ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 22, 3, 445–467, 1974
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

ZAGADNIENIA RÓWNOWAGI GRUBEJ PŁYTY POPRZECZNIE IZOTROPOWEJ

BOGDAN ROGOWSKI (ŁÓDŹ)

W pracy podano rozwiązania przemieszczeniowych równań zagadnienia równowagi grubych płyt poprzecznie izotropowych. Rozwiązania składają się z całek szczególnych oraz z funkcji własnych jednorodnego zagadnienia brzegowego na płaszczyznach ograniczających $z=\pm h$. Wśród rozwiązań jednorodnych, zapisanych w postaci zmiennych rozdzielonych, występują odpowiednie funkcje zmiennej z (wzdłuż grubości płyty) i funkcje dwóch pozostałych zmiennych: biharmoniczna w zagadnieniu płytowym i harmoniczna w zagadnieniu tarczowym oraz metaharmoniczne zespolone, sprzężone funkcje dla potencjalnego pola przemieszczenia i metaharmoniczne rzeczywiste funkcje dla pola rotacyjnego. Jako przypadek szczególny omawianego w pracy ośrodka rozpatrzono ośrodek izotropowy.

WSTĘP

W pracy [6] autor, wychodząc z równań podanych w [3] i wykorzystując specjalne operatory różniczkowe, wprowadzone przez A. I. ŁURIE [1 i 4], rozwiązał zagadnienie sprężystej równowagi dla nieskończonej warstwy z materiału o izotropii poprzecznej. Przy rozpatrywaniu równowagi grubej płyty skończonych wymiarów warunki brzegowe spełnia autor, zakładając stosowalność zasady de Saint Venanta.

W niniejszej pracy buduje się rozwiązania dla zagadnień równowagi grubej płyty poprzecznie izotropowej, dowolnie obciążonej na płaszczyznach ograniczających. Rozwiązania te mogą być wyjściowymi do analizowania trójwymiarowego pola naprężeń w grubych płytach i dają możliwość dokładnego spełnienia warunków brzegowych na konturze płyty. Poszukiwanie rozwiązań ścisłych w ramach trójwymiarowej teorii sprężystości jest w przypadku płyt poprzecznie izotropowych szczególnie ważne, gdyż jak wiadomo większość z nich charakteryzuje się dużą podatnością na ścinanie i wpływ odkształceń postaciowych na stany naprężenia jest w nich znaczny [9].

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

Greckie indeksy przebiegają wartości 1 i 2, a łacińskie 1, 2, 3. Przyjęto konwencję sumacyjną; powtarzające się indeksy greckie oznaczają sumowanie od 1 do 2, a łacińskie od 1 do 3.

$x_i \equiv (x_\alpha, x_3 = z)$ przestrzenny układ współrzędnych kartezjańskich; prostokątny (osie x_α leżą w płaszczyźnie środkowej płyty, oś z skierowana pionowo do góry),

$\dfrac{\partial ...}{\partial x_\alpha} = (...)_{,\alpha} = \partial_\alpha (...)$ pochodna cząstkowa względem x_α,

$\dfrac{\partial ...}{\partial z} = (...)'$ pochodna względem z,

$\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2=(\ldots)_{,\alpha\alpha}$	operator Laplace'a względem dwóch zmiennych x_1 i x_2,
$u_i\,(u_\alpha, u_3)$	składowe wektora przemieszczenia w płaszczyznach odpowiednio równoległych i normalnych do płaszczyzny środkowej,
ε_{ij}	składowe tensora odkształcenia,
σ_{ij}	składowe tensora naprężenia,
$p_i^{\pm}\,(x_\alpha)\equiv(p_\alpha^{\pm}, q^{\pm})$	zewnętrzne powierzchniowe siły przyłożone odpowiednio do górnej (+) i dolnej (−) płaszczyzny płyty (p_α — obciążenia styczne, q — obciążenia normalne), dla których umowa o znakach jest taka sama jak dla naprężeń odpowiednio stycznych i normalnych,
$\tau^{\pm}\,(x_\alpha),\ \chi^{\pm}\,(x_\alpha)$	funkcje obciążeń, które przy danych obciążeniach stycznych $p_\alpha^{\pm}$ wyznacza się ze wzorów (2.8).
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$	parametry materiałowe dla ośrodka poprzecznie izotropowego,
$E, G, \nu, E_1, G_1, \nu_1$	moduły sprężystości i współczynniki Poissona dla ośrodka poprzecznie izotropowego w płaszczyznach odpowiednio równoległych i normalnych do izotropowej płaszczyzny środkowej,
$\in_\alpha^\beta$	symbole permutacyjne,
$\delta_{\alpha\beta}$	delta Kroneckera,
$2h$	grubość płyty.

1. Podstawowy układ równań dla ośrodka poprzecznie izotropowego

Rozpatrzmy w ramach trójwymiarowej, liniowej teorii sprężystości zagadnienie równowagi płyty, dowolnie obciążonej na płaszczyznach ograniczających $z=\pm h$. O materiale płyty założymy, że jest jednorodny, liniowo-sprężysty, poprzecznie izotropowy, przy czym płaszczyzna izotropii pokrywa się z płaszczyzną środkową płyty.

Stan naprężenia i odkształcenia rozpatrywanego ośrodka opisuje się uogólnionym prawem Hooke'a, wiążącym naprężenia σ_{ij} i małe odkształcenia ε_{ij} [2]

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\alpha\beta}=\lambda_1\,\delta_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\gamma\gamma}+\lambda_2\,\delta_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{33}+2\mu_1\,\varepsilon_{\alpha\beta},\\
&\sigma_{\alpha 3}=2\mu_2\,\varepsilon_{\alpha 3},\\
&\sigma_{33}=\lambda_2\,\varepsilon_{\gamma\gamma}+\lambda_3\,\varepsilon_{33},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

równaniami równowagi

$$
\sigma_{ij,j}+X_i=0,
\tag{1.2}
$$

związkami Cauchy'ego

$$
\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\,(u_{i,j}+u_{j,i}).
\tag{1.3}
$$

Do tych równań należy dołączyć warunki brzegowe, które dla płaszczyzn ograniczających $z=\pm h$ mogą wiązać naprężenia w ośrodku z powierzchniowymi siłami zewnętrznymi i które napiszemy w postaci [1]

$$
\begin{aligned}
&\sigma_3|_{z=h}\pm\sigma_3|_{z=-h}=q^{+}\pm q^{-},\\
&\sigma_{\alpha 3}|_{z=h}\pm\sigma_{\alpha 3}|_{z=-h}=p_\alpha^{+}\pm p_\alpha^{-}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Dla pozostałych brzegów wynikają one z warunków podparcia lub obciążenia i mogą być na przykład dla brzegu $x_1=a=\text{const}$ postaci

$$
u_1|_{x_1=a}=u_2|_{x_1=a}=u_3|_{x_1=a}=0
\tag{1.5}
$$

dla brzegu sztywno zamocowanego;

$$u_1|_{x_1=a}=\sigma_{12}|_{x_1=a}=u_3|_{x_1=a}=0 \tag{1.6}$$

w przypadku swobodnego zamocowania brzegu;

$$\sigma_1|_{x_1=a}=\sigma_{12}|_{x_1=a}=u_3|_{x_1=a}=0 \tag{1.7}$$

dla brzegu przesuwnie podpartego;

$$\sigma_1|_{x_1=a}=u_2|_{x_1=a}=u_3|_{x_1=a}=0 \tag{1.8}$$

dla brzegu nieprzesuwnie podpartego;

$$\sigma_1|_{x_1=a}=\sigma_{12}|_{x_1=a}=\sigma_{13}|_{x_1=a}=0 \tag{1.9}$$

dla brzegu swobodnego;

$$\sigma_1|_{x_1=a}=N(x_2, z), \quad \sigma_{12}|_{x_1=a}=T(x_2, z), \quad \sigma_{13}|_{x_1=a}=Z(x_2, z) \tag{1.10}$$

dla brzegu swobodnego, obciążonego naprężeniami odpowiednio normalnymi i stycznymi;

$$u_1|_{x_1=a}=U(x_2, z), \quad \sigma_{12}|_{x_1=a}=T(x_2, z), \quad \sigma_{13}|_{x_1=a}=Z(x_2, z) \tag{1.11}$$

dla brzegu swobodnego z danymi naprężeniami stycznymi i danym przemieszczeniem.

Występujące w równaniach (1.1) parametry materiałowe λ_i, μ_α wyrażają się przez techniczne stałe wzorami:

$$\begin{aligned} &\lambda_1=\frac{E}{1+\nu}\,\frac{\nu+\nu_1\nu_2}{1-\nu-2\nu_1\nu_2}, && \mu_1=G=\frac{E}{2(1+\nu)},\\ &\lambda_2=E\frac{\nu_1}{1-\nu-2\nu_1\nu_2}, && \mu_2=G_1,\\ &\lambda_3=E_1\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu_1\nu_2}, && E\nu_1=E_1\nu_2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Podstawienie (1.1) do (1.2) z uwzględnieniem (1.3) prowadzi do przemieszczeniowych równań równowagi omawianego ośrodka, które przy pominięciu sił masowych X_i napiszemy w postaci

$$\begin{aligned} &(\lambda_1+\mu_1)\,u_{\beta,\beta\alpha}+\mu_1\,u_{\alpha,\beta\beta}+\mu_2\,u_{\alpha,33}+(\lambda_2+\mu_2)\,u_{3,3\alpha}=0,\\ &(\lambda_2+\mu_2)\,u_{\beta,\beta3}+\mu_2\,u_{3,\beta\beta}+\lambda_3\,u_{3,33}=0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Warunki brzegowe (1.4) po uwzględnieniu równań (1.1) i (1.3) mają postać

$$\begin{aligned} &(\lambda_2\,u_{\alpha,\alpha}+\lambda_3\,u_{3,3})|_{z=h}\pm(\lambda_2\,u_{\alpha,\alpha}+\lambda_3\,u_{3,3})|_{z=-h}=q^+\pm q^-,\\ &(u_{\alpha,3}+u_{3,\alpha})|_{z=h}\pm(u_{\alpha,3}+u_{3,\alpha})|_{z=-h}=\frac{1}{\mu_2}(p_\alpha^+\pm p_\alpha^-). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Zagadnienie równowagi dowolnie obciążonej, poprzecznie izotropowej warstwy sprowadza się do scałkowania równań (1.13) przy warunkach brzegowych (1.14).

2. Rozdzielenie równań przemieszczeniowych i warunków brzegowych

Rozważymy teraz problem zastąpienia wyjściowego układu równań (1.13) i (1.14) przez układ równań z dwiema niewiadomymi i jedno równanie z jedną niewiadomą. Uzyskamy to przez wprowadzenie tzw. funkcji rozwiązujących. W tym celu przedstawimy składowe wektora przemieszczenia za pomocą funkcji przemieszczeń w postaci [5]

$$u_\alpha = v_{,\alpha} + \epsilon_\alpha^\beta \varphi_{,\beta}, \qquad u_3 = w. \tag{2.1}$$

Podstawiając (2.1) do (1.13) stwierdzamy, że przemieszczeniowe równania będą spełnione, jeśli funkcje φ, v, w spełniają równania

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \frac{\mu_1}{\mu_2} \Delta\varphi = 0, \\ &v'' + \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_2} \Delta v + \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_2} w' = 0, \\ &\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_3} \Delta v' + w'' + \frac{\mu_2}{\lambda_3} \Delta w = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Podstawienie (2.1) do (1.14) prowadzi do warunków brzegowych dla funkcji φ, v, w:

$$\begin{aligned} &(\lambda_2 \Delta v + \lambda_3 w')|_{z=h} \pm (\lambda_2 \Delta v + \lambda_3 w')|_{z=-h} = q^+ \pm q^-, \\ &(v'_{,\alpha} + \epsilon_\alpha^\beta \varphi'_{,\beta} + w_{,\alpha})|_{z=h} \pm (v'_{,\alpha} + \epsilon_\alpha^\beta \varphi'_{,\beta} + w_{,\alpha})|_{z=-h} = \frac{1}{\mu_2}(p_\alpha^+ \pm p_\alpha^-). \end{aligned} \tag{2.3}$$

W celu wydzielenia w warunkach brzegowych (2.3) związku dla funkcji φ postąpimy następująco (por. [5]). Funkcje obciążeń stycznych p_α^+, p_α^- wyrazimy przez nowe funkcje w postaci

$$p_\alpha^\pm = \tau_{,\alpha}^\pm + \epsilon_\alpha^\beta \chi_{,\beta}^\pm, \tag{2.4}$$

co prowadzi do następującego wyrażenia warunków brzegowych $(2.3)_2$:

$$\begin{aligned} &[(v' + w)|_{z=h} \pm (v' + w)|_{z=-h}]_{,\alpha} + \epsilon_\alpha^\beta [\varphi'|_{z=h} \pm \varphi'|_{z=-h}]_{,\beta} = \\ &\qquad = \frac{1}{\mu_2}[(\tau^+ \pm \tau^-)_{,\alpha} + (\chi^+ \pm \chi^-)_{,\beta}]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Warunki te będą spełnione, jeśli funkcje φ, v, w spełniać będą zależności

$$\begin{aligned} &(v' + w)|_{z=h} \pm (v' + w)|_{z=-h} = \frac{1}{\mu_2}(\tau^+ \pm \tau^-), \\ &\varphi'|_{z=h} \pm \varphi'|_{z=-h} = \frac{1}{\mu_2}(\chi^+ \pm \chi^-). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Warunki brzegowe na płaszczyznach $z=\pm h$ mają ostatecznie postać

$$
\begin{aligned}
&\varphi'|_{z=h}\pm\varphi'|_{z=-h}=\frac{1}{\mu_2}(\chi^+\pm\chi^-),\\
(2.7)\qquad &(\lambda_2\Delta v+\lambda_3 w')|_{z=h}\pm(\lambda_2\Delta v+\lambda_3 w')|_{z=h}=q^+\pm q^-,\\
&(v'+w)|_{z=h}\pm(v'+w)|_{z=-h}=\frac{1}{\mu_2}(\tau^+\pm\tau^-).
\end{aligned}
$$

Przy danych funkcjach $p_\alpha^\pm$ funkcje $\tau^\pm$, $\chi^\pm$ wyznaczymy ze wzorów:

$$
\begin{aligned}
&\tau^\pm=\iint\limits_\Omega\left(p_1^\pm\frac{\partial}{\partial x_1}\ln\frac{1}{r}+p_2^\pm\frac{\partial}{\partial x_2}\ln\frac{1}{r}\right)d\xi\,d\eta,\\
(2.8)\qquad &\chi^\pm=\iint\limits_\Omega\left(p_1^\pm\frac{\partial}{\partial x_2}\ln\frac{1}{r}-p_2^\pm\frac{\partial}{\partial x_1}\ln\frac{1}{r}\right)d\xi\,d\eta,\\
&r^2=(x_1-\xi)^2+(x_2-\eta)^2,
\end{aligned}
$$

które otrzymuje się przez wykorzystanie zależności (2.4):

$$
p_1^\pm=\frac{\partial\tau^\pm}{\partial x_1}+\frac{\partial\chi^\pm}{\partial x_2},\qquad p_2^\pm=\frac{\partial\tau^\pm}{\partial x_2}-\frac{\partial\chi^\pm}{\partial x_1}
$$

oraz wprowadzenie nowych funkcji $\omega_1^\pm,\omega_2^\pm$ wiążących się z funkcjami $\tau^\pm$, $\chi^\pm$ zależnościami

$$
\tau^\pm=\frac{\partial\omega_1^\pm}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_2^\pm}{\partial x_2},\qquad \chi^\pm=\frac{\partial\omega_1^\pm}{\partial x_2}-\frac{\partial\omega_2^\pm}{\partial x_1}
$$

i w związku z tym spełniających równania

$$
\Delta\omega_1^\pm=p_1^\pm,\qquad \Delta\omega_2^\pm=p_2^\pm.
$$

Zauważymy przy tym, że zachodzą związki

$$
(2.9)\qquad p_{\alpha,\alpha}^\pm=\Delta\tau^\pm,\qquad \epsilon_\alpha^\beta p_{\alpha,\beta}^\pm=\Delta\chi^\pm.
$$

Tak więc sprowadziliśmy zagadnienie równowagi warstwy do znalezienia rozwiązań równań (2.2), spełniających warunki brzegowe (2.7). Zauważmy, że dla potencjału φ mamy oddzielnie równanie $(2.2)_1$ i warunki brzegowe $(2.7)_1$, natomiast dla funkcji v, w mamy układ dwóch równań różniczkowych $(2.2)_2$ i $(2.2)_3$ oraz układ warunków brzegowych $(2.7)_2$ i $(2.7)_3$.

3. Rozwiązanie zagadnienia

Stosunkowo łatwo uzyskamy rozwiązania dla funkcji φ, opisującej zgodnie z (2.1) rotacyjną część składowych wektora przemieszczenia w płaszczyźnie płyty:

$$
(3.1)\qquad u_\alpha^R=\epsilon_\alpha^\beta\,\varphi_{,\beta}.
$$

Zgodnie z $(2.2)_1$ i $(2.7)_1$ mamy dla funkcji φ

$$\varphi''+\frac{\mu_1}{\mu_2}\Delta\varphi=0, \tag{3.2}$$

$$\varphi'|_{z=h}\pm\varphi'|_{z=-h}=\frac{1}{\mu_2}(\chi^+\pm\chi^-). \tag{3.3}$$

Poszukując funkcji φ w postaci iloczynu

$$\varphi(x_1, x_2, z)=G(z)\,\psi(x_1, x_2) \tag{3.4}$$

otrzymujemy z (3.2): dla funkcji $G(z)$ zwyczajne równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$G''(z)-q^2\,G(z)=0, \tag{3.5}$$

a dla funkcji $\psi(x_1, x_2)$ równanie Helmholtza

$$\Delta\psi+\frac{\mu_2}{\mu_1}q^2\,\psi=0, \tag{3.6}$$

gdzie q^2 jest dowolną stałą.

Z (3.5) otrzymujemy

$$G(z)=A\,\mathrm{sh}\,qz+B\,\mathrm{ch}\,qz \tag{3.7}$$

w przypadku gdy $q\neq 0$,

$$G^*(z)=A^*z+B^* \tag{3.7'}$$

w przypadku gdy $q=0$.

Dalej będziemy zakładać $q\neq 0$, gdyż dla $q=0$ rozwiązanie można otrzymać z ogólnego przypadku, wykonując przejście graniczne.

Uwzględniając (3.7) w (3.4) otrzymujemy dla funkcji φ

$$\varphi(x_1, x_2, z)=(A\,\mathrm{sh}\,qz+B\,\mathrm{ch}\,qz)\,\psi(x_1, x_2). \tag{3.8}$$

Warunki brzegowe (3.3) prowadzą do równań

$$\begin{aligned} A\psi q\,\mathrm{ch}\,qh&=\frac{1}{2\mu_2}(\chi^++\chi^-),\\ B\psi q\,\mathrm{sh}\,qh&=\frac{1}{2\mu_2}(\chi^+-\chi^-). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Rozwiązując (3.9) względem $A\psi$ i $B\psi$ i uwzględniając (3.8), otrzymujemy potencjał φ:

$$\varphi(x_1, x_2, z)=\frac{1}{2\mu_2}\left[(\chi^{\pm}_{(x_1,x_2)}+\chi^{-}_{(x_1,x_2)})\frac{\mathrm{sh}\,qz}{q\,\mathrm{ch}\,qh}+(\chi^{+}_{(x_1,x_2)}-\chi^{-}_{(x_1,x_2)})\frac{\mathrm{ch}\,qz}{q\,\mathrm{sh}\,qh}\right], \tag{3.10}$$

który zgodnie z (3.1) opisuje rotacyjną część pola przemieszczenia. Funkcja przemieszczeń φ określa dwa niesprzężone rotacyjne pola przemieszczeń: jedno z nich jest antysymetryczne względem płaszczyzny środkowej i występuje w zagadnieniu zginania płyty, drugie — symetryczne względem płaszczyzny środkowej, odpowiada zagadnieniu tarczowemu w płycie, a więc przypadkowi rozciągania-ściskania płyty. Te dwa stany naprężeń nazywać będziemy umownie odpowiednio zagadnieniem płytowym i tarczowym. Znajomość rozwiązania (3.10) jest na ogół niewystarczająca do rozwiązania konkretnego zagadnienia brzegowego dla konturu płyty. Dlatego też w dalszej części skonstruujemy rozwiązania jednorodne, tj. takie, które odpowiadają funkcjom przemieszczeń przy jednorodnych warunkach brzegowych (3.3).

Znajomość tych rozwiązań wraz z rozwiązaniem szczególnym, uwzględniającym obciążenia płaszczyzn ograniczających $z=\pm h$, które dane jest wzorem (3.10), pozwolą na spełnienie warunków brzegowych na konturze płyty. Jednorodne warunki brzegowe (3.3), po uwzględnieniu (3.8), prowadzą do równań określających parametry q:

$$q \operatorname{ch} qh=0 \tag{3.11}$$

dla zagadnienia płytowego;

$$q \operatorname{sh} qh=0 \tag{3.11'}$$

dla zagadnienia tarczowego.

Równanie (3.11) ma pierwiastki

$$q_0=0, \quad q_k=i\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi h^{-1}; \quad k=1, 2, 3, \ldots, \tag{3.12}$$

a pierwiastki równania (3.11′) są następujące:

$$q_0=0, \quad q_k=ik\pi h^{-1}; \quad k=0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.12'}$$

Zerowemu pierwiastkowi w zagadnieniu płytowym odpowiada liniowa funkcja zmiennej z, przy której jednorodne warunki brzegowe mogą być spełnione tylko wtedy, gdy funkcja ta jest tożsamościowo równa zeru. Pierwiastkom, określonym wzorami (3.12) i (3.12′), odpowiadają funkcje własne jednorodnego zagadnienia brzegowego, spełniające zgodnie z (3.6) równania

$$\Delta\psi_k-\frac{G_1}{G}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 h^{-2}\psi_k=0, \quad k=1, 2, 3, \ldots \tag{3.13}$$

dla zagadnienia płytowego oraz

$$\Delta\psi_k-\frac{G_1}{G}k^2\pi^2 h^{-2}\psi_k=0, \quad k=0, 1, 2, 3, \ldots \tag{3.13'}$$

dla zagadnienia tarczowego.

Wzory określające funkcję przemieszczenia φ otrzymamy uwzględniając w (3.8) wartości pierwiastków (3.12) i (3.12′). Mamy więc

$$\varphi(x_1, x_2, z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\frac{z}{h}\psi_k(x_1, x_2) \tag{3.14}$$

dla zagadnienia płytowego oraz

$$\varphi(x_1, x_2, z)=\sum_{k=0}^{\infty}\cos k\pi\frac{z}{h}\psi_k(x_1, x_2) \tag{3.14'}$$

dla zagadnienia tarczowego, gdzie za stałe dowolne Ai oraz B przyjęto 1. Uwzględniając we wzorze (3.1) zależność (3.14) i nieparzystą względem zmiennej z część rozwiązania szczególnego (3.10), otrzymujemy dla rotacyjnej części składowych wektora przemieszczenia w płaszczyźnie płyty następujące rozwiązanie w zagadnieniu płytowym:

$$(3.15)\qquad u_\alpha^R(x_1, x_2, z)=\frac{1}{2G_1}\frac{\operatorname{sh} qz}{q\operatorname{ch} qh}\in_\alpha^\beta[\chi^+_{(x_1,x_2)}+\chi^-_{(x_1,x_2)}]_{,\beta}+ \\ +\in_\alpha^\beta\sum_{k=1}^{\infty}\sin\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{z}{h}\psi_{1k,\beta}(x_1, x_2);$$

funkcje ψ_{1k} spełniają równania (3.13):

$$(3.16)\qquad \Delta\psi_{1k}-\frac{G_1}{G}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 h^{-2}\psi_{1k}=0,\qquad k=1, 2, 3, \ldots .$$

W rozwiązaniu szczególnym występującym w (3.15) q jest dowolną stałą, jednak taką, aby

$$\operatorname{ch} qh\neq 0,$$

czyli

$$(3.17)\qquad q\neq i\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi h^{-1},\qquad k=1, 2, 3, \ldots .$$

W szczególności przyjmując $q=0$, otrzymujemy

$$(3.18)\qquad u_\alpha^R=\frac{1}{2G_1}z\in_\alpha^\beta[\chi^++\chi^-]_{,\beta}+\in_\alpha^\beta\sum_{k=1}^{\infty}\sin\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{z}{h}\psi_{1k,\beta}.$$

Dla zagadnienia tarczowego otrzymamy

$$(3.19)\qquad u_\alpha^R(x_1, x_2, z)=\frac{1}{2G_1}\frac{\operatorname{ch} qz}{q\operatorname{sh} qh}\in_\alpha^\beta[\chi^+_{(x_1,x_2)}-\chi^-_{(x_1,x_2)}]_{,\beta}+ \\ +\in_\alpha^\beta\sum_{k=0}^{\infty}\cos k\pi\frac{z}{h}\psi_{2k,\beta}(x_1, x_2),$$

przy czym funkcje ψ_{2k} spełniają równania

$$(3.20)\qquad \Delta\psi_{2k}-\frac{G_1}{G}k^2\pi^2 h^{-2}\psi_{2k}=0,\qquad k=0, 1, 2, 3, \ldots .$$

W rozwiązaniu szczególnym, występującym w (3.19), za q można przyjąć dowolną stałą różną od $ik\pi h^{-1}$, $k=0, 1, 2, 3, \ldots$. Zauważmy, że rozwiązania ψ_{1k}, ψ_{2k} w istotny sposób zależą od stosunku modułu ścinania w płaszczyznach prostopadłych (G_1) do modułu ścinania w płaszczyznach równoległych (G) do izotropowej płaszczyzny środkowej. Dla większości materiałów poprzecznie izotropowych stosunek ten jest mały (od 1/40 do 1/2) w porównaniu z ośrodkiem izotropowym [1].

Jak wynika z (3.16) i (3.20), przy małych stosunkach G_1/G wpływ rozwiązań związanych z funkcjami ψ_{1k} i ψ_{2k} jest duży. Jest to fizycznie oczywiste, gdyż stosunek G_1/G charakteryzuje podatność płyty na ścinanie i im mniejsza jest jego wartość, tym wpływ odkształceń postaciowych w płaszczyźnie płyty na stany naprężenia i odkształcenia jest większy.

Przejdziemy teraz do znalezienia rozwiązań związanych z funkcjami w i v, które zgodnie z (2.1) określają potencjalne pole przemieszczeń. Funkcje w i v spełniają układ równań $(2.2)_2$ i $(2.2)_3$ oraz układ warunków brzegowych $(2.7)_2$ i $(2.7)_3$. Dla rozwiązania tego zagadnienia przyjmiemy symboliczny zapis A. I. Łurii [1 i 4]. Będziemy zatem w równaniach $(2.2)_2$ i $(2.2)_3$ operator Laplace'a traktować jako wielkość algebraiczną. Dla funkcji $w(x_\alpha, z)$, $v(x_\alpha, z)$ mamy więc układ «zwyczajnych» równań różniczkowych $(2.2)_2$, $(2.2)_3$, których rozwiązania uzależnione są od pierwiastków równania charakterystycznego

$$r^4+\Delta\left(\frac{(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3-\lambda_2(\lambda_2+2\mu_2)}{\mu_2\lambda_3}\right)r^2+\frac{\lambda_1+2\mu_1}{\lambda_3}\Delta^2=0. \tag{3.21}$$

Pierwiastki równania (3.21) przedstawimy w postaci

$$r_{1,2}=\pm i\sqrt{\Delta}s_1, \qquad r_{3,4}=\pm i\sqrt{\Delta}s_2, \tag{3.22}$$

gdzie

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix}=\left\{\frac{(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3-\lambda_2(\lambda_2+2\mu_2)}{2\mu_2\lambda_3}\pm\right.$$
$$\left.\pm\left[\left(\frac{(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3-\lambda_2(\lambda_2+2\mu_2)}{2\mu_2\lambda_3}\right)^2-\frac{\lambda_1+2\mu_1}{\lambda_3}\right]^{1/2}\right\}^{1/2}, \tag{3.23}$$

lub po uwzględnieniu zależności (1.12)

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix}=\left\{\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{G}{G_1}-\nu_2\right)\pm\left[\frac{1}{(1-\nu)^2}\left(\frac{G}{G_1}-\nu_2\right)^2-\frac{E}{E_1}\,\frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2}\right]^{1/2}\right\}^{1/2}. \tag{3.23'}$$

W pracy [3], w której zagadnienie równowagi omawianego ośrodka sprowadzono do całkowania kolejnych równań drugiego i czwartego rzędu, operatory różniczkowe zależą od parametrów analogicznych do określonych wzorem (3.23). Ze wzorów (3.23') wynika, że parametry s_1 i s_2 są: a) rzeczywiste, gdy

$$\frac{1}{(1-\nu)^2}\left(\frac{G}{G_1}-\nu_2\right)^2\geqslant\frac{E}{E_1}\,\frac{1-\nu_1\nu_2}{1-\nu^2}; \tag{3.24}$$

b) zespolone, gdy zachodzi nierówność przeciwna.

Parametry s_1, s_2 nie mogą być urojone (por. też [2]). Przy konkretnych (realnych) wielkościach stałych materiałowych zachodzi nierówność (3.24). Jak wiadomo, materiały-kompozycje typu laminatów charakteryzują się silną anizotropią. Ich moduł E w płaszczyźnie płyty przewyższa moduł E_1 w kierunku poprzecznym 5 do 15 razy, a moduł ścinania 5 do 100 razy. Jeśli zbrojenie laminatu stanowią maty szklane, maty azbestowe, czy maty z drutów stalowych, co ma często miejsce w przypadku dźwigarów powierzchniowych, to można traktować go jako materiał poprzecznie izotropowy, spełniający nierówność (3.24). Jeśli w (3.24) zachodzi równość, to

$$s_1 = s_2 = \left[\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{G}{G_1} - \nu_2\right)\right]^{1/2},$$

przy czym dla izotropii, dla której $G = G_1$, $\nu_2 = \nu$ mamy

$$s_1 = s_2 = 1.$$

Dalej będziemy wszędzie zakładać, że $s_1 \neq s_2$. Rozwiązania dla przypadku równych pierwiastków ($s_1 = s_2 = 1$) można otrzymać z rozpatrywanego rozwiązania ogólnego przez odpowiednie przejście graniczne. Przypadek $s_1 = s_2 = a$ można (przez podstawienie $z' = az$) sprowadzić do analogicznego zagadnienia dotyczącego ośrodka izotropowego, omówionego w [4]. W przypadku pierwiastków jednokrotnych niewiadome funkcje w, v wyrażają się przez cztery funkcje w_1, w_2, v_1, v_2 zmiennych x_1, x_2 przez wzory

$$\begin{aligned} w &= \tilde{C}_1(w_1) + \tilde{C}_2(v_1) + \beta_1 \tilde{S}_1(\Delta w_2) + \beta_2 \tilde{S}_2(\Delta v_2), \\ v &= \alpha_1 \tilde{S}_1(w_1) + \alpha_2 \tilde{S}_2(v_1) + \tilde{C}_1(w_2) + \tilde{C}_2(v_2), \end{aligned} \tag{3.25}$$

gdzie

$$\alpha_\alpha = \kappa s_\alpha^2 - \delta, \qquad \beta_\alpha = \delta s_\alpha^2 - \gamma, \tag{3.26}$$

przy czym

$$\kappa = \frac{E_1(1-\nu)}{H}, \qquad \delta = \frac{G_1(1-\nu-2\nu_1\nu_2)}{H}, \qquad \gamma = \frac{2G(1-\nu_1\nu_2)}{H}, \tag{3.26'}$$

$$H = E\nu_1 + G_1(1-\nu-2\nu_1\nu_2),$$

a s_α^2 dane są wzorem (3.23').

We wzorach (3.25) przez symbole $\tilde{C}_\alpha$, $\tilde{S}_\alpha$ rozumiemy operatory różniczkowe, mające postać

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\alpha &= \cos s_\alpha z\sqrt{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n} s_\alpha^{2n} \Delta^n}{(2n)!}, \\ \tilde{S}_\alpha &= \frac{\sin s_\alpha z\sqrt{\Delta}}{s_\alpha\sqrt{\Delta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s_\alpha^{2n} z^{2n+1} \Delta^n}{(2n+1)!}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

a funkcje $w_\alpha(x_\alpha)$, $v_\alpha(x_\alpha)$ wyznaczymy z warunków brzegowych $(2.7)_2$ i $(2.7)_3$. Z tych warunków brzegowych oraz budowy funkcji w, v wynika, że stan naprężenia rozdziela się na symetryczny i antysymetryczny względem płaszczyzny środkowej. Antysymetryczna deformacja, określona funkcjami w_1, v_1, odpowiada zagadnieniu płytowemu, a symetryczna określona funkcjami w_2, v_2 — zagadnieniu tarczowemu.

W przypadku zagadnienia płytowego warunki brzegowe $(2.7)_2$ i $(2.7)_3$ prowadzą do równań

$$\begin{aligned} \delta_1 C_1 w_1 + \delta_2 C_2 v_1 &= \frac{1}{2\mu_2}(\tau^+ + \tau^-), \\ \delta_1 S_1 \Delta w_1 + \delta_2 S_2 \Delta v_1 &= \frac{1}{2\mu_2}(q^- - q^+), \end{aligned} \tag{3.28}$$

gdzie δ_1, δ_2 są liczbami zależnymi od stałych materiałowych, określonymi wzorami

$$\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{Bmatrix}=\frac{E_1}{H}\left\{\frac{G}{G_1}\pm\left[\left(\frac{G}{G_1}-\nu_2\right)^2-\frac{E}{E_1}\,\frac{(1-\nu_1\nu_2)(1-\nu)}{1+\nu}\right]^{1/2}\right\}. \tag{3.29}$$

Z (3.28) otrzymujemy uwzględniając $(2.9)_1$

$$[C_1 S_2-C_2 S_1]\begin{Bmatrix}\Delta w_1\\ \Delta v_1\end{Bmatrix}=\frac{1}{2G_1}\begin{Bmatrix}\kappa_1\\ \kappa_2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}S_2(p_\alpha^+ +p_\alpha^-)_{,\alpha}-C_2(q^- -q^+)\\ C_1(q^- -q^+)-S_1(p_\alpha^+ +p_\alpha^-)_{,\alpha}\end{Bmatrix}, \tag{3.30}$$

gdzie operatory C_α, S_α (bez łuczków) otrzymuje się z (3.27) przez zamianę z na h; κ_1, κ_2 są liczbami, które dla danego materiału wyznaczymy ze wzoru

$$\begin{Bmatrix}\kappa_1\\ \kappa_2\end{Bmatrix}=\frac{H^2}{E_1 E\left[2\dfrac{G}{G_1}\nu_1-\nu_1\nu_2+\dfrac{(1-\nu_1\nu_2)(1-\nu)}{1+\nu}\right]}\begin{Bmatrix}\delta_2\\ \delta_1\end{Bmatrix}. \tag{3.31}$$

Uwzględniając we wzorze (3.25) dostosowanym do zagadnienia płytowego związki (3.30), a następnie podstawiając do (2.1), otrzymujemy dla składowych wektora przemieszczenia potencjalnego pola przemieszczeń w zagadnieniu płytowym następujące rozwiązania w zapisie symbolicznym operatorowym:

$$\begin{aligned}
&[C_1 S_2-C_2 S_1](\Delta u_3)=\frac{1}{2G_1}\{[\kappa_1 S_2\tilde{C}_1-\kappa_2 S_1\tilde{C}_2](p_\alpha^+ +p_\alpha^-)_{,\alpha}+\\
&\qquad\qquad +[\kappa_2 C_1\tilde{C}_2-\kappa_1 C_2\tilde{C}_1](q^- -q^+)\},\\
&[C_1 S_2-C_2 S_1](\Delta u_\alpha^P)=\frac{1}{2G_1}\{[(1-\kappa_1) S_2\tilde{S}_1-(1-\kappa_2) S_1\tilde{S}_2]\times\\
&\qquad\qquad \times[\partial_\alpha(p_\alpha^+ +p_\alpha^-)_{,\alpha}]+[(1-\kappa_2) C_1\tilde{S}_2-(1-\kappa_1) C_2\tilde{S}_1](q^- -q^+)_{,\alpha}\}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Analogicznie postępując otrzymamy rozwiązanie dla zagadnienia tarczowego. Ma ono w zapisie symbolicznym operatorowym postać

$$\begin{aligned}
&[s_2^2 C_1 S_2-s_1^2 C_2 S_1](u_3)=\frac{1}{2G_1}\{s_1^2 s_2^2[\kappa_1 S_2\tilde{S}_1-\kappa_2 S_1\tilde{S}_2](q^+ +q^-)+\\
&\qquad\qquad +[s_2^2\kappa_2 C_1\tilde{S}_2-s_1^2\kappa_1 C_2\tilde{S}_1](\tau^+ -\tau^-)\},\\
&[s_2^2 C_1 S_2-s_1^2 C_2 S_1](\Delta u_\alpha^P)=\frac{1}{2G_1}\{[s_1^2\kappa_1 S_1\tilde{C}_2-s_2^2\kappa_2 S_2\tilde{C}_1](q^+ +q^-)_{,\alpha}+\\
&\qquad\qquad +[\kappa_2 C_2\tilde{C}_1-\kappa_1 C_1\tilde{C}_2](\tau^+ -\tau^-)_{,\alpha}\}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Potencjalne pole przemieszczeń wyznaczone jest przez rozwiązania, które w zapisie symbolicznym operatorowym mają postać (3.32) i (3.33). Operatory różniczkowe S_α, C_α, działające na przemieszczenia (funkcje zmiennych x_1, x_2, z), są operatorami względem dwóch zmiennych x_1, x_2. Po prawej stronie występują operatory $\tilde{C}_\alpha$, $\tilde{S}_\alpha$, które po rozwinięciu w szereg potęgowy dadzą wydzieloną współrzędną z i operatory różniczkowe względem zmiennych x_1, x_2 działające na obciążenia — funkcje tych samych zmiennych. W konsekwencji otrzymane równania są dwuwymiarowe parametrycznie zależące od wydzielonej zmiennej z. Stwarza to możliwość analizowania trójwymiarowego pola przemieszczeń, naprężeń i odkształceń w statycznych zagadnieniach z zakresu grubych płyt. Znajomość rozwiązań równań (3.32) i (3.33) jest na ogół niewystarczająca dla spełnienia warunków brzegowych na konturze płyty. Z równań tych można znaleźć rozwiązania szczególne, uwzględniające obciążenia na płaszczyznach ograniczających, przy czym dla dużej klasy obciążeń można je znaleźć w sposób ścisły, wykorzystując otrzymane powyżej równania w zapisie symbolicznym operatorowym.

Jeśli np. działające na płytę obciążenia normalne $q^{\pm}(x_1, x_2)$ rozwinąć w szeregi trygonometryczne zmiennych x_1, x_2,

$$q^{\pm}(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q^{\pm}_{mn} \sin\frac{n\pi x_1}{l_1} \sin\frac{m\pi x_2}{l_2}, \tag{3.34}$$

gdzie

$$q^{\pm}_{mn} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} q^{\pm}(x_1, x_2) \sin\frac{n\pi x_1}{l_1} \sin\frac{m\pi x_2}{l_2}\, dx_1\, dx_2 \tag{3.34'}$$

(l_1, l_2 charakterystyczne wymiary w planie w kierunku odpowiednio osi x_1 i x_2) i składowe wektora przemieszczenia przedstawić w postaci szeregów

$$\begin{gathered} u_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(x_3) \sin\frac{n\pi x_1}{l_1} \sin\frac{m\pi x_2}{l_2}, \\ \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} B_{mn}(x_3) \cos\dfrac{n\pi x_1}{l_1} \sin\dfrac{m\pi x_2}{l_2} \\ C_{mn}(x_3) \sin\dfrac{n\pi x_1}{l_1} \cos\dfrac{m\pi x_2}{l_2} \end{Bmatrix}, \end{gathered} \tag{3.35}$$

to wykorzystując zależność

$$(\Delta)^k \begin{Bmatrix} \sin\dfrac{n\pi x_1}{l_1} \sin\dfrac{m\pi x_2}{l_2} \\ \cos\dfrac{n\pi x_1}{l_1} \sin\dfrac{m\pi x_2}{l_2} \\ \sin\dfrac{n\pi x_1}{l_1} \cos\dfrac{m\pi x_2}{l_2} \end{Bmatrix} = \left(\frac{\pi}{l_1}\right)^{2k} (-n^2 - m^2\beta^2)^k \begin{Bmatrix} \sin\dfrac{n\pi x_1}{l_1} \sin\dfrac{m\pi x_2}{l_2} \\ \cos\dfrac{n\pi x_1}{l_1} \sin\dfrac{m\pi x_2}{l_2} \\ \sin\dfrac{n\pi x_1}{l_1} \cos\dfrac{m\pi x_2}{l_2} \end{Bmatrix}, \tag{3.36}$$

$$\beta^2 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2,$$

otrzymamy ze wzorów (3.32) dla składowych wektora przemieszczenia w zagadnieniu płytowym następujące rozwiązania:

$$u_3 = \frac{l_1 s_1 s_2}{\pi G_1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + m^2\beta^2)^{1/2}} \frac{W_{nm}(z)}{Q_{mn}} (q^-_{mn} - q^+_{nm}) \times \\ \times \sin\frac{n\pi x_1}{l_1} \sin\frac{m\pi x_2}{l_2}, \tag{3.37}$$

(3.37) [c.d.]
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{l_1}{\pi G_1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta \end{Bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} \frac{1}{n^2+m^2\beta^2} \frac{U_{nm}(z)}{Q_{nm}} (q_{nm}^{-} - q_{nm}^{+}) \times$$
$$\times \begin{Bmatrix} \cos\frac{n\pi x_1}{l_1} \sin\frac{m\pi x_2}{l_2} \\ \sin\frac{n\pi x_1}{l_1} \cos\frac{m\pi x_2}{l_2} \end{Bmatrix},$$

gdzie oznaczono

$$W_{nm}(z) = \varkappa_2 \operatorname{ch} \pi \frac{h}{l_1} s_1 \sqrt{n^2+m^2\beta^2} \operatorname{ch} \pi \frac{z}{l_1} s_2 \sqrt{n^2+m^2\beta^2} -$$
$$- \varkappa_1 \operatorname{ch} \pi \frac{h}{l_1} s_2 \sqrt{n^2+m^2\beta^2} \operatorname{ch} \pi \frac{z}{l_1} s_1 \sqrt{n^2+m^2\beta^2},$$

(3.37′)
$$U_{nm}(z) = (1-\varkappa_2) s_1 \operatorname{ch} \pi \frac{h}{l_1} s_1 \sqrt{n^2+m^2\beta^2} \operatorname{sh} \pi \frac{z}{l_1} s_2 \sqrt{n^2+m^2\beta^2} -$$
$$-(1-\varkappa_1) s_2 \operatorname{sh} \pi \frac{z}{l_1} s_1 \sqrt{n^2+m^2\beta^2} \operatorname{ch} \pi \frac{h}{l_1} s_2 \sqrt{n^2+m^2\beta^2},$$

$$Q_{nm} = (s_1+s_2) \operatorname{sh} \pi \frac{h}{l_1} (s_1-s_2) \sqrt{n^2+m^2\beta^2} -$$
$$-(s_1-s_2) \operatorname{sh} \pi \frac{h}{l_1} (s_1+s_2) \sqrt{n^2+m^2\beta^2}.$$

Zauważmy, że tak skonstruowane rozwiązania określają pole przemieszczeń dla swobodnie podpartej, poprzecznie izotropowej płyty o wymiarach w planie l_1 i l_2, gdyż spełniają one tożsamościowo warunki brzegowe (1.8) (dla każdego z).

Dla spełnienia innego typu warunków brzegowych niezbędne są rozwiązania jednorodne. Dlatego skonstruujemy teraz rozwiązania jednorodne dla potencjalnego pola przemieszczeń. Dla zagadnienia płytowego, w przypadku gdy warunki brzegowe (3.28) są jednorodne, tj. mają postać

(3.38)
$$\delta_1 C_1(w_1) + \delta_2 C_2(v_1) = 0, \qquad \delta_1 S_1(\Delta w_1) + \delta_2 S_2(\Delta v_1) = 0,$$

wprowadzimy nową funkcję przemieszczeń ψ_3 taką, że

(3.39)
$$v_1 = -\delta_1 C_1(\psi_3), \qquad w_1 = \delta_2 C_2(\psi_3).$$

Warunki brzegowe (3.38) będą spełnione, jeśli funkcja ψ_3 spełniać będzie równanie

(3.40)
$$(S_1 C_2 - C_1 S_2) \Delta\psi_3 = 0.$$

Uwzględniając (3.39) we wzorze (3.25) «ograniczonym» do funkcji w_1, v_1, otrzymujemy na składowe wektora przemieszczenia potencjalnego pola przemieszczeń w zagadnieniu płytowym następujące wzory:

(3.41)
$$u_3 = (\delta_2 C_2 \tilde{C}_1 - \delta_1 \tilde{C}_2 C_1) \psi_3,$$
$$u_\alpha^P = (\alpha_1 \delta_2 C_2 \tilde{S}_1 - \alpha_2 \delta_1 C_1 \tilde{S}_2) \psi_{3,\alpha}.$$

Dla zagadnienia tarczowego z jednorodnymi warunkami brzegowymi na płaszczyznach $z=\pm h$, postępując podobnie jak w analogicznym przypadku dla zagadnienia płytowego, otrzymamy następujące wzory na składowe wektora przemieszczenia:

$$
(3.42)\qquad
\begin{aligned}
u_\alpha^p &= [(s_1^2-\beta_1)\, S_1\, \tilde{C}_2 - (s_2^2-\beta_2)\, S_2\, \tilde{C}_1]\, \psi_{4,\alpha},\\
u_3 &= [\beta_2\, (s_1^2-\beta_1)\, S_1\, \tilde{S}_2 - \beta_1\, (s_2^2-\beta_2)\, S_2\, \tilde{S}_1]\, \Delta\psi_4,
\end{aligned}
$$

przy czym funkcja ψ_4 spełnia równanie

$$
(3.43)\qquad [s_2^2\, S_2\, C_1 - s_1^2\, S_1\, C_2]\, \Delta\psi_4 = 0.
$$

4. Przejście do równań różniczkowych

Formę symboliczną rozwiązań jednorodnych (3.40) - (3.43) zastąpimy formą różniczkową. Równania dla funkcji ψ_3 i ψ_4 przedstawimy po prostych przekształceniach w postaci

$$
(4.1)\qquad \left[\frac{\sin (s_1-s_2)\sqrt{\Delta}\, h}{(s_1-s_2)\sqrt{\Delta}\, h} - \frac{\sin (s_1+s_2)\sqrt{\Delta}\, h}{(s_1+s_2)\sqrt{\Delta}\, h}\right] \Delta\psi_3 = 0,
$$

$$
(4.2)\qquad \left[\frac{\sin (s_1-s_2)\sqrt{\Delta}\, h}{(s_1-s_2)\sqrt{\Delta}\, h} + \frac{\sin (s_1+s_2)\sqrt{\Delta}\, h}{(s_1+s_2)\sqrt{\Delta}\, h}\right] \Delta\psi_4 = 0.
$$

W celu przejścia od symbolicznego zapisu równań (4.1) i (4.2) do równań różniczkowych trzeba znaleźć pierwiastki równań

$$
(4.3)\qquad \Delta\left[\frac{\sin (s_1-s_2)\sqrt{\Delta}\, h}{(s_1-s_2)\sqrt{\Delta}\, h} - \frac{\sin (s_1+s_2)\sqrt{\Delta}\, h}{(s_1+s_2)\sqrt{\Delta}\, h}\right] = 0,
$$

$$
(4.4)\qquad \Delta\left[\frac{\sin (s_1-s_2)\sqrt{\Delta}\, h}{(s_1-s_2)\sqrt{\Delta}\, h} + \frac{\sin (s_1+s_2)\sqrt{\Delta}\, h}{(s_1+s_2)\sqrt{\Delta}\, h}\right] = 0.
$$

Równanie (4.3) ma pierwiastki następujące:

$$
(4.5)\qquad (\sqrt{\Delta})_k = 0, \qquad k = 1, 2, 3, 4, \ldots
$$

oraz

$$
(4.5')\qquad (\sqrt{\Delta})_k = \pm(\lambda_k \pm i\eta_k)\, h^{-1}, \qquad k = 5, 6, 7, \ldots,
$$

gdzie λ_k, η_k są kolejnymi rzeczywistymi, dodatnimi pierwiastkami układu równań

$$
(4.6)\qquad
\begin{aligned}
&(s_1+s_2) \sin (s_1-s_2)\, \lambda \operatorname{ch} (s_1-s_2)\, \eta - (s_1-s_2) \sin (s_1+s_2)\, \lambda \operatorname{ch} (s_1+s_2)\, \eta = 0,\\
&(s_1+s_2) \cos (s_1-s_2)\, \lambda \operatorname{sh} (s_1-s_2)\, \eta - (s_1-s_2) \cos (s_1+s_2)\, \lambda \operatorname{sh} (s_1+s_2)\, \eta = 0,
\end{aligned}
$$

który otrzymuje się uwzględniając (4.5′) w (4.3) i przyrównując do zera część rzeczywistą i część urojoną. Rzeczywiste liczby

$$
(\sqrt{\Delta})_k = n\pi h^{-1} (s_1-s_2)^{-1}, \qquad (\sqrt{\Delta})_k = m\pi h^{-1} (s_1+s_2)^{-1},
$$

gdzie n, m są liczbami naturalnymi, nie są pierwiastkami równania (4.3), gdyż stosunek $(s_1-s_2)/(s_1+s_2)$ jest liczbą niewymierną [por. wzory (3.23′)].

Równanie (4.4) ma podwójny pierwiastek zerowy

$$(\sqrt{\Delta})_k=0, \quad k=1,2 \tag{4.7}$$

oraz zespolone, sprzężone pierwiastki

$$(\sqrt{\Delta})_k=\pm(\lambda_k^*\pm i\eta_k^*)\,h^{-1}, \quad k=3,4,5,\ldots, \tag{4.7'}$$

gdzie λ_k^*, η_k^* są kolejnymi rzeczywistymi, dodatnimi pierwiastkami układu równań

$$\begin{aligned}(s_1+s_2)\sin(s_1-s_2)\lambda^*\operatorname{ch}(s_1-s_2)\eta^*+&\\ +(s_1-s_2)\sin(s_1+s_2)\lambda^*\operatorname{ch}(s_1+s_2)\eta^*&=0,\\ (s_1+s_2)\cos(s_1-s_2)\lambda^*\operatorname{sh}(s_1-s_2)\eta^*+&\\ +(s_1-s_2)\cos(s_1+s_2)\lambda^*\operatorname{sh}(s_1+s_2)\eta^*&=0,\end{aligned} \tag{4.8}$$

który otrzymuje się przez podstawienie (4.7′) do (4.4) i przyrównanie do zera części rzeczywistej i części urojonej. Wykorzystując właściwości pierwiastków (4.5) i (4.5′) równania (4.3), możemy funkcję ψ_3, opisującą rozwiązania jednorodne w zagadnieniu płytowym, przedstawić w postaci

$$\psi_3=\psi_{3b}+\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_{3k}+\bar{\psi}_{3k}), \tag{4.9}$$

gdzie ψ_{3b} jest biharmoniczną funkcją zmiennych x_1, x_2; $\psi_{3k}, \bar{\psi}_{3k}$ są zespolonymi, sprzężonymi funkcjami tych zmiennych spełniającymi równania

$$[\Delta-(\lambda_k+i\eta_k)^2 h^{-2}]\,\psi_{3k}=0, \quad [\Delta-(\lambda_k-i\eta_k)^2 h^{-2}]\,\bar{\psi}_{3k}=0. \tag{4.10}$$

Funkcja ψ_4, określa rozwiązania jednorodne w zagadnieniu tarczowym; wykorzystując własności pierwiastków (4.7) i (4.8) znajdziemy

$$\psi_4=\psi_{4h}+\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_{4k}+\bar{\psi}_{4k}), \tag{4.11}$$

gdzie ψ_{4h} jest funkcją harmoniczną, a $\psi_{4k}, \bar{\psi}_{4k}$ są zespolonymi sprzężonymi funkcjami spełniającymi równania

$$[\Delta-(\lambda_k^*+i\eta_k^*)^2 h^{-2}]\,\psi_{4k}=0, \quad [\Delta-(\lambda_k^*-i\eta_k^*)^2 h^{-2}]\,\bar{\psi}_{4k}=0. \tag{4.12}$$

Jak widać do wzorów określających funkcje ψ_3 i ψ_4 oprócz funkcji biharmonicznej i harmonicznej (występujących w płaskich zagadnieniach ośrodka izotropowego i opisujących stany naprężeń wewnątrz izotropowej płyty) wchodzą także funkcje $\psi_{3k}, \bar{\psi}_{3k}, \psi_{4k}, \bar{\psi}_{4k}$ związane z pierwiastkami równań (4.6) i (4.8). Funkcje te w ośrodku izotropowym opisują uzupełniający stan naprężenia w warstwie przybrzegowej płyty, i jak wykazano w pracy [8] na przykładzie symetrycznego stanu naprężeń w ośrodku izotropowym, określają stany naprężeń tego samego rzędu co i rozwiązanie zadania płaskiego.

Funkcje ψ_3, ψ_4 opisujące jednorodne pole przemieszczeń spełniają równania różniczkowe nieskończonego rzędu:

$$\Delta^2 \prod_{k=1}^{\infty} [\Delta - (\lambda_k + i\eta_k)^2 h^{-2}] [\Delta - (\lambda_k - i\eta_k)^2 h^{-2}] \psi_3 = 0, \tag{4.13}$$

$$\Delta \prod_{k=1}^{\infty} [\Delta - (\lambda_k^* + i\eta_k^*)^2 h^{-2}] [\Delta - (\lambda_k^* - i\eta_k^*)^2 h^{-2}] \psi_4 = 0, \tag{4.14}$$

które otrzymuje się rozwijając funkcje argumentu operatorowego $(\sqrt{\Delta})$, występujące w symbolicznych równaniach (4.1) i (4.2), w nieskończone iloczyny względem ich miejsc zerowych. W konkretnych technicznych zastosowaniach będziemy w równaniach (4.13) i (4.14) ograniczać się do określonej liczby kolejnych pierwiastków (λ_k, η_k), (λ_k^*, η_k^*) równań (4.6) i (4.8), przyjmując w ten sposób równania różniczkowe skończonego rzędu, co w rozwiązaniach (4.9) i (4.11) będzie oznaczało przyjęcie skończonych sum.

Uwzględniając w (3.41) i (3.42) wzory (4.9) - (4.12) otrzymamy rozwiązania jednorodne dla składowych wektora potencjalnego pola pomieszczeń. Dla zagadnienia płytowego są one w postaci

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\mu_2}\psi_{3b} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}\frac{z^2}{2}\Delta\psi_{3b} - \left[\frac{(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3}{\mu_2(\lambda_2+\mu_2)} - \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right]\frac{h^2}{2}\Delta\psi_{3b} + \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} (F_{3k}\psi_{3k} + \bar{F}_{3k}\bar{\psi}_{3k}), \\ u_\alpha^P &= -\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\mu_2} z\psi_{3b,\alpha} - \frac{\lambda_2}{{}_2\lambda+\mu_2}\frac{h^2}{2} z\Delta\psi_{3b,\alpha} + \\ &\qquad + \left[\frac{(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3}{\mu_2(\lambda_2+\mu_2)} - \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right]\frac{z^3}{6}\Delta\psi_{3b,\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} (H_{3k}\psi_{3k} + \bar{H}_{3k}\bar{\psi}_{3k})_{,\alpha}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

gdzie funkcje F_{3k}, H_{3k} mają budowę następującą:

$$\begin{aligned} F_{3k} &= F_{3k}(z) = \delta_2 \cos s_2 \rho_k \cos s_1 \rho_k \frac{z}{h} - \delta_1 \cos s_1 \rho_k \cos s_2 \rho_k \frac{z}{h}, \\ H_{3k} &= H_{3k}(z) = \alpha_1 \delta_2 \frac{\sin s_1 \rho_k \frac{z}{h}}{s_1 \rho_k} \cos s_2 \rho_k - \alpha_2 \delta_1 \frac{\sin s_2 \rho_k \frac{z}{h}}{s_2 \rho_k} \cos s_1 \rho_k, \\ \rho_k &= \lambda_k + i\eta_k, \end{aligned} \tag{4.16}$$

a funkcje $\bar{F}_{3k}(z)$ i $\bar{H}_{3k}(z)$ są sprzężonymi z $F_{3k}(z)$, $H_{3k}(z)$. Dla zagadnienia tarczowego rozwiązania te mają, jak wynika z (3.42), budowę następującą:

$$\begin{aligned} u_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} (F_{4k}\psi_{4k} + \bar{F}_{4k}\bar{\psi}_{4k}), \\ u_\alpha^P &= h\frac{\lambda_3 - \lambda_2 - \mu_2}{\lambda_2+\mu_2}\psi_{4h,\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} (H_{4k}\psi_{4k} + \bar{H}_{4k}\bar{\psi}_{4k})_{,\alpha}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

gdzie

$$F_{4k}=F_{4k}(z)=\beta_2(s_1^2-\beta_1)\frac{\sin s_1\rho_k^*}{s_1\rho_k^*}\,\frac{\sin s_2\rho_k^*\frac{z}{h}}{s_2\rho_k^*}-$$

$$(4.18)\qquad -\beta_1(s_2^2-\beta_2)\frac{\sin s_2\rho_k^*}{s_2\rho_k^*}\,\frac{\sin s_1\rho_k^*\frac{z}{h}}{s_1\rho_k^*},$$

$$H_{4k}=H_{4k}(z)=(s_1^2-\beta_1)\frac{\sin s_1\rho_k^*}{s_1\rho_k^*}\cos s_2\rho_k^*\frac{z}{h}-$$

$$-(s_2^2-\beta_2)\frac{\sin s_2\rho_k^*}{s_2\rho_k^*}\cos s_1\rho_k^*\frac{z}{h},\qquad \rho_k^*=\lambda_k^*+i\eta_k^*.$$

Funkcje $\bar{F}_{4k}(z)$ i $\bar{H}_{4k}(z)$ są sprzężonymi funkcjami odpowiednio z $F_{4k}(z)$ i $H_{4k}(z)$.

Wykorzystując rozwiązania (3.15) i (4.15), otrzymujemy dla zagadnienia płytowego następujące wzory na składowe wektora przemieszczenia:

$$u_3=\mathring{u}_3+\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\mu_2}\psi_{3b}+\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}\frac{z^2}{2}\Delta\psi_{3b}-\left[\frac{(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3}{\mu_2(\lambda_2+\mu_2)}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right]\frac{h^2}{2}\Delta\psi_{3b}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(F_{3k}\psi_{3k}+\bar{F}_{3k}\bar{\psi}_{3k}),$$

$$(4.19)\qquad u_\alpha=\mathring{u}_\alpha^P-\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\mu_2}z\psi_{3b,\alpha}-\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}\frac{h^2}{2}z\Delta\psi_{3b,\alpha}+$$
$$+\left[\frac{(\lambda_1+2\mu_1)\lambda_3}{\mu_2(\lambda_2+\mu_2)}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right]\frac{z^3}{6}\Delta\psi_{3b,\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(H_{3k}\psi_{3k}+\bar{H}_{3k}\bar{\psi}_{3k})_{,\alpha}+$$
$$+\frac{1}{2G_1}\frac{\operatorname{sh}qz}{q\operatorname{ch}qh}\epsilon_\alpha^\beta(\chi^++\chi^-)_{,\beta}+\epsilon_\alpha^\beta\sum_{k=1}^{\infty}\sin\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{z}{h}\psi_{1k,\beta},$$

gdzie $\mathring{u}_3$, $\mathring{u}_\alpha^P$ są rozwiązaniami szczególnymi (do których wchodzą obciążenia), które można znaleźć z równań (3.32); ψ_{3k}, $\bar{\psi}_{3k}$ są rozwiązaniami równań (4.10), ψ_{1k} spełniają równania (3.16), a F_{3k}, H_{3k} mają budowę (4.16). Dla zagadnienia tarczowego rozwiązania te mają budowę następującą:

$$u_3=\mathring{u}_3+\sum_{k=1}^{\infty}(F_{4k}\psi_{4k}+\bar{F}_{4k}\bar{\psi}_{4k}),$$

$$(4.20)\qquad u_\alpha=\mathring{u}_\alpha^P+h\frac{\lambda_3-\lambda_2-\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}\psi_{4h,\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(H_{4k}\psi_{4k}+\bar{H}_{4k}\bar{\psi}_{4k})_{,\alpha}+$$
$$+\frac{1}{2G_1}\epsilon_\alpha^\beta(\chi^+-\chi^-)_{,\beta}\frac{\operatorname{ch}qz}{q\operatorname{sh}qh}+\epsilon_\alpha^\beta\sum_{k=0}^{\infty}\cos k\pi\frac{z}{h}\psi_{2k,\beta},$$

gdzie $\mathring{u}_3, \mathring{u}^p_\alpha$ są rozwiązaniami szczególnymi (z obciążeniami występującymi na płaszczyznach ograniczających), które wyznaczymy z równań (3.33); $\psi_{4k}, \bar{\psi}_{4k}$ są rozwiązaniami równań (4.12), ψ_{2k} spełniają równania (3.20), a F_{4k}, H_{4k} mają budowę (4.18).

Otrzymane rozwiązania w przestrzeni trójwymiarowej (4.19) i (4.20) stanowią ogólne rozwiązanie zagadnienia sprężystej równowagi płyty poprzecznie izotropowej. W ogólnym stanie obciążenia, które zawsze można rozłożyć na symetryczne i asymetryczne względem płaszczyzny środkowej $z=0$, rozwiązania (4.19) opisują problem zginania płyty, a rozwiązania (4.20) zagadnienie rozciągania-ściskania w grubej płycie. Uzyskane rozwiązania w przestrzeni trójwymiarowej mogą być wyjściowymi do analizowania stanów naprężenia w grubej płycie. W zależności od ilości uwzględnionych rozwiązań jednorodnych $\psi_{1k}, \psi_{3k}\, \bar{\psi}_{3k}$, i $\psi_{2k}, \psi_{4k}, \bar{\psi}_{4k}$ będziemy mogli warunki brzegowe na konturze płyty (1.5) – (1.11) spełnić z odpowiednią dokładnością. W technicznych zastosowaniach będziemy ograniczać się do skończonych sum we wzorach (4.19) i (4.20), przypisując przekrojowi poprzecznemu płyty określoną liczbę stopni swobody. Warunki brzegowe (1.5) – (1.11) na ograniczających płaszczyznach poprzecznych będziemy mogli wówczas spełnić w sposób przybliżony. Metodę zastosowania skończonych operatorów różniczkowych do zagadnień teorii sprężystości ośrodka izotropowego przedstawiono w pracy [15].

5. Przypadek izotropii

Uwzględniając w rozwiązaniach otrzymanych w poprzednim punkcie wzory dla stałych materiałowych ośrodka izotropowego

$$E_1=E_2=E, \quad G_1=G, \quad \nu_1=\nu_2=\nu, \tag{5.1}$$

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda=\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu_1=\mu_2=\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda_3=\lambda+2\mu,$$

dla których zgodnie z (3.23), (3.26), (3.29) i (3.31) mamy

$$s_\alpha=1, \quad \alpha_\alpha=1, \quad \beta_\alpha=-1; \quad \delta_\alpha=2, \quad \kappa_\alpha=\frac{1}{2}, \tag{5.2}$$

otrzymamy rozwiązania dla składowych wektora przemieszczenia, jeśli we wzorach związanych z funkcjami ψ_{3k}, ψ_{4k} wykonamy przejście graniczne $s_1\to 1, s_2\to 1$.

Dla zagadnienia płytowego otrzymujemy

$$u_3=\mathring{u}_3+2(1-\nu)\psi_{3b}+\nu z^2 \Delta\psi_{3b}-(2-\nu)h^2\Delta\psi_{3b}+\sum_{k=1}^{\infty}(F_{3k}\psi_{k3}+\bar{F}_{3k}\bar{\psi}_{3k}),$$

$$u_\alpha=\mathring{u}^p_\alpha-2(1-\nu)z\psi_{3b,\alpha}-\nu h^2 z\Delta\psi_{3b,\alpha}+(2-\nu)\frac{z^3}{3}\Delta\psi_{3b,\alpha}+ \tag{5.3}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(H_{3k}\psi_{3k}+\bar{H}_{3k}\bar{\psi}_{3k})_{,\alpha}+\frac{1}{2G}\frac{\operatorname{sh} qz}{q\operatorname{ch} qh}\epsilon^\beta_\alpha(\chi^+ +\chi^-)_{,\beta}+$$

$$+\epsilon^\beta_\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\sin\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{z}{h}\psi_{1k,\beta},$$

gdzie

$$F_{3k}=F_{3k}(z)=2(1-\nu)\cos\rho_k\cos\rho_k\frac{z}{h}-\rho_k\sin\rho_k\cos\rho_k\frac{z}{h}+$$
$$+\rho_k\frac{z}{h}\cos\rho_k\sin\rho_k\frac{z}{h},$$

(5.4)

$$H_{3k}=H_{3k}(z)=(1-2\nu)\frac{1}{\rho_k}\sin\rho_k\frac{z}{h}\cos\rho_k+\frac{z}{h}\cos\rho_k\frac{z}{h}\cos\rho_k+$$
$$+\sin\rho_k\frac{z}{h}\sin\rho_k,\qquad \rho_k=\lambda_k+i\eta_k.$$

Funkcje ψ_{3k}, $\overline{\psi}_{3k}$ spełniają równania (4.10) i (4.10′), w których λ_k, η_k są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, będącymi odpowiednio rzeczywistymi i urojonymi częściami zespolonych pierwiastków ρ_k równania, jakie otrzymujemy z (4.3):

$$1-\frac{\sin 2\rho}{2\rho}=0. \tag{5.5}$$

W związku z tym spełniają one układ równań

$$\sin 2\lambda\,\mathrm{ch}\,2\eta=2\lambda,\qquad \cos 2\lambda\,\mathrm{sh}\,2\eta=2\eta, \tag{5.5′}$$

a ψ_{1k} są rozwiązaniami równań otrzymanych z (3.13):

$$\Delta\psi_{1k}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2h^{-2}\psi_{1k}=0,\qquad k=1,2,3,\ldots. \tag{5.6}$$

Całki szczególne $\overset{\circ}{u}_3$, $\overset{\circ}{u}{}^P_\alpha$, uwzględniające obciążenia płaszczyzn ograniczających $z=\pm h$, wyznaczymy z równań otrzymanych z (3.32):

$$\left(1-\frac{\sin 2\sqrt{\Delta}\,h}{2\sqrt{\Delta}\,h}\right)(\Delta u_3)=\frac{1}{8G}\left[2(1-2\nu)\frac{\sin\sqrt{\Delta}\,h\cos\sqrt{\Delta}\,z}{\sqrt{\Delta}\,h}+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{z}{h}\right)\cos\sqrt{\Delta}\,h\left(1-\frac{z}{h}\right)+\left(1-\frac{z}{h}\right)\cos\sqrt{\Delta}\,h\left(1+\frac{z}{h}\right)\right](p_\alpha^++p_\alpha^-)_{,\alpha}-$$
$$-\frac{1}{8Gh}\left\{4(1-\nu)\cos\sqrt{\Delta}\,h\cos\sqrt{\Delta}\,z-\sqrt{\Delta}\,h\left[\left(1+\frac{z}{h}\right)\sin\sqrt{\Delta}\,h\left(1-\frac{z}{h}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(1-\frac{z}{h}\right)\sin\sqrt{\Delta}\,h\left(1+\frac{z}{h}\right)\right]\right\}(q^--q^+),$$

(5.7)

$$\left(1-\frac{\sin 2\sqrt{\Delta}\,h}{2\sqrt{\Delta}\,h}\right)(\Delta u_\alpha^P)=\frac{h}{8G}\left[-4(1-\nu)\frac{\sin\sqrt{\Delta}\,h\sin\sqrt{\Delta}\,z}{\Delta h^2}-\right.$$
$$\left.-\left(1+\frac{z}{h}\right)\frac{\sin\sqrt{\Delta}\,h\left(1-\frac{z}{h}\right)}{\sqrt{\Delta}\,h}+\left(1-\frac{z}{h}\right)\frac{\sin\sqrt{\Delta}\,h\left(1+\frac{z}{h}\right)}{\sqrt{\Delta}\,h}\right]\times$$
$$\times[\partial_\alpha(p_\alpha^++p_\alpha^-)_{,\alpha}]+\frac{1}{8G}\left\{2(1-2\nu)\frac{\sin\sqrt{\Delta}\,z\cos\sqrt{\Delta}\,h}{\sqrt{\Delta}\,h}+\right.$$
$$\left.+\left[\left(1+\frac{z}{h}\right)\cos\sqrt{\Delta}\,h\left(1-\frac{z}{h}\right)-\left(1-\frac{z}{h}\right)\cos\sqrt{\Delta}\,h\left(1+\frac{z}{h}\right)\right]\right\}(q^-+q^+)_{,\alpha}.$$

Jak wynika z (5.3) w płycie mamy stan naprężenia składający się z trzech stanów opisywanych odpowiednio biharmoniczną funkcją ψ_{3b} oraz metaharmonicznymi funkcjami ψ_{3k}, $\bar{\psi}_{3k}$ i ψ_{1k}. W przypadku ośrodka izotropowego rozwiązania dla tych stanów naprężeń, otrzymane na innej drodze, są znane w literaturze i nazwano je odpowiednio biharmonicznym [12], potencjalnym [13] i wirowym [14].

Równania (5.7), zależące parametrycznie od zmiennej z, są pewnym rozszerzeniem równań podanych przez A. I. Łuriego [4]. Dla zagadnienia tarczowego otrzymujemy w przypadku izotropii

$$u_3 = \mathring{u}_3 + \sum_{k=1}^{\infty} (F_{4k}\,\psi_{4k} + \bar{F}_{4k}\,\bar{\psi}_{4k}),$$

(5.8)
$$u_\alpha = \mathring{u}^P_\alpha + h(1-2\nu)\,\psi_{4h,\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} (H_{4k}\,\psi_{4k} + \bar{H}_{4k}\,\bar{\psi}_{4k})_{,\alpha} +$$
$$+\frac{1}{2G}\,\frac{\operatorname{ch} qz}{q \operatorname{sh} qh}\,\epsilon^\beta_\alpha(\chi^+ - \chi^-)_{,\beta} + \epsilon^\beta_\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\pi\frac{z}{h}\,\psi_{2k,\beta},$$

gdzie

(5.9)
$$F_{4k} = F_{4k}(z) = 2(1-\nu)\sin\rho^*_k \sin\rho^*_k\frac{z}{h} + \rho^*_k\cos\rho^*_k\sin\rho^*_k\frac{z}{h} -$$
$$-\rho^*_k\frac{z}{h}\sin\rho^*_k\cos\rho^*_k\frac{z}{h},$$
$$H_{4k} = H_{4k}(z) = (1-2\nu)\frac{1}{\rho^*_k}\sin\rho^*_k\cos\rho^*_k\frac{z}{h} - \cos\rho^*_k\sin\rho^*_k\frac{z}{h} -$$
$$-\frac{z}{h}\sin\rho^*_k\sin\rho^*_k\frac{z}{h}, \qquad \rho^*_k = \lambda^*_k + i\eta^*_k.$$

Funkcje ψ_{4k} i $\bar{\psi}_{4k}$ spełniają równania (4.12), w których λ^*_k i η^*_k są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, będącymi odpowiednio rzeczywistymi i urojonymi częściami zespolonych pierwiastków ρ^*_k równania otrzymanego z (4.4):

(5.10)
$$1 + \frac{\sin 2\rho^*}{2\rho^*} = 0,$$

a więc kolejnymi dodatnimi pierwiastkami układu równań

(5.10′)
$$\sin 2\lambda^* \operatorname{ch} 2\eta^* = -2\lambda^*, \qquad \cos 2\lambda^* \operatorname{sh} 2\eta^* = -2\eta^*.$$

Funkcje ψ_{2k} są rozwiązaniami równań, które otrzymujemy z (3.13′)

(5.11)
$$\Delta\psi_{2k} - k^2\pi^2 h^{-2}\psi_{2k} = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Całki szczególne $\mathring{u}_3$ i $\mathring{u}^P_\alpha$, uwzględniające obciążenia płaszczyzn ograniczających, wyznaczymy z równań, które otrzymujemy z (3.33):

$$\left(1+\frac{\sin 2\sqrt{\Delta}h}{2\sqrt{\Delta}h}\right)(u_3)=\frac{h}{8G}\left[4(1-\nu)\frac{\sin\sqrt{\Delta}h\sin\sqrt{\Delta}z}{\Delta h^2}+\right.$$

$$+\left(1-\frac{z}{h}\right)\frac{\sin\sqrt{\Delta}h\left(1+\frac{z}{h}\right)}{\sqrt{\Delta}h}-\left(1+\frac{z}{h}\right)\frac{\sin\sqrt{\Delta}h\left(1-\frac{z}{h}\right)}{\sqrt{\Delta}h}\right]\times$$

$$\times(q^++q^-)+\frac{1}{8G}\left[-2(1-2\nu)\frac{\cos\sqrt{\Delta}h\sin\sqrt{\Delta}h}{\sqrt{\Delta}h}-\left(1-\frac{h}{h}\right)\cos\sqrt{\Delta}h\times\right.$$

$$(5.12)\qquad \left.\times\left(1+\frac{z}{h}\right)+\left(1+\frac{z}{h}\right)\cos\sqrt{\Delta}h\left(1-\frac{z}{h}\right)\right](\tau^+-\tau^-),$$

$$\left(1+\frac{\sin 2\sqrt{\Delta}h}{2\sqrt{\Delta}h}\right)(\Delta u_\alpha^P)=\frac{1}{8G}\left[2(1-2\nu)\frac{\cos\sqrt{\Delta}z\sin\sqrt{\Delta}h}{\sqrt{\Delta}h}-\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{z}{h}\right)\cos\sqrt{\Delta}h\left(1+\frac{z}{h}\right)-\left(1+\frac{z}{h}\right)\cos\sqrt{\Delta}h\left(1-\frac{z}{h}\right)\right]\times$$

$$\times(q^++q^-)_{,\alpha}+\frac{1}{8Gh}\left\{-4(1-\nu)\cos\sqrt{\Delta}h\cos\sqrt{\Delta}z-\sqrt{\Delta}h\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(1-\frac{z}{h}\right)\sin\sqrt{\Delta}h\left(1+\frac{z}{h}\right)+\left(1+\frac{z}{h}\right)\sin\sqrt{\Delta}h\left(1-\frac{z}{h}\right)\right]\right\}(\tau^+-\tau^-)_{,\alpha}.$$

Stanem naprężenia w płytach izotropowych przy jednorodnych warunkach brzegowych na płaszczyznach ograniczających $z=\pm h$ zajmowano się w pracy [7] w przypadku antysymetrycznego i w [8] w przypadku symetrycznego stanu naprężenia. Zauważmy na koniec, że ograniczając się do określonej liczby wyrazów w rozwinięciu funkcji argumentów operatorowych, występujących w równaniach (5.7) i (5.12) oraz do skończonych szeregów opisujących rotacyjną część pola przemieszczenia, możemy otrzymać przybliżone równania dowolnego rzędu dla omawianego zagadnienia.

Najprostsze równania (aproksymacja zerowego rzędu) wynikające z (5.7) mają dla zagadnienia zginania płyty postać:

$$(5.13)\qquad \begin{aligned} &\Delta^2 u_3=-\frac{1}{D}(q^--q^+)+\frac{h}{D}(p_\alpha^++p_\alpha^-)_{,\alpha},\\ &\Delta^2 u_\alpha^P=\frac{1}{D}z\,\partial_\alpha(q^--q^+)-\frac{h}{D}z\,\partial_\alpha(p_\alpha^++p_\alpha^-)_\alpha, \qquad D=\frac{E(2h)^3}{12(1-\nu^2)},\end{aligned}$$

(por. [16], str. 487), z których wynika wzór

$$(5.13')\qquad u_\alpha^P=-z\partial_\alpha u_3,$$

przyjmowany w klasycznej teorii płyt cienkich. Równania (5.13) są równaniami klasycznej teorii Kirchhoffa-Love'a. Jeśli uwzględnić ponadto pierwszy wyraz w szeregu opisującym rotacyjne pole przemieszczeń, to otrzymamy równania teorii Reissnera.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. А. И. Лурье, *К теории толстых плит*, П. М. М., **6**, 2–3, 151-168, 1942.
2. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, Гостехиздат, 1950.
3. HAI-CHANG HU, *On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversal isothropic body*, Acta Sci. Sinica, **2**, 2, 1953.
4. А. И. Лурье, *Пространственные задачи теории упругости*, Гостехиздат, Москва 1955.
5. S. KALISKI, J. KURLANDZKI, *Cauchy's problem for a transversally isotropic elastic body*, Arch. Mech. Stos., **10**, 6, 1958.
6. С. Г. Лехницкий, *Упругое равновесие трансверсально изотропного слоя и толстой плиты*, П. М. М., **26**, 1962.
7. О. К. Аксентян, И. И. Ворович, *Напряженное состояние плиты малой толщины*, П. М. М., **27**, 6, 1963.
8. И. И. Ворович, О. С. Малкина, *Напряженное состояние толстой плиты*, П. М. М., **31**, 2, 1967.
9. С. А. Амбарцумян, *Теоруя анизотропных пластин*, Изд-во „Наука", Москва 1967.
10. Ю. А. Груздев, В. К. Прокопов, *К задаче изгиба толстой плиты*, Прикл. Мех., **6**, 5, 1970.
11. В. М. Леев, Н. А. Нечепоренко, В. Мальжанов, *К решению пространственных задачи теории упругости трансверсально изотропного тела*, У. М. Ж., 1, 1971.
12. K. O. FRIDRICHS, R. F. DRESSLER, *A boundary-layer theory for elastic plates*, Commun. Pure Appl. Math., **14**, 1, 1961.
13. E. L. REISS, *Symmetric bending of thick circular plates*, J. Soc. Industr. Appl. Math., **10**, 4, 1962.
14. A. E. GREEN, *On the linear theory of thin elastic shells*, Proc. Roy. Soc., **A266**, 1325, 1962.
15. J. SUŁOCKI, *Zastosowanie operatorów różniczkowych do zadań teorii sprężystości*, Rozpr. Inżyn., **12**, 2, 1964.
16. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.

Резюме

ПРОБЛЕМА РАВНОВЕСИЯ ТОЛСТОЙ ПЛИТЫ С ПОПЕРЕЧНОЙ ИЗОТРОПИЕЙ

В работе даются решения уравнений в перемещениях проблемы равновесия толстых плит с поперечной изотропией. Решения состоят из частных интегралов, а также из собственных функций однородной краевой задачи на ограничивающих плоскостях $z = \pm h$. Среди однородных решений, записанных в виде разделенных переменных, выступают соответствующие функции переменной z (вдоль толщины плиты) и функции двух остальных переменных: бигармоническая функция в проблеме плиты и гармоническая функция в проблеме диска, а также метагармонические комплексные, сопряженные функции для потенциального поля перемещений и метагармонические действительные функции для вихревого поля. Как частный случай обсуждаемой в работе среды рассмотрена изотропная среда.

S U M M A R Y

EQUILIBRIUM OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC LAYER

The paper presents a method of solution of the displacement equations of transversely isotropic layers. The solutions consist of particular integrals and of eigenfunctions of the homogeneous boundary-value problem at the surfaces $z = \pm h$. Among the homogeneous solutions written in terms of separated variables appear the functions of z (across the thickness of the plate), and functions of the remaining variables: biharmonic in the plate bending problem and harmonic in the plane stress problem, as also metaharmonic, complex conjugate functions for the potential displacement field and metaharmonic real functions for the solenoidal field. As a particular example, the case of isotropic medium is considered.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA
INSTYTUT INŻYNIERII BUDOWLANEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 listopada 1973 r.