(j-1)n}(s) ds.$$

Wyznaczywszy z (2.8) i (2.9) $u_{(0)n}$, $u_{(1)n}$, ..., podstawiamy otrzymane wyrażenia do (2.7) uzyskując poszukiwane rozwiązanie. Podobnie wyznaczamy $R_n(t)$, $\Pi_n(t)$ i $\Gamma_n(t)$ jak w części pierwszej (por. (1.10)).

Powyższa procedura rozwiązania równania (2.5) jest zbyt uciążliwa zwłaszcza przy wyznaczaniu momentów statystycznych, gdy we wzorze (2.7) należy uwzględnić kilka wyrazów, co jest konieczne przy większych zmianach masy. W związku z tym przedstawimy inny wariant rozwiązania równania (2.5) opierając się na metodzie stosowanej przez SAMUELSA [9].

W tym celu zastąpmy proces stochastyczny opisany funkcją losową $\tilde{M}_n(t)$ przez proces zastępczy opisany funkcją losową schodkową. Przykład funkcji zastępczej

dla jednej z realizacji procesu pokazano na rys. 4. Przedział określoności $\tilde{M}_n(t)$ dzielimy na dowolnie małe przedziały nie pokrywające się o długości T_0 . Funkcja zastępcza $\tilde{M}_n(t)$ przyjmuje w każdym przedziale wartość stałą α_{ni} równą $\tilde{M}_n(t)$ dla t z połowy przedziału T_0 i różną dla różnych realizacji. Dla tego typu procesu stochastycznego rozwiązanie równania (2.5) przyjmuje postać

$$(2.10) \quad u_n(t) = \frac{2}{M_0} \int_0^t W_n(t-s) \Pi_{n-1}(s) U(s-\varepsilon_n) ds - \frac{1}{M_0} \sum_{i|0}^{N-1} \int_{iT_0}^{(i+1)T_0} W_n(t-s) \alpha_{ni} \ddot{u}_n(s) ds.$$

Obliczamy z kolei całkę stojącą pod znakiem sumy.

$$\int_{iT_0}^{(i+1)T_0} W_n(t-s) \alpha_{ni} \ddot{u}_n(s) ds = W_n(t-iT_0) \ddot{u}_n(iT_0) \alpha_{ni} T_0 + O(T_0^2)$$

Dobierając odpowiednio długość przedziału T_0 można uzyskać, że $O(T_0^2)$ jest wielkością małą drugiego rzędu, pomijalną. W tej sytuacji rozwiązanie przyjmuje postać

$$(2.11) \quad u_n(t) = \frac{2}{M_0} \int_0^t W_n(t-s) \Pi_{n-1}(s) U(s-\varepsilon_n) ds - \frac{T_0}{M_0} \sum_{i|0}^{N-1} W_n(t-iT_0) \ddot{u}_n(iT_0) \alpha_{ni}$$

Różniczkując (2.11) dwukrotnie względem czasu otrzymujemy

$$(2.12) \quad \ddot{u}_n(t) = \frac{2}{M_0} \int_0^t \frac{d^2}{dt^2} W_n(t-s) \Pi_{n-1}(s) U(s-\varepsilon_n) ds - \frac{T_0}{M_0} \sum_{i|0}^{N-1} \frac{d^2}{dt^2} W_n(t-iT_0) \ddot{u}_n(iT_0) \alpha_{ni}$$

Podstawiając do równania (2.12) $t=iT_0$ ($i=0, 1, \dots, N-1$) otrzymujemy następujący układ równań:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \ddot{u}_n(0) = & \frac{2}{M_0} \int_0^t \frac{d^2}{dt^2} W_n(t-s) \Pi_{n-1}(s) U(s-\varepsilon_n) ds \Big|_{t=0} - \\ & - \frac{T_0}{M_0} \sum_{i|0}^{N-1} \frac{d^2}{dt^2} W_n(t-iT_0) \Big|_{t=0} \ddot{u}_n(0) \alpha_{ni} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n[(N-1)T_0] = & \frac{2}{M_0} \int_0^t \frac{d^2}{dt^2} W_n(t-s) \Pi_{n-1}(s) U(s-\varepsilon_n) \Big|_{t=(N-1)T_0} ds - \\ & - \frac{T_0}{M_0} \sum_{i|0}^{N-1} \frac{d^2}{dt^2} W_n(t-iT_0) \Big|_{t=(N-1)T_0} \ddot{u}_n[(N-1)T_0] \alpha_{ni} \end{aligned}$$

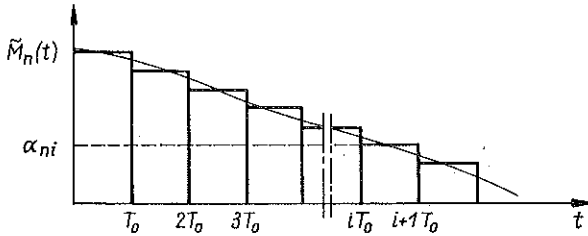
Z stochastycznego układu równań (2.13) wyznaczamy $\ddot{u}_n = \varphi_{ni}$, po czym podstawiając otrzymane wyrażenia do (2.11) otrzymujemy na przemieszczenie n -tej masy wzór następujący:

$$(2.14) \quad u_n(t) = \frac{2}{M_0} \int_0^t W_n(t-s) \Pi_{n-1}(s) U(s-\varepsilon_n) ds - \frac{T_0}{M_0} \sum_{i|0}^{N-1} W_n(t-iT_0) \varphi_{ni} \alpha_{ni}.$$

Wartość przeciętna przemieszczenia (2.14) ma postać

$$(2.15) \quad \bar{u}_n(t) = \frac{2}{M_0} \int_0^t W_n(t-s) \Pi_{n-1}(s) F_{\varepsilon_n}(s) ds - \frac{T_0}{M_0} \sum_{i=0}^{N-1} W_n(t-iT_0) E\{\varphi_{ni} \alpha_{ni}\}.$$

W wyrażeniu tym występuje pod znakiem sumy wartość przeciętna $E\{\varphi_{ni} \alpha_{ni}\}$. Założenie o słabej korelacji wzajemnej zmiennych losowych ε_n i α_{ni} nie jest warunkiem wystarczającym, aby było spełnione równanie $E\{\varphi_{ni} \alpha_{ni}\} = E\{\varphi_{ni}\} E\{\alpha_{ni}\}$ (z wyjątkiem, gdy badane zmienne losowe mają rozkład normalny). Dla spełnienia powyż-



Rys. 4. Funkcja zmian masy dyskretnej

szego równania warunkiem wystarczającym jest niezależność zmiennych losowych ε_n i α_{ni} [7]. W ogólnym przypadku wyznaczenie momentów statystycznych na podstawie rozwiązania (2.14) jest mocno skomplikowane. Zauważmy, że rozwiązując układ równań (2.13) dla wartości przeciętnych, nie otrzymamy wartości przeciętnej przemieszczenia (2.15) nawet przy braku korelacji wzajemnej pomiędzy ε_n i α_{ni} , gdyż φ_{ni} jest nieliniową funkcją α_{ni} .

Interesujące nas wartości siły $R_n(t)$ czy ciśnień w pręcie wyznaczamy podobnie jak wyżej, różniczkując uprzednio funkcje (2.14) bądź (2.15).

Przedstawione wyżej warianty analitycznego opisu układu ze zmienną masą są użyteczne zarówno przy małych jak i dużych zmianach masy. Przy małych zmianach dogodnie jest stosowanie metody perturbacyjnej, natomiast przy zmianach dużych można stosować wariant drugi. Wymagane jest przy tym, aby współrzędne masy « wyjściowej » opisywały dostatecznie dokładnie położenie badanej masy po « rozpadnięciu » masy wyjściowej. Dokładność opisu wzrasta wraz z doбором mniejszej długości przedziału T_0 , lecz wzrasta również przy tym pracochłonność obliczeń. Wyznaczenie momentów statystycznych przy tym sposobie opisu badanych zjawisk komplikuje się rachunkowo i celowym byłoby zastosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej. Przedstawione rozważania wzbogacone odpowiednimi badaniami doświadczalnymi mogą znaleźć wykorzystanie w projektowaniu układów elektrod zbiorczych elektrofiltrów.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. W. PENNEY, *Adhesive behaviour of dust in electrostatic precipitation*, J. Air Pollution Control Association, 2, 1975.
2. W. T. SPROULL, *Foundamentals of electrode rapping in industrial precipitator*, J. Air Pollution Control Association, 2, 1965.

3. M. SARNA, *Przyspieszenia drgań strętnych cienkościennego preta o profilu otwartym*, Rozpr. Inżyn., **18**, 4, 1970.
4. M. SARNA, *Analiza i synteza dyskretno-ciągłego układu mechanicznego*, Rozpr. Inżyn., **24**, 1, 1976.
5. M. SARNA, *Visco-elastic properties of material at examination of short-term excitations on discrete — continuous mechanical system*, X Konferencja Dynamiki Maszyn, Rynia k/Warszawy 1976.
6. K. SOB CZYK, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, Warszawa, 1973.
7. A. PAPOULIS, *Prawdopodobieństwo zmienne losowe i procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa 1972 [tłum. z ang.].
8. J. C. SAMUELS, A. C. ERINGEN, *On stochastic linear systems*, J. Mathem. Phys. MIT, **38**, July 1956.
9. J. C. SAMUELS, *The dynamics of impulsively and randomly varying systems*. J. Appl. Mech., March 1963.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЯ ДИСКРЕТНО-СПЛОШНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Работа составляет продолжение исследований содержавшихся в более ранних разработках [4, 5]. Дискретно-сплошная механическая система, состоящая из стержня и ряда гармонических осцилляторов, моделирующая свойства системы собирательных электродов электрофильтра, обогащена случайными свойствами. Учтена случайность момента соприкосновения дискретных масс со стержнем, а также случайность изменений дискретных масс во времени. Рассуждения проведены на основе распространения одномерных, плоских упругих волн в стержне при кратковременном вынуждении. Определены средние значения и дисперсия перемещений, а также сила воздействия стержня на произвольную массу. Работа может найти применение в экспериментальных исследованиях свойств собирательных электродов и при их проектировании.

SUMMARY

EXAMINATION OF THE DISCRETELY-CONTINUOUS PERIODIC MECHANICAL SYSTEM WITH STOCHASTIC PROPERTIES

This paper is a continuation of the earlier author's study [4, 5]. The discretely-continuous mechanical system composed of the rod and series of harmonic oscillators, modulating the properties of the complex electrodes of the electrofilter, was enriched by the stochastic properties. The randomness of the moment of contact of the discrete masses with the rod and the randomness of changes of discrete masses are taken into account. The considerations are performed on the basis of propagation of one-dimensional plane elastic waves in the rods under short-time excitation. The mean values and the variances of displacements as well as the interaction forces of the rod on the arbitrary mass are evaluated. The paper may found application in the experimental investigation of the properties of the complex electrodes or their design.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA
FILIA W BIELSKU-BIAŁEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 lipca 1975 r.