

ANALITYCZNA OCENA GÓRNEGO HYDROSTATYCZNEGO CIŚNIENIA KRYTYCZNEGO DLA NIEDOSKONAŁYCH WALCOWYCH POWŁOK ŚREDNIEJ DŁUGOŚCI

KAZIMIERZ SOBIESIAK (LUBLIN)

W pracy przedstawiono analityczną ocenę górnego hydrostatycznego ciśnienia krytycznego dla niedoskonałych walcowych powłok średniej długości. Proponowana metoda ma jednak charakter ogólny. Ponieważ stan krytyczny dla niedoskonałych powłok jest osiągany przy pewnych skończonych ugięciach powłoki, rozważania oparto na teorii nieliniowej. Podstawowe równania zostały przyjęte w postaci wyprowadzonej przez W. A. NASHA. Dla efektywnego określenia górnego hydrostatycznego ciśnienia krytycznego i parametrów (a i m), odpowiadających temu ciśnieniu, zastosowano metodę uogólnionych szeregów potęgowych. Uzasadniono, że zależność górnego ciśnienia krytycznego od parametru niedoskonałości V jest proporcjonalna do $V^{2/3}$, a więc większa niż w przypadku dolnego ciśnienia krytycznego, które zmniejsza się liniowo-proporcjonalnie do V . Praca podaje również przykład liczbowy.

1. UWAGI WSTĘPNE

Autorzy pierwszych prac z dziedziny stateczności powłok (LORENZ, TIMOSHENKO, MISES, SOUTHWELL) stosowali zlinearyzowaną teorię powłok i określali ciśnienie krytyczne odpowiednio do rozwidlenia stanu równowagi dla geometrycznie idealnych powłok (górne ciśnienie krytyczne). Badania doświadczalne przeprowadzone w latach 1920–1940 wykazały jednak więcej ciśnień zasługujących na nazwę krytycznych niż przewidywała teoria liniowa. Fakt ten wpłynął na rozwój nieliniowej teorii stateczności powłok (DONNELL, MARGUERRE, KÁRMÁN, TSIEN), umożliwiającej określenie drugiego stanu krytycznego, odpowiadającego dolnemu ciśnieniu krytycznemu, tj. minimum krzywej obciążenie-ugięcie. W pierwszym okresie badań dolne obciążenia krytyczne, określone na podstawie geometrycznie nieliniowej teorii stateczności powłok doskonałych, były zgodne z wynikami doświadczeń, które jednak znacznie odbiegały od wartości górnych obciążeń krytycznych dla powłok idealnych. W celu wyjaśnienia tych rozbieżności został wysunięty pierwszy podstawowy pogląd, zaproponowany przez T. KÁRMÁNA i H. S. TSIENA [14 i 15], zakończony oceną dolnego ciśnienia krytycznego dla idealnej powłoki, uznanego za miarę jej stateczności.

Współczesne teoretyczne i eksperymentalne badania nie potwierdzają w zasadzie tej zgodności. Dokładnie wykonane powłoki, np. w eksperymentach R. C. TENNYSONA [30 i 31] i W. E. MINIEJEWA [20], zaczynały się odkształcać przy obciążeniach zbliżonych raczej do górnego ciśnienia krytycznego; z drugiej strony dolne ciśnienie krytyczne, wyznaczone z dużą dokładnością przy zastosowaniu maszyn matematycznych, było w kilku przypadkach bardzo małe (B. O. ALMROTH [1]), równe zeru

(N. J. HOFF, W. A. MADSEN, J. MAYERS [9]) lub ujemne, co szczególnie utrudniało interpretację fizyczną zjawiska wyboczenia powłok. Te fakty podkreślają jeszcze bardziej znaczenie górnego ciśnienia krytycznego, przy którego obliczaniu należy uwzględnić wstępne niedokładności wykonania powłoki, odchylenia od teoretycznego schematu obciążenia, niezachowania warunków brzegowych itd. Takie ciśnienie krytyczne nie odpowiada rozwidleniu stanu równowagi lecz maksimum krzywej obciążenie-ugięcie. W związku z tym wysunięty został drugi podstawowy pogląd odnośnie kryterium stateczności powłok. Zainicjowany był on przez W. T. KOITERA [16 i 17], który badał wpływ niedoskonałości (wad, defektów) na maksymalne (górne) ciśnienie krytyczne. Obszerny przegląd literatury podają opracowania: W. A. NASHA [21], Z. NOWAKA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [23], B. BUDIANSKY'EGO i J. W. HUTCHINSONA [4], E. I. GRIGOLIUKA i W. W. KABANOWA [7], J. W. HUTCHINSONA i W. T. KOITERA [8] jak również A. S. WOLMIRA, M. O. ALUMIA'EGO, Ł. M. KURSZA i N. J. HOFFA. Większość najnowszych badań, dotyczących górnego ciśnienia krytycznego dla niedoskonałych powłok, stanowi właściwą ocenę granicy stateczności dla rzeczywistych konstrukcji. W tym świetle problem efektywnego określania wpływu niedokładności wykonania na górne ciśnienie krytyczne wydaje się aktualny i ważny dla zastosowań i będzie analizowany w niniejszej pracy. Istnieje już szereg opracowań na ten temat, opartych na badaniach L. H. DONNELLA i C. C. WANA [5]; wymienimy tutaj prace W. A. NASHA [22], A. S. WOLMIRA [34], W. T. KOITERA [18], J. W. HUTCHINSONA [10], C. L. DYMA i N. J. HOFFA [6], R. C. TENNYSONA i D. B. MUGGERIDGE'A [32], B. BUDIANSKY'EGO i J. C. AMAZIGO [3] i szeregu innych autorów.

Większość wyników uzyskano przy zastosowaniu metod numerycznych, na maszynach matematycznych. Celem tej pracy jest wyprowadzenie wzorów zarówno prostych jak i efektywnych na górne ciśnienie krytyczne i amplitudę odpowiadającą temu ciśnieniu dla niedoskonałych powłok średniej długości; dla ich uzyskania zastosowano metodę uogólnionych szeregów potęgowych [36 i 37], używaną z powodzeniem przy analizie powłok idealnych (M. ŻYCZKOWSKI i S. BUĆKO [35, 2 i 38]) jak również przy analitycznej ocenie obciążeń krytycznych dla niedoskonałych powłok (M. ŻYCZKOWSKI i K. SOBIESIAK [39, 40 i 29]). Jako przykład rozważymy zamkniętą, walcową, swobodnie podpartą powłokę średniej długości, poddaną działaniu ciśnienia hydrostatycznego. Ponieważ górne ciśnienie krytyczne powłok niedoskonałych jest osiąganę przy pewnych skończonych ugięciach układu, przeto zastosujemy nieliniową teorię stateczności powłok.

Jeżeli weźmiemy nawet pod uwagę górne ciśnienie krytyczne dla niedoskonałej powłoki jako najlepszą ocenę granicy stateczności, to znajomość dolnego ciśnienia krytycznego, które zależy od niedoskonałości i jest związane z amplitudą przemieszczeń, jest bardzo ważna. Opisuje ono dokładniej całe zjawisko wyboczenia, określa «stopień niestateczności» i umożliwia obliczenie naprężeń i odkształceń w trwałym, wyboczonym położeniu. Z tych względów dolne ciśnienie krytyczne analizowane było w pracach [40 i 29].

Niniejsza praca poświęcona jest analitycznemu, efektywnemu wyznaczeniu górnego hydrostatycznego ciśnienia krytycznego dla niedoskonale sprężystej, zam-

knętej, swobodnie podpartej, wałkowej powłoki średniej długości. Niedoskonałości przyjmować będziemy jako proporcjonalne do wybożenia profilu. W wyniku takiego założenia ewentualne błędy popełniane są na korzyść pewności; bardziej szczegółowa analiza niedoskonałości rozważana była przez J. ROORDA [25 i 26]. Aby otrzymać stosunkowo proste wzory, wyniki będą rozwinięte w szereg $\varphi = h/R$ (w przybliżeniu poprawny dla cienkich powłok) z parametrem niedoskonałości V będącym dodatkowo małym parametrem (parametr zaburzeń). Technika zaburzeń była dość często stosowana do analizy stateczności powłok. Wspomnijmy tu ponownie prace M. ŻYCZKOWSKIEGO i S. BUĆKO [35, 2 i 38], C. L. DYMA i N. J. HOFFA [6], M. ŻYCZKOWSKIEGO i K. SOBIESIAKA [39, 40 i 29], oraz M. J. SEWELLA [27 i 28], J. M. T. THOMPSONA [33] i YA. F. KAYUKA [12]. Okazuje się jednak, że zastosowanie podwójnych rozwinięć do wyznaczenia zależności górnego (i dolnego) ciśnienia krytycznego jako funkcji parametru niedoskonałości jest nowe i bardzo efektywne, ponieważ końcowe wzory podane w p. 6 charakteryzują się dość prostą i zwartą postacią. W pracy tej ograniczymy się jedynie do badania powłok średniej długości i ciśnienia górnego, zważywszy, że analiza górnego i dolnego ciśnienia krytycznego dla powłok długich oraz dolnego ciśnienia krytycznego dla powłok średniej długości była przeprowadzona w opracowaniach [39, 29 i 40]. Przypadki te są rozważane oddzielnie, ponieważ oszacowania rzędów poszczególnych wielkości są w każdym z nich odmienne. Jednakże metoda jest całkowicie ogólna i może być stosowana do analizy innych rodzajów powłok, obciążeń, sposobów podparcia oraz przy innych równaniach wyjściowych i, jak się wydaje, również w zakresie sprężysto-plastycznym.

2. NIELINIOWE ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI KOŁOWEJ POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ PODDANEJ HYDROSTATYCZNEMU OBCIĄŻENIU

Rozważany problem został sformułowany przez W.A. NASHA [22] i F. S. ISAN-BAJEWA [11] w 1955 r. Dalsze badania należą do A. S. WOLMIRA [34], J. KEMPNERA, K. A. V. PANDALAIA, S. A. PATELA i J. CROUZET-PASCALA [13] oraz do Z. NOWAKA [24]. Większość autorów stosuje metodę energetyczną, uzyskując wyniki w postaci układu nieliniowych równań algebraicznych

$$(2.1) \quad f_i(p, a_j, g_k, E_l, V_q, m, n) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n_i, \quad j=1, 2, \dots, n_j=n_i, \\ k=1, 2, \dots, n_k, \quad l=1, 2, \dots, n_l, \quad q=1, 2, \dots, n_q,$$

gdzie p oznacza parametr obciążenia (z reguły ciśnienie zewnętrzne), a_j parametry ugięcia (amplitudy), g_k parametry geometryczne (promień R , grubość h , długość L , itd.), E_l stałe sprężyste, V_q parametry niedoskonałości powłoki, w końcu m i n liczby obwodowych i osiowych półfal na długości połowy obwodu powłoki. Równania typu (2.1) będą nazywane tutaj wzorami podstawowymi. Aby otrzymać efektywną ocenę wpływu niedoskonałości na ciśnienie krytyczne, należy wykonać kilka dalszych operacji, mianowicie:

1) wyeliminować a_j , $j=2, 3, \dots, n_j$, wykorzystując n_i-1 równań dla otrzymania zależności pomiędzy p i jednym parametrem amplitudy, a_1 ;

- 2) rozwiązać to równanie względem p ;
- 3) znaleźć maksimum (górne ciśnienie krytyczne) lub minimum (dolne ciśnienie krytyczne) krzywej $p=p(a_1)$;
- 4) wyeliminować m i n żądając minimum (kresu dolnego) ciśnienia krytycznego względem tych parametrów.

Wykonując wszystkie wymienione operacje otrzymujemy poszukiwaną funkcję

$$(2.2) \quad p_{kr} = f(V_a; g_k, E_l),$$

określającą wpływ niedoskonałości na ciśnienie krytyczne odpowiednio górne lub dolne. Zazwyczaj wymienione wyżej operacje wykonywane są numerycznie. W obecnej pracy będą one wykonane analitycznie; zastosujemy przybliżoną metodę dającą jednak stosunkowo dużą dokładność dla powłok niezbyt grubych (takie powłoki ulegają wyboczeniu w zakresie sprężysto-plastycznym, a z tym przypadkiem nie będziemy mieli tutaj do czynienia) i dla niezbyt dużych parametrów niedoskonałości. Taka metoda jest uzasadniona, ponieważ nawet wzory podstawowe są zawsze przybliżone. Nie będziemy wyprowadzali nowych podstawowych wzorów, lecz zastosujemy wzory wyprowadzone już przez W. A. NASHA [22], który (w przeciwieństwie do ISANBAJEWEJ) uwzględnił w obliczeniach niedoskonałości wykonania powłoki. Tak więc obecna praca może być uważana jako kontynuacja pracy [22], podobnie jak prace [39, 29 i 40].

NASH obrał dwuparametrową funkcję ugięcia

$$(2.3) \quad w(x, y) = ah \left[\sin \frac{my}{R} \sin \delta x + d(1 - \cos 2\delta x) \right],$$

z parametrami $a_1 = a$ i $a_2 = ad$; stała δ odnosi się do liczby osiowych półfal, $\delta = n/R$. Pierwszy wyraz jest zgodny z funkcją przyjętą przez MISESA [19] w teorii liniowej, natomiast drugi przedstawia dodatkowe osiowo-symetryczne odkształcenie, typowe dla teorii skończonych odkształceń (nieliniowej geometrycznie). Minimalizacja całkowitej energii potencjalnej względem parametrów a i d prowadzi do następującego układu równań, opisującego stan równowagi odkształconej powłoki (przytoczonego tutaj po małych przekształceniach):

$$(2.4) \quad \frac{h^2}{24(1-\nu^2)R^2} [(\delta^2 R^2 + m^2)^2 + 32d^2 R^4 \delta^4] + \frac{h^2 R^2 \delta^4}{64} (2a^2 + 3aV + V^2) +$$

$$+ \frac{\delta^4 R^4}{2(\delta^2 R^2 + m^2)^2} - \frac{dhR^3 \delta^4 m^2}{(\delta^2 R^2 + m^2)^2} (3a + 2V) + d^2 +$$

$$+ \frac{h^2 m^4}{64R^2} (2a^2 + 3aV + V^2) - \frac{dhm^2}{8R} (3a + 2V) + 2d^2 h^2 R^2 \delta^4 m^4 \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(\delta^2 R^2 + m^2)^2} + \frac{1}{(9\delta^2 R^2 + m^2)^2} \right] (2a^2 + 3aV + V^2) -$$

$$- \frac{pR}{4Eah} \left[m^2 - 1 - 6d^2 + \frac{\delta^2 R^2}{2} (1 + 8d^2) \right] (2a + V) = 0,$$

$$(2.4) \quad \frac{4adh^3 R\delta^4}{3(1-\nu^2)} + \frac{adh}{R} - \frac{ah^2 m^2}{8R^2} (a+V) + 2adh^3 R\delta^4 m^4 \times \\ \text{[e.d.]} \quad \times \left[\frac{1}{(\delta^2 R^2 + m^2)^2} + \frac{1}{(9\delta^2 R^2 + m^2)^2} \right] (a+V)^2 - \frac{ah^2 R^2 \delta^4 m^2}{(\delta^2 R^2 + m^2)^2} (a+V) - \\ - \frac{pd}{E} (2\delta^2 R^2 - 3)(a+V) = 0.$$

Równania te mają postać (2.1) i będą służyły w naszej analizie jako wzory podstawowe. Parametr $V=2a_0$ oznacza bezwymiarową amplitudę początkowych niedoskonałości, mianowicie amplituda ta równa jest $a_0 h$; rozkład niedoskonałości jest przyjęty jako proporcjonalny do odkształceń podczas wyboczenia (najbardziej niekorzystny rozkład).

3. ELIMINACJA PARAMETRU d DLA POWŁOK ŚREDNIEJ DŁUGOŚCI

Zgodnie z planem przedstawionym w p. 2, mamy najpierw wyeliminować parametr $a_2=d$ z równań (2.4). Równanie drugie jest liniowe względem d , a więc można wyznaczyć d dokładnie:

$$(3.1) \quad d = \left\{ \frac{hm^2}{8R} \left[1 + \frac{8\delta^4 R^4}{(\delta^2 R^2 + m^2)^2} \right] (a+V) \right\} : \left\{ 1 + \frac{4h^2 R^2 \delta^4}{3(1-\nu^2)} + \right. \\ \left. + 2h^2 R^2 \delta^4 m^4 \left[\frac{1}{(\delta^2 R^2 + m^2)^2} + \frac{1}{(9\delta^2 R^2 + m^2)^2} \right] (a+V)^2 - \right. \\ \left. - \frac{pR}{Eah} (2\delta^2 R^2 - 3)(a+V) \right\}.$$

Podstawienie (3.1) do pierwszego z równań układu (2.4) prowadzi jednak do bardzo skomplikowanych obliczeń. Szukamy więc prostszego wzoru na parametr d . W tym celu stosować będziemy rozwinięcia względem małego parametru $\varphi=h/R$ lub, co jest jednoznaczne, asymptotyczne rozwinięcia względem dużego parametru

$$(3.2) \quad \lambda = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{R}{h} = 3,305 \frac{R}{h},$$

wprowadzonego w pracy [35] i nazwanego tam «poprzeczną smukłością powłoki»; liczbowa wartość jest obliczona dla współczynnika Poissona $\nu=0,3$. Wzór (3.1) jest poprawny dla każdej długości powłoki; ograniczymy się tu do powłok średniej długości i przedyskutujemy rzędy poszczególnych wyrazów we wzorze (3.1) ze względu na iloraz h/R . Iloczyn $\delta R = \pi R/L$ (ponieważ wstawiamy $n = \pi R/L$ odpowiadające jednej półfali na długości) jest dla powłok średniej długości skończony, niezależny od φ ; podobnie parametr początkowych odkształceń V . Liczba obwodowych półfal jest duża; w pracy [35] kwadrat tej liczby został określony jako proporcjonalny do $\sqrt{\lambda}$ lub do $\varphi^{-1/2}$. W tej samej pracy ciśnienie krytyczne określone zostało jako proporcjonalne do $\varphi^{5/2}$; przyjmujemy tutaj takie same rzędy wielkości

dla m^2 i p ; w dalszej części pracy zweryfikujemy te założenia. Specjalna dyskusja musi być poświęcona rzędowi amplitudy a . W procesie wyboczenia wzrasta ona od zera i może być dowolnego rzędu (nie za dużego ze względu na założenia, przy których zostały wyprowadzone podstawowe wzory). Ale amplitudy odpowiadające górnemu i dolnemu ciśnieniu krytycznemu są pewnego określonego rzędu względem φ . W pracy tej (podobnie jak w pracach [39, 29 i 40]) przyjęto we wstępnych obliczeniach dowolny rząd a i po bardzo długiej analizie znaleziono, że (dla powłok średniej długości) bezwymiarowa amplituda, odpowiadająca górnemu ciśnieniu krytycznemu, jest rzędu $\varphi^{-1/3}$, a bezwymiarowa amplituda odpowiadająca dolnemu ciśnieniu krytycznemu jest rzędu $\varphi^{-1/2}$ (fizyczne amplitudy ah są odpowiednio rzędu $\varphi^{2/3}$ i $\varphi^{1/2}$). Aby uczynić analizę bardziej jasną i zwartą, zakładamy tutaj początkowo $a \approx \varphi^{-1/3}$, a później zweryfikujemy to założenie. A zatem poprawność uzyskanego przybliżonego wzoru na parametr d i dalszych wzorów będzie ograniczać się tylko do analizy górnego ciśnienia krytycznego dla powłok średniej długości. Według tych założeń we wzorze (3.1) decyduje przede wszystkim licznik. Tak więc, jeżeli w liczniku pozostawimy tylko wyrazy rzędu 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6 i 6/6 (pomijając 7/6 i wyższe), a w mianowniku — wyraz rzędu 0, to otrzymamy

$$(3.3) \quad d = \frac{hm^2}{8R} (a + V).$$

Pozostawienie tylko «jedyńki» w mianowniku wzoru (3.1), a więc wyrazu rzędu 0, zapewnia już dokładność sześciu rzędów w liczniku. Jednakże podstawienie (3.3) do pierwszego równania (2.4) połączone jest z pewną komplikacją. Podstawowym rzędem w tym równaniu jest mianowicie rząd 6/6. Są tam wprowadzić trzy wyrazy rzędu 2/6 i 4/6, ale w sumie rzędy te znikają. A zatem musimy uporządkować omawiane składniki i zwiększyć dokładność w tym szczególnym przypadku. Łatwo można sprawdzić, że

$$(3.4) \quad d^2 + \frac{h^2 m^4}{64R^2} (2a^2 + 3aV + V^2) - \frac{dhm^2}{8R} (3a + 2V) = \\ = \left[d - \frac{hm^2}{8R} (a + V) \right] \left[d - \frac{hm^2}{8R} (2a + V) \right].$$

W związku z tym podstawienie (3.3) do pierwszego nawiasu kwadratowego (3.4) daje zero, ale my musimy pozostawić wyrazy rzędu 6/6, 7/6, 8/6 i 9/6 (cztery kolejne rzędy). Dążąc do tego, na podstawie (3.1), określamy na początku ten nawias dokładnym wzorem

$$(3.5) \quad d - \frac{hm^2}{8R} (a + V) = \left\{ \frac{hR^3 \delta^4 m^2}{(\delta^2 R^2 + m^2)^2} (a + V) - \right. \\ \left. - \frac{h^3 R \delta^4 m^6}{4} \left[\frac{1}{(\delta^2 R^2 + m^2)^2} + \frac{1}{(9\delta^2 R^2 + m^2)^2} \right] (a + V)^3 - \right. \\ \left. - \frac{h^3 R \delta^4 m^2}{6(1 - \nu^2)} (a + V) + \frac{pm^2}{8Ea} (2\delta^2 R^2 - 3) (a + V)^2 \right\};$$

$$(3.5) \quad \left[\text{c.d.} \right] \quad \left\{ 1 + \frac{4h^2 R^2 \delta^4}{3(1-\nu^2)} + 2h^2 R^2 \delta^4 m^4 \left[\frac{1}{(\delta^2 R^2 + m^2)^2} + \frac{1}{(9\delta^2 R^2 + m^2)^2} \right] (a+V)^2 - \frac{pR}{Eah} (2\delta^2 R^2 - 3)(a+V) \right\},$$

a następnie pozostawiamy tylko wyrazy rzędu od 7/6 do 10/6 (dokładność czterech kolejnych rzędów). Wykonując wszystkie niezbędne działania otrzymujemy

$$(3.6) \quad d - \frac{hm^2}{8R} (a+V) = \frac{hR^3 \delta^4}{m^2} (a+V) - \frac{1}{2} h^3 R \delta^4 m^2 a^3 + \frac{pam^2}{8E} (2\delta^2 R^2 - 3) - \frac{2hR^5 \delta^6 a}{m^4}.$$

W drugim nawiasie (3.4) dokładność (3.3) jest zadowalająca. Wstawiając (3.3), (3.4) i (3.6) do pierwszego równania (2.4) i pozostawiając tylko wyrazy rzędu 6/6, 7/6, 8/6 i 9/6 otrzymujemy

$$(3.7) \quad \frac{h^3 m^2 a}{6(1-\nu^2) R^3} (2\delta^2 R^2 + m^2) - \frac{15}{8} h^3 a^3 R \delta^4 + \frac{2ah\delta^4 R^3}{m^4} \left(1 - 2 \frac{\delta^2 R^2}{m^2} \right) - \frac{p}{E} \left[2a \left(m^2 - 1 + \frac{1}{2} \delta^2 R^2 \right) + m^2 V \right] = 0,$$

kończąc w ten sposób pierwszy krok analizy.

4. WYZNACZENIE CIŚNIENIA W ZALEŻNOŚCI OD AMPLITU DY UGIĘCIA

Równanie (3.7) jest liniowe względem ciśnienia p i może być łatwo rozwiązane. Otrzymane wyrażenie jest w postaci $p=f(a, V; m, h, R, L, E, \nu)$. Ze względu na dalszą analizę, wyznaczmy zależność ciśnienia p od amplitudy a i parametru niedoskonałości V , pisząc ten rezultat w ogólnej postaci:

$$(4.1) \quad \frac{p}{E} = \frac{\alpha_1 a + \alpha_2 a^2 V + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 V + \alpha_5 a^5}{\beta_0 V + \beta_1 a + \beta_2 a^2 V + \beta_3 a^3}.$$

W rozważanym przypadku współczynniki α_i i β_i mogą być przedstawione w bezwymiarowej postaci następująco:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\varphi^3 m^4}{6(1-\nu^2)} + \frac{2\varphi\mu^2}{m^4} + \frac{\varphi^3 \mu m^2}{3(1-\nu^2)} - \frac{4\varphi\mu^3}{m^6}, \\ \alpha_2 &= 0, & \beta_0 &= m^2, \\ \alpha_3 &= -\frac{15}{8} \varphi^3 \mu^2, & \beta_1 &= 2 \left(m^2 - 1 + \frac{1}{2} \mu \right), \\ \alpha_4 &= 0, & \beta_2 &= 0, \\ \alpha_5 &= 0, & \beta_3 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.3) \quad \mu = n^2 = \delta^2 R^2 = \pi^2 R^2 / L^2$$

(w pracach [35] i [38] ten geometryczny parametr był oznaczony przez \check{V} ; tutaj zmieniliśmy oznaczenie, aby zachować parametr Nasha V).

5. GÓRNE CIŚNIENIE KRYTYCZNE

Jak już nadmienialiśmy w p. 3, dokładność (3.3) i dalszych wzorów jest tak określona, aby wyznaczyć górne ciśnienie krytyczne i odpowiadającą mu amplitudę tak dokładnie i prosto, jak to jest tylko możliwe. Jednak niektóre wyniki mają charakter ogólny, ponieważ podstawowe wyrazy są takie same dla stosunkowo dużego zakresu amplitudy a . Przeanalizujemy z kolei funkcję $p = p(a)$.

Ciśnienia krytyczne odpowiadają ekstremalnym wartościom funkcji $p = p(a)$, mianowicie górne ciśnienie krytyczne maksimum, a dolne ciśnienie krytyczne minimum tej funkcji. Analityczny warunek ekstremum, $\partial p / \partial a = 0$, prowadzi do równania

$$(5.1) \quad 2\alpha_5 \beta_3 a^7 + (\alpha_4 \beta_3 + 3\alpha_5 \beta_2) Va^6 + 2(\alpha_4 \beta_2 V^2 + 2\alpha_5 \beta_1) a^5 + \\ + (-\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2 + 3\alpha_4 \beta_1 + 5\alpha_5 \beta_0) Va^4 + 2(-\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1 + 2\alpha_4 \beta_0 V^2) a^3 + \\ + (-\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + 3\alpha_3 \beta_0) Va^2 + 2\alpha_2 \beta_0 V^2 a + \alpha_1 \beta_0 V = 0.$$

Równanie to jest siódmego stopnia względem nieznannej amplitudy a ; określa ono jednocześnie amplitudę odpowiadającą górnemu ciśnieniu krytycznemu, dolnemu ciśnieniu krytycznemu i ma niektóre pierwiastki pozbawione sensu fizycznego. Nietrudno zauważyć, biorąc pod uwagę (4.2), że w rozważanym przez nas przypadku (przy przyjętej dokładności analizy) równanie (5.1) upraszcza się do postaci

$$(5.2) \quad 2\alpha_3 \beta_1 a^3 + 3\alpha_3 \beta_0 a^2 V + \alpha_1 \beta_0 V = 0.$$

Otrzymane równanie (5.2) znacznie upraszcza dalszą analizę. Wynika z niego również, że dla $V = 0$ amplituda $a = 0$, co odpowiada górnemu ciśnieniu krytycznemu dla powłoki idealnej, dla której zgodnie z (4.1) $\bar{p}_{kr}/E = \alpha_1/\beta_1$.

Przeanalizujemy na początku bliżej górne ciśnienie krytyczne dla idealnej powłoki $V = 0$, a następnie obliczymy poprawkę spowodowaną wpływem niedoskonałości wykonania powłoki. W tym przypadku, po podstawieniu na miejsce α_1 i β_1 odpowiednich wyrażań zgodnie z (4.2), rozwinięciu w szereg potęgowy i zachowaniu tylko wyrazów czterech kolejnych rzędów względem $\varphi = h/R$, tzn. 15/6, 16/6, 17/6 i 18/6, otrzymamy górne ciśnienie krytyczne \bar{p}_{kr} dla idealnej powłoki jako funkcję liczby półfal obwodowych m , mianowicie [nawiasy kwadratowe w (5.3) gromadzą wyrazy tego samego rzędu]:

$$(5.3) \quad \frac{\bar{p}_{kr}}{E} = \left[\frac{\varphi^3 m^2}{12(1-\nu^2)} + \frac{\varphi \mu^2}{m^6} \right] + \left[\frac{(3\mu+2)\varphi^3}{24(1-\nu^2)} + \frac{(2-5\mu)\varphi \mu^2}{2m^8} \right].$$

Warunek ekstremum (minimum) względem m^2 , tzn. $\partial(\bar{p}_{kr}/E)/\partial m^2 = 0$, prowadzi do równania

$$(5.4) \quad \varphi^2 m^{10} - 36(1-\nu^2) \mu^2 m^2 - 24(1-\nu^2) \mu^2 (2-5\mu) = 0,$$

którego rozwiązanie metodą podobną jak w pracy [38] (jeśli podstawić $\operatorname{tg}\alpha=1/2$, co opisuje hydrostatyczne ciśnienie) daje rezultat (odpowiadający minimalnej wartości ciśnienia):

$$(5.5) \quad m^2 = U = \sqrt{(\mu\lambda\sqrt{3})} - (5/6\mu - 1/3) + \dots = \sqrt{6} \sqrt[4]{(1-\nu^2)} \sqrt{\mu/\varphi} - (5/6\mu - 1/3) + o(\sqrt{\varphi}),$$

gdzie $o(\sqrt{\varphi})$ wskazuje rząd pierwszego opuszczonego wyrazu. Dla $\nu=0,3$ mamy

$$(5.6) \quad m^2 = 2,3924 \sqrt{\mu/\varphi} - (0,8333\mu - 0,3333) + o(\sqrt{\varphi}).$$

Podstawiając (5.5) do (5.3) otrzymujemy efektywny wzór na górne ciśnienie krytyczne dla rozważanej powłoki idealnej średniej długości z wymaganą dokładnością czterech kolejnych rzędów (liczonych co 1/6):

$$(5.7) \quad \frac{\bar{p}_{kr}}{E} = \frac{\sqrt{6}}{9(1-\nu^2)^{3/4}} \mu^{1/2} \varphi^{5/2} + \frac{\mu+2}{18(1-\nu^2)} \varphi^3,$$

który dla $\nu=0,3$ przyjmuje elementarną postać

$$(5.8) \quad \frac{\bar{p}_{kr}}{E} = 0,29212 \sqrt{\mu} \varphi^{5/2} + 0,06105(\mu+2) \varphi^3.$$

Naszym celem jest jednak wykonanie obliczeń dla powłoki niedoskonałej średniej długości, a więc wracamy z powrotem do równania (5.1). Interesuje nas tutaj górne ciśnienie krytyczne, tak więc szukamy takiej ekstremalnej wartości p , która przy $V=0$ jest osiągnięta dla $a=0$. Aby uzyskać analityczne rozwiązanie dla powłoki niedoskonałej, bierzemy pod uwagę parametr niedoskonałości V jako nowy mały parametr i przedstawiamy rozwiązanie (5.1) w postaci uogólnionego szeregu potęgowego

$$(5.9) \quad a = \bar{a} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j V^{\mu+\nu j},$$

gdzie wykładniki μ , $\mu+\nu$, $\mu+2\nu$, ... są niewiadome, lecz $\mu \neq 0$. Znajdujemy wartości tych wykładników, mianowicie wartości $\mu=1/3$ i $\nu=2/3$. Spełniają one warunki (5.1). Inna kombinacja $\mu=0$ i $\nu=1$ odpowiada dolnemu ciśnieniu krytycznemu i została zbadana w pracach [40 i 29]. Podobne rozwiązanie, określające amplitudę dolnego ciśnienia krytycznego, jest więc wyrażone w postaci zwyczajnego szeregu potęgowego względem V .

Podstawiając do (5.2) szereg [równanie ogólne (5.1) przybiera u nas postać (5.2)]

$$(5.10) \quad a = \bar{a} = a_0 V^{1/3} + a_1 V + a_2 V^{5/3} + \dots$$

i przyrównując współczynniki przy V , $V^{5/3}$, $V^{7/3}$, ... do zera, otrzymujemy układ równań ze względu na a_0 , a_1 , a_2 , ...:

$$(5.11) \quad \alpha_1 \beta_0 + 2\alpha_3 \beta_1 a_0^3 = 0, \quad \beta_0 + 2\beta_1 a_1 = 0, \quad \beta_0 a_1 + \beta_1 (a_0 a_2 + a_1^2) = 0, \dots,$$

skąd, ograniczając się do trzech współczynników i podstawiając je do (5.10) otrzymujemy amplitudę (wyrażoną przez α_i i β_i) odpowiadającą górnemu ciśnieniu krytycznemu dla niedoskonałej powłoki średniej długości w postaci

$$(5.12) \quad a = \bar{a} = \sqrt[3]{\frac{-\alpha_1 \beta_0}{2\alpha_3 \beta_1}} V^{1/3} - \frac{\beta_0}{2\beta_1} V + \frac{\beta_0^2}{4\beta_1^2} \sqrt[3]{\frac{2\alpha_3 \beta_1}{-\alpha_1 \beta_0}} V^{5/3} - \dots$$

A więc szereg (5.10) jest określony. Podstawiamy go do wzoru (4.1) na ciśnienie. Przedtem jeszcze zauważmy, że ze względu na (4.2) wzór (4.1) upraszcza się do postaci

$$(5.13) \quad \frac{p}{E} = \frac{\alpha_1 a + \alpha_3 a^3}{\beta_0 V + \beta_1 a}$$

Oznaczając górne ciśnienie krytyczne przez \bar{p}_{kr} i podstawiając (5.10) do (5.13), otrzymujemy

$$(5.14) \quad \frac{\bar{p}_{kr}}{E} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{-2\alpha_3 \beta_0^2}{\alpha_1 \beta_1^2}} V^{2/3} + 3 \sqrt[3]{\frac{\alpha_3^2 \beta_0^4}{2\alpha_1^2 \beta_1^4}} V^{4/3} - \dots \right)$$

Wzór powyższy przedstawia ogólną zależność na górne obciążenie krytyczne dla niedoskonałych (rzeczywistych) powłok średniej długości pod ciśnieniem hydrostatycznym. Przyjmując powłokę idealną $V=0$, otrzymujemy wzór MISESA [19] dla doskonałej powłoki średniej długości jako funkcję m , uzyskany na gruncie teorii liniowej. Efektywna analiza tego przypadku (przy zachowaniu założonej w p. 3 dokładności czterech kolejnych rzędów względem $\varphi = h/R$) przeprowadzona została na początku rozdziału, a jej efekt końcowy wyrażają wzory (5.5) i (5.7) lub (5.6) i (5.8) na \bar{p}_{kr} i m^2 dla powłoki idealnej.

Z (5.14) wynika, że niedoskonałości obniżają górne ciśnienie krytyczne, a główny wyraz korygujący jest proporcjonalny do $V^{2/3}$ zarówno dla rozważanych tutaj powłok średniej długości jak i powłok długich analizowanych w pracy [39] (zgodnie z ogólną sugestią W. T. KOITERA). Ten wykładnik jest mniejszy od 1, a więc zmniejszenie ciśnienia krytycznego nawet dla bardzo małych wartości niedoskonałości V może stać się dość znaczne.

Przejdźmy teraz do przedstawienia parametrów górnego ciśnienia krytycznego dla niedoskonałej powłoki średniej długości w formie efektywnej. Analizę rozpoczniemy od przedyskutowania amplitudy odpowiadającej górnemu ciśnieniu krytycznemu. Tak więc jeżeli do wzoru (5.12) podstawimy wyrażenia (4.2) i dokonamy odpowiednich rozwinięć (zgodnie z ustaleniami rozdziału 3) w szereg potęgowy względem $\varphi = h/R$, to otrzymamy

$$(5.15) \quad a = \bar{a} = \sqrt[3]{\frac{2}{15\varphi^3 \mu^2} \left(\frac{\varphi^3 m^4}{6(1-\nu^2)} + \frac{2\varphi \mu^2}{m^4} \right)} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2\varphi^2 \mu m^8 - 24(1-\nu^2) \mu^3}{\varphi^2 m^{10} + 12(1-\nu^2) \mu^2 m^2} + \frac{2-\mu}{2m^2} \right) \right] V^{1/3} - \frac{1}{4} V + \sqrt[3]{\frac{45(1-\nu^2) \varphi^2 \mu^2 m^4}{4096\varphi^2 m^8 + 49152(1-\nu^2) \mu^2}} V^{5/3} - \dots$$

Powyższy wzór określa amplitudę odpowiadającą górnemu ciśnieniu krytycznemu jako funkcję m i został ustalony przy zachowaniu wyrazów rzędu $-2/6$, $-1/6$, 0 $1/6$ i $2/6$. Piąty kolejny rząd $2/6$ współczynnika przy $V^{5/3}$ leży oczywiście poza przyjętą dokładnością czterech kolejnych rzędów względem $\varphi = h/R$. Został on jednak zatrzymany dla podkreślenia ogólnej budowy uogólnionego szeregu potęgowego na amplitudę $a = \bar{a}$. Okazuje się (na podstawie rozważań podanych w Dodatku do pracy [40]), że do efektywnego określenia amplitudy (rozważanej powłoki niedoskonałej średniej długości) wystarcza do wzoru (5.15) podstawić wyrażenie (5.5) na $m^2 = U$, odnoszące się do powłoki idealnej. Podstawienie to prowadzi do wzoru

$$(5.16) \quad a = \bar{a} = \left[\frac{2\sqrt[3]{3/5\mu\varphi}}{3\sqrt[6]{(1-\nu^2)}} + \frac{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{3/5}}{81\sqrt[12]{(1-\nu^2)^5}} (4-\mu) \sqrt[6]{\frac{\varphi}{\mu^5}} \right] V^{1/3} - \\ - \frac{1}{4} \varphi^0 V + \frac{3}{32} \sqrt[3]{\frac{5\mu\varphi}{3}} \sqrt[6]{(1-\nu^2)} V^{5/3} - \dots,$$

zawierającego wyraz rzędu $2/6$ przy $V^{5/3}$ podany jak już wspomniano orientacyjnie. Dla współczynnika Poissona $\nu = 0,3$ wzór (5.16) przybiera postać

$$(5.17) \quad a = \bar{a} = \left[\frac{0,57403}{\sqrt[3]{\mu\varphi}} + 0,07052 (4-\mu) \sqrt[6]{\frac{\varphi}{\mu^5}} \right] V^{1/3} - \\ - \frac{1}{4} V + 0,10945 \sqrt[3]{\mu\varphi} V^{5/3} - \dots$$

Wyraz przy $V^{5/3}$ obliczono podstawiając tylko pierwszy wyraz szeregu (5.5).

Przeanalizujemy wpływ parametru niedoskonałości V na górne ciśnienie krytyczne. Dążąc również do ustalenia wzoru efektywnego podstawiamy zależności (4.2) do (5.14) i dokonujemy niezbędnych rozwinięć w szereg potęgowy względem $\varphi = h/R$ konsekwentnie z dokładnością czterech kolejnych rzędów (pozostawiając piąty kolejny rząd dla podkreślenia ogólnego charakteru szeregu wyrażającego \bar{p}_{kr} , podobnie jak przy analizie amplitudy). Zachowując zatem w rozwinięciu wyrazy rzędu $15/6$, $16/6$, $17/6$, $18/6$ i w ostatnim wyrazie szeregu wyrazy rzędu $19/6$ otrzymamy

$$(5.18) \quad \frac{\bar{p}_{kr}}{E} = \left[\frac{\varphi^3 m^2}{12(1-\nu^2)} + \frac{\varphi\mu^2}{m^6} \right] + \left[\frac{(3\mu+2)\varphi^3}{24(1-\nu^2)} + \frac{(2-5\mu)\varphi\mu^2}{2m^8} \right] - \\ - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{15\varphi^3\mu^2}{128m^6} \left(\frac{\varphi^3 m^4}{6(1-\nu^2)} + \frac{2\varphi\mu^2}{m^4} \right)^2} V^{2/3} + \\ + 3 \sqrt[3]{\left(\frac{15\varphi^3\mu^2}{128m^6} \right)^2 \left(\frac{\varphi^3 m^4}{6(1-\nu^2)} + \frac{2\varphi\mu^2}{m^4} \right)} V^{4/3} - \dots$$

Aby wyeliminować m ze wzoru (5.18), czyli ustalić minimalną wartość \bar{p}_{kr} względem m w formie efektywnej, piszemy warunek ekstremum (minimum) $\partial \left(\frac{\bar{p}_{kr}}{E} \right) / \partial m^2 = 0$. Warunek ten prowadzi do równania

$$(5.19) \quad 4\sqrt[3]{225\mu\varphi} [\varphi^2 m^8 + 12(1-\nu^2)\mu^2]^4 [\varphi^2 m^{10} - 36(1-\nu^2)\mu^2 m^2 - \\ - 24(1-\nu^2)\mu^2(2-5\mu)] - 15\varphi\mu\sqrt[3]{3(1-\nu^2)m^{10}} [\varphi^4 m^{16} - \\ - 72(1-\nu^2)\varphi^2\mu^2 m^8 - 1008(1-\nu^2)^2\mu^4] V^{2/3} + \dots = 0.$$

Rozwiązanie tego równania może być przedstawione w postaci podwójnego szeregu potęgowego względem parametrów φ i V :

$$(5.20) \quad m^2 = U = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{jn} \varphi^{(j-1)/2} V^{2n/3},$$

mianowicie

$$(5.21) \quad m^2 = U = \sqrt[4]{(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{6\mu}{\varphi}} - \left(\frac{5}{6}\mu - \frac{1}{3} \right) + o(\sqrt{\varphi}) - \\ - \frac{5\sqrt{6}}{24} \sqrt[3]{\frac{9}{25}} \sqrt[12]{(1-\nu^2)^5} \sqrt[6]{\frac{\mu^5}{\varphi}} V^{2/3} + \dots$$

Dla $\nu=0,3$ mamy

$$(5.22) \quad m^2 = 2,3924 \sqrt{\mu/\varphi} - (0,8333\mu - 0,3333) + o(\sqrt{\varphi}) - 0,34923 \sqrt[6]{\frac{\mu^5}{\varphi}} V^{2/3} + \dots$$

Podstawienie (5.21) do (5.18) daje poszukiwaną minimalną wartość górnego ciśnienia krytycznego względem m :

$$(5.23) \quad \frac{\bar{p}_{kr}}{E} = \frac{\sqrt{6\mu}}{9\sqrt[4]{(1-\nu^2)^3}} \varphi^{15/6} + \frac{\mu+2}{18(1-\nu^2)} \varphi^{18/6} + \dots \\ - \frac{1}{8} \sqrt[3]{10\sqrt{6}} (1-\nu^2)^{-7/12} \mu^{5/6} \varphi^{17/6} V^{2/3} + \\ + \frac{3}{32} \sqrt[3]{\frac{50\sqrt{6}}{3(1-\nu^2)}} (1-\nu^2)^{-1/12} \mu^{7/6} \varphi^{19/6} V^{4/3} - \dots$$

Dla $\nu=0,3$ wzór (5.23) przybiera postać

$$(5.24) \quad \frac{\bar{p}_{kr}}{E} = 0,29212 \sqrt{\mu} \varphi^{5/2} + 0,06105 (\mu+2) \varphi^3 - 0,38520 \sqrt[6]{\mu^5} \varphi^{17/6} V^{2/3} + \\ + 0,33682 \mu \sqrt[6]{\mu} \varphi^{19/6} V^{4/3} - \dots$$

Szereg (5.23) ustalono zachowując cztery kolejne rzędy względem φ , mianowicie 15/6, 16/6, 17/6 i 18/6. Piąty kolejny rząd 19/6 leży oczywiście poza przyjętą dokładnością i został zatrzymany jedynie dla podkreślenia ogólnej budowy tego szeregu. Przy podobnych założeniach został ustalony szereg (5.16) określający amplitudę odpowiadającą górnemu ciśnieniu krytycznemu dla rozważanej niedoskonałej powłoki średniej długości oraz szereg (5.21) na kwadrat liczby obwodowych półfal m^2 .

Z kolei możemy sprawdzić nasze założenia odnośnie rzędów m^2 , \bar{p}_{kr} i a . W p. 3 założyliśmy podstawowe rzędy następująco: $m^2 \sim \varphi^{-1/2}$, $\bar{p}_{kr} \sim \varphi^{5/2}$ i $a \sim \varphi^{-1/3}$. Szeregi (5.21), (5.23) i (5.16) weryfikują bezspornie te założenia. Z (5.23) wynika, że parametr niedoskonałości V powoduje dość ostry spadek górnego ciśnienia krytycznego, ponieważ główny wyraz korygujący jest proporcjonalny do $V^{2/3}$. Dolne ciśnienie krytyczne dla tej powłoki maleje proporcjonalnie do V^1 . A więc zmniejszenie górnego ciśnienia krytycznego spowodowane niedoskonałością jest bardziej wyraźne niż ciśnienia dolnego, co zauważył już A. S. WOLMIR [34] na podstawie działań liczbowych.

6. STRESZCZENIE WYNIKÓW PRZEDSTAWIONYCH W WIELKOŚCIACH FIZYCZNYCH

Szeregi (5.22), (5.24) i (5.17) określają parametry górnego ciśnienia krytycznego rozważanej powłoki i mogą być zalecone do zastosowań w praktyce. Wracając do fizycznych wielkości przedstawiamy je ostatecznie w postaci (dla $\nu=0,3$)

$$(6.1) \quad m^2 = 7,51214 \frac{R}{L} \sqrt{\frac{R}{h}} - \left(8,22434 \frac{R^2}{L^2} - 0,3333 \right) - \\ - 3,71862 \frac{R^2}{Lh} \sqrt[6]{\frac{h}{R}} \sqrt[3]{\frac{f_0^2}{L^2}} + \dots,$$

$$(6.2) \quad \frac{\bar{p}_{kr}}{E} = 0,91726 \frac{h^2}{LR} \sqrt{\frac{h}{R}} + 0,12210 \left(1 + \frac{\pi^2 R^2}{2L^2} \right) \left(\frac{h}{R} \right)^3 - \\ - 4,13884 \frac{h^2}{LR} \sqrt[3]{\left(\frac{h}{L} \right)^2} \sqrt[6]{\frac{h}{R}} \sqrt[3]{\left(\frac{f_0}{h} \right)^2} + \dots,$$

$$(6.3) \quad f = \left[0,2668 \sqrt[3]{\frac{L^2}{Rh}} + 0,0105 \frac{4L^2 - \pi^2 R^2}{LR} \sqrt[3]{\frac{L^2}{R^2}} \sqrt[6]{\frac{h}{R}} \right] \sqrt[3]{2h^2 f_0} - \\ - \frac{1}{2} f_0 + \dots,$$

gdzie $f = ah$ i $f_0 = a_0 h$ są fizycznymi amplitudami ugięć.

Ostatnie trzy wzory uwzględniają już tylko cztery kolejne rzędy względem $\varphi = h/R$ (piąty kolejny rząd i wyższe — jako leżące poza przyjętą dokładnością — pominięto).

7. PRZYKŁAD

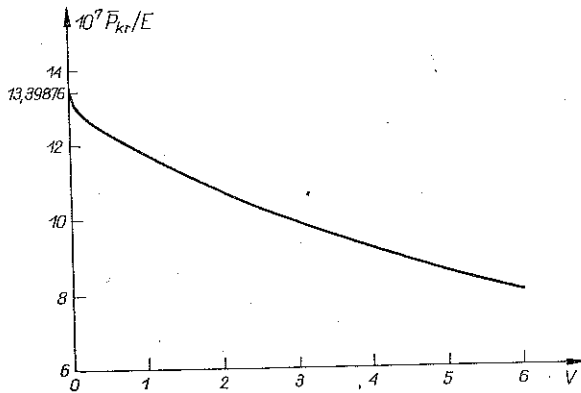
Nasze dotychczasowe rozważania dotyczyły powłoki niedoskonałej, cienkościennej, średniej długości o brzegach wolno podpartych, pod działaniem ciśnienia hydrostatycznego. Dla analizowanego tutaj wybożenia sprężystego można będzie na podstawie Rys. 1 (s. 170 pracy [35]) przyjąć przykładowo następujące wartości liczbowe: $L/R = 10$ i $\lambda = 300$. Wartości te odpowiadają bezspornie idealnym powłokom cienkościennym średniej długości i wybożeniu sprężystemu, a zakładamy, że również

nieidealne powłoki o takich parametrach mogą być traktowane jako powłoki średniej długości.

Przy powyższych danych i przy $\nu=0,3$ wzór (6.2) na górne ciśnienie krytyczne przybiera postać:

$$(7.1) \quad \frac{\bar{P}_{kr}}{E} \approx (13,39876 - 1,59079 V^{2/3}) \cdot 10^{-7}.$$

Wykres funkcji (7.1) z założoną w p. 3 dokładnością jest pokazany na rys. 1; przedstawia on charakter zmniejszania się górnego ciśnienia krytycznego w zależności od parametru $V=2a_0=2f_0/h$. Dla czysto osiowego ściskania powłoki względne zmniejszenie to byłoby niewątpliwie o wiele większe.



Rys. 1.

Ze wzorów (6.1) i (6.3) można również określić wpływ V na parametry m^2 i \bar{a} odpowiadające \bar{P}_{kr} .

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. O. ALMROTH, *Post-buckling behaviour of axially compressed circular cylinders*, AIAA J., 1, 3, 630-633, 1963.
2. S. BUĆKO, *Analiza stateczności osiowo ściskanych powłok walcowych metodą uogólnionych szeregów potęgowych*, Arch. Bud. Masz., 13, 3, 307-327, 1966.
3. B. BUDIANSKY and J. C. AMAZIGO, *Initial postbuckling behaviour of cylindrical shells under external pressure*, J. Math. Phys., 47, 223-235, 1968.
4. B. BUDIANSKY and J. W. HUTCHINSON, *A survey of some buckling problems*, AIAA J., 4, 1505-1510, 1966.
5. L. H. DONNELL, C. C. WAN, *Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression*, J. Appl. Mech., 17, 1, 73-83, 1950.
6. C. L. DYM, N. J. HOFF, *Perturbation solutions for the buckling problems of axially compressed thin cylindrical shells of finite or infinite length*, Trans. ASME, 4, E35, 4, 754-762, 1968.
7. E. I. GRIGOLIUK i W. W. KABANOW, *Ustojeźliwość krugowych cylindryczeskich obołoczek*, Itogi Nauki, Seria Mechanika, Moskwa 1969.
8. J. W. HUTCHINSON and W. T. KOITER, *Postbuckling theory*, Appl. Mech. Rev., 23, 1353-1366, 1970.
9. N. J. HOFF, W. A. MADSEN, J. MAYERS, *Postbuckling equilibrium of axially compressed circular cylindrical shells*, AIAA J., 4, 1, 126-133, 1966.

10. J. W. HUTCHINSON, *Axial buckling of pressurized imperfect cylindrical shells*, AJAA J., 3, 8, 1461-1466, 1965.
11. F. S. ISANBAJEWA, *Opriedielenje nižniej kriticzeskoj nagruzki cilindriczeskoj oboloczki pri wsiestoronnom szatii*, Izw. Kazanskogo Filiala ANSSSR, 7, 1955.
12. YA. F. KAYUK, *On the convergence of the small parameter expansions in the geometrically nonlinear problems* [in Russian], Prikladnaja Mieczanika, 9, 3, 83-89, 1973.
13. J. KEMPNER, K. A. V. PANDALAI, S. A. PATEL, J. CROUZET-PASCAL, *Postbuckling behavior of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 24, 4, 253-264, 1959.
14. TH. KÁRMÁN and H. S. TSIEN, *The buckling of thin spherical shells by external pressure*, J. Aero. Sci., 7, 43-50, 1939.
15. TH. KÁRMÁN and H. S. TSIEN, *The buckling of thin cylindrical shells under axial compression*, J. Aero. Sci., 8, 303, 1941.
16. W. T. KOITER, *On the stability of elastic equilibrium* [in Deutch], Thesis, Amsterdam 1945 (English translation: NASA TTF-10, 833, 1967).
17. W. T. KOITER, *Elastic stability and postbuckling behaviour*, Proc. Symp. Non-linear Problems, Univ. of Wisconsin Press, Madison, 257-275, 1963.
18. W. T. KOITER, *The effect of axisymmetric imperfections on the buckling of cylindrical shells under axial compression*, Koninkl. Néd. Akad. Wetenschap., Proc. Ser. B66, 265-279, 1963; Lockheed Missiles and Space Co. TR6-90-63-86, August 1963.
19. R. MISES, *Der kritische Aussendruck für allseits belastete zylindrische Rohre*, Fest. zum 70 Geburtstag von Prof. Dr. A. STODOLA, Zurich 1929.
20. W. E. MINIEW, *Ekspierimentalnoje issliedowanije wlijanija naczalnych nieprawilnostiej na ustojcziwost cilindriczeskich oboloczek pri wsiestoronniem szatii*, Trudy WWJA im. Żukowskiego (1958).
21. W. A. NASH, *Recent advances in the buckling of thin shells*, Appl. Mech. Rev., 13, 161-164, 1960.
22. W. A. NASH, *Effect of large deflections and initial imperfections on the buckling of cylindrical shells subject to hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 22, 4, 264-269, 1955.
23. Z. NOWAK, M. ŻYCZKOWSKI, *Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych*, Mech. Teor. i Stos., 2, 1, 31-66, 1963.
24. Z. NOWAK, *Nieliniowe zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki walcowej pod ciśnieniem hydrostatycznym*, Arch. Bud. Masz., 11, 1, 619-636, 1965.
25. J. ROORDA, *The buckling behavior of imperfect structural systems*, J. Mech. Phys. Solids, 13, 267-280, 1965.
26. J. ROORDA, *On the buckling of symmetric structural systems with first and second order imperfections*, Int. J. Solids Structures, 4, 1137-1148, 1968.
27. M. J. SEWELL, *The static perturbation technique in buckling problems*, J. Mech. Phys. Solids, 13, 247-265, 1965.
28. M. J. SEWELL, *A method of postbuckling analysis*, J. Mech. Phys. Solids, 17, 219-233, 1969.
29. K. SOBIESIAK, *Analityczna ocena dolnego hydrostatycznego ciśnienia krytycznego dla niedoskonałych długich powłok cylindrycznych* [w druku].
30. R. C. TENNYSON, *Buckling of circular cylindrical shells in axial compression*, AIAA J., 2, 7, 1351-1353, 1964.
31. R. C. TENNYSON, *An experimental investigation of the buckling of circular cylindrical shells in axial compression using the photoelastic technique*, Univ. of Toronto, Inst. Aerosp. Stud. Rep. Nr 102, 1964.
32. R. C. TENNYSON, D. B. MUGGERIDGE, *Buckling of axisymmetric imperfect circular cylindrical shells under axial compression*, AIAA J., 7, 11, 2127-2131, 1969.
33. J. M. T. THOMPSON, *A new approach to elastic branching analysis*, J. Mech. Phys. Solids, 18, 29-42, 1970.
34. A. S. WOLMIR, *O wlijanii naczalnych nieprawilnostiej na ustojcziwost cilindriczeskich oboloczek pri wnieszeniem dawlenii*, Dokl. AN SSSR, 2, 113, 291-293, 1957.

35. M. ŻYCZKOWSKI, *Analiza stateczności promieniowo ścisanych powłok walcowych metodą uogólnionych szeregów potęgowych*, Rozpr. Inżyn., 14, 1, 157-174, 1966. English Summary: Coll. Theory of Plates and Shells, SAV, Bratislava, 505-514, 1966.
36. M. ŻYCZKOWSKI, *Potenzieren von verallgemeinerten Potenzreihen mit beliebigem Exponent*, Z. angew. Math. Phys., 12, 6, 572-576, 1961.
37. M. ŻYCZKOWSKI, *Operations on generalized power series*, Z. angew. Math. Mechanik, 45, 4, 235-244, 1965.
38. M. ŻYCZKOWSKI, S. BUĆKO, *A method of stability analysis of cylindrical shells under biaxial compression*, AIAA J., 9, 2259-2263, 1971.
39. M. ŻYCZKOWSKI and K. SOBIESIAK, *Analytical treatment of the influence of imperfections on upper critical pressure for long cylindrical shells*, Arch. Mech. Stos., 23, 875-884, 1971.
40. M. ŻYCZKOWSKI and K. SOBIESIAK, *Analytical evaluation of lower critical hydrostatic pressure for imperfect cylindrical shells of moderate length*, Int. J. Non-Linear Mechanics, 8, 465-478. Pergamon Press 1973.

Резюме

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЕРХНЕГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО КРИТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСОВЕРШЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ

В работе представлена аналитическая оценка верхнего гидростатического критического давления для несовершенных цилиндрических оболочек средней длины. Предложенный метод имеет общий характер. Потому, что критическое состояние для несовершенных оболочек достигается при некоторых конечных прогибах оболочки, рассуждения основаны на нелинейной теории. Исходные уравнения были приняты в форме предложенной В. А. Нэшом. Для эффективного определения верхнего гидростатического критического давления и параметров (a, m) , отвечающих этому давлению, применяется метод обобщенных степенных рядов. Найдено, что зависимость верхнего критического давления от параметра несовершенства V пропорциональна $V^{2/3}$, значит больше чем в случае нижнего критического давления, которое уменьшается линейно-пропорционально V . В работе приводится тоже числовой пример.

SUMMARY

ANALYTICAL EVALUATION OF UPPER CRITICAL HYDROSTATIC PRESSURE FOR IMPERFECT CYLINDRICAL SHELLS OF MODERATE LENGTH

In this paper the analytic upper bound of critical hydrostatic pressure for imperfect cylindrical shells of moderate length was presented. The method proposed has, however, the general character. Since the critical state for the imperfect shells is reached at the certain finite deflections of the shell the considerations were based on the non-linear theory. The basic equations were assumed in a form derived by W.A. NASH.

For effective evaluation of the upper critical hydrostatic pressure the method of the generalized power series was applied. It was confirmed that the dependence of the upper critical pressure on the imperfection parameter V is proportional to $V^{2/3}$; thus greater than in a case of the lower critical pressure which decreases linearly-proportionally to V .

The numerical example is also given.

ZAKŁAD MECHANIKI STOSOWANEJ, WSI, LUBLIN

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 września 1974 r.