ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 21, 2, 193–212, 1973, Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki

STATYCZNE, OSIOWO-SYMETRYCZNE ZAGADNIENIE MIKROPOLARNEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI I TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

JANUSZ DYSZLEWICZ (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W pracy zostanie podane pełne sformułowanie w naprężeniach statycznego, osiowo-symetrycznego problemu niesymetrycznej teorii sprężystości i termosprężystości, charakteryzującego się następującą postacią wektora przemieszczenia i obrotu: $\mathbf{u}(u_r, 0, u_z)$, $\boldsymbol{\varphi}(0, \varphi_\theta, 0)$ [1].

Do sformułowania zagadnienia zostaną wykorzystane naprężeniowe równania równowagi, związki geometrycznej zgodności oraz warunki brzegowe [2].

Na podstawie wyżej wymienionych równań rozpatrzony zostanie problem jednorodnej, izotropowej półprzestrzeni mikropolarnej, poddanej osiowo-symetrycznemu obciążeniu normalnemu na brzegu, oraz problem półprzestrzeni ogrzanej na powierzchni w sposób osiowo-symetryczny i wolnej od obciążeń mechanicznych. To ostatnie zagadnienie rozpatrzone zostanie dwoma różnymi sposobami.

2. Równania przemieszczeniowe

Równania przemieszczeniowe równowagi dla zagadnienia statycznego w ośrodku mikropolarnym mają następującą postać wektorową [1]:

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}+2\alpha\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{X}=0,\\
&[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha]\,\boldsymbol{\varphi}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{\varphi}+2\alpha\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}+\mathbf{Y}=0.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Tutaj $\mathbf{u}$ jest wektorem przemieszczenia, $\boldsymbol{\varphi}$ wektorem obrotu, $\mathbf{X}$ wektorem sił masowych, $\mathbf{Y}$ wektorem momentów masowych. Wielkości α, β, γ, ε, μ i λ są stałymi materiałowymi.

Napiszmy równania (2.1) w układzie współrzędnych walcowych r, θ, z i załóżmy, że występuje w zagadnieniu symetria osiowa, tzn. przyczyny deformacji jak i skutki nie zależą od kąta θ. Równania (2.1) rozdzielą się przy tym założeniu na dwa niezależne układy równań.

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać ten z dwóch układów, w którym wektory $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ mają postać

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}\equiv(u_r, 0, u_z), \qquad \boldsymbol{\varphi}\equiv(0, \varphi_\theta, 0),\\
&\mathbf{X}\equiv(X_r, 0, X_z), \qquad \mathbf{Y}\equiv(0, Y_\theta, 0).
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Układ ten jest następujący:

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)(\nabla^2-1/r^2)u_r+(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial r}-2\alpha\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial z}+X_r=0,\\
(2.3)\qquad &(\mu+\alpha)\nabla^2 u_z+(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial z}+2\alpha\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_\theta)+X_z=0,\\
&[(\gamma+\varepsilon)(\nabla^2-1/r^2)-4\alpha]\varphi_\theta+2\alpha\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+Y_\theta=0,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
e=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{\partial u_z}{\partial z},\qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.
$$

Przyjmijmy $X_r=X_z=Y_\theta=0$ i wyznaczmy z (2.3) oddzielne równania różniczkowe dla funkcji u_r, u_z i φ_θ. W tym celu $(2.3)_1$ mnożymy przez $1/r$, następnie to samo równanie $(2.3)_1$ różniczkujemy względem r, a równanie $(2.3)_2$ względem z. Po dodaniu stronami otrzymanych trzech równań i po przekształceniach otrzymamy równanie Laplace'a dla dylatacji e:

$$
\nabla^2 e=0. \tag{2.4}
$$

Równanie $(2.3)_1$ różniczkujemy względem z, a $(2.3)_2$ względem r. Otrzymane równania odejmujemy stronami, otrzymując równanie, w którym wystąpi wielkość $\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}$. Eliminując tę wielkość za pomocą $(2.3)_3$, po przekształceniach otrzymamy

$$
\nabla_0^2 D_0\,\varphi_\theta=0, \tag{2.5}
$$

gdzie operatory ∇_0^2, D_0 mają następującą postać: $\nabla_0^2=\nabla^2-1/r^2$, $D_0=l^2\nabla^2-1$, przy czym l^2 jest stałą, $l^2=(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)/4\alpha\mu$.

W celu otrzymania równania różniczkowego dla składowej u_r wystarczy na równaniu $(2.3)_1$ wykonać kolejno operacje ∇_0^2 i D_0 oraz uwzględnić zależności (2.4) i (2.5):

$$
\nabla_0^2\nabla_0^2 D_0\,u_r=0. \tag{2.6}
$$

Równanie różniczkowe dla funkcji u_z wyznaczymy następująco: różniczkujemy $(2.3)_1$ względem z, $(2.3)_2$ względem r. Tak otrzymane równania odejmujemy od siebie stronami otrzymując równanie, w którym wystąpi wyraz $\nabla^2\varphi_\theta$. Wyraz ten wprowadzamy do równania $(2.3)_3$, które pozwala na wyznaczenie $2\alpha\varphi_\theta$. Wstawiając $2\alpha\varphi_\theta$ do $(2.3)_2$ i wykonując na otrzymanym równaniu operację ∇^2 oraz uwzględniając (2.4), otrzymamy

$$
\nabla^2\nabla^2 D u_z=0. \tag{2.7}
$$

Operator D ma tu postać $D=l^2\nabla^2-1$.

Wyprowadzone równania (2.4) – (2.7) wykorzystamy w dalszej części pracy.

3. Równania naprężeniowe

W rozpatrywanym zagadnieniu osiowo-symetrycznym stan naprężenia związany ze stanem przemieszczeń i obrotów $(2.2)_1$ reprezentują następujące składowe niesymetrycznych tensorów naprężeń siłowych i momentowych:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \mu_{r\theta} & 0 \\ \mu_{\theta r} & 0 & \mu_{\theta z} \\ 0 & \mu_{z\theta} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Składowe te powinny spełniać układ trzech różniczkowych równań równowagi postaci

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial r}\sigma_{rr} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zr} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r}\sigma_{rz} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \\ \sigma_{zr}-\sigma_{rz} + \frac{\partial}{\partial r}\mu_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\mu_{z\theta} + \frac{\mu_{r\theta}+\mu_{\theta r}}{r} = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Ponadto w celu pełnego opisu zagadnienia w naprężeniach do równań (3.2) należy dołączyć różniczkowe warunki geometrycznej zgodności odkształceń, wyrażone w naprężeniach. Wreszcie w zależności od zagadnienia należy dla odpowiednich składowych występujących w (3.1) sformułować warunki brzegowe. Wyżej wymienione sformułowanie pozwolą na jednoznaczne wyznaczenie stanu naprężenia i odkształcenia w obszarze jednospójnym.

Niezależnych równań geometrycznej zgodności w naszym zagadnieniu jest pięć. W terminach odkształceń mają one postać [19]:

$$\begin{gathered} \kappa_{z\theta} + r\frac{\partial}{\partial z}\kappa_{\theta r} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial r}\kappa_{z\theta} - \frac{\partial}{\partial z}\kappa_{r\theta} = 0, \\ \kappa_{z\theta} + \frac{\partial}{\partial r}\gamma_{zz} - \frac{\partial}{\partial z}\gamma_{rz} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial r}(r\gamma_{\theta\theta}) - \gamma_{rr} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}\gamma_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\gamma_{zr} + \kappa_{\theta r} = 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Wielkości $\gamma_{rr}, \gamma_{\theta\theta}, \gamma_{zz}, \gamma_{rz}, \gamma_{zr}$ są tu składowymi niesymetrycznego tensora odkształcenia, a $\kappa_{r\theta}, \kappa_{\theta r}$ i $\kappa_{z\theta}$ są składowymi niesymetrycznego tensora giętno-skrętnego.

Równania (3.3) można napisać w naprężeniach wykorzystując w tym celu równania konstytutywne dla rozpatrywanego zagadnienia, rozwiązane względem składowych tensorów odkształceń. Można również w równaniach konstytutywnych zastąpić składowe tensorów odkształceń przez składowe wektora przemieszczenia i obrotu, co prowadzi do równań [3]:

$$
(3.4)\qquad
\begin{aligned}
&\sigma_{rr}=2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}+\lambda e,\\
&\sigma_{\theta\theta}=2\mu\frac{u_r}{r}+\lambda e,\\
&\sigma_{zz}=2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}+\lambda e,\\
&\sigma_{rz}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)-\alpha\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+2\alpha\varphi_\theta,\\
&\sigma_{zr}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\alpha\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)-2\alpha\varphi_\theta,\\
&\mu_{r\theta}=\gamma\left(\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial r}-\frac{\varphi_\theta}{r}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial r}+\frac{\varphi_\theta}{r}\right),\\
&\mu_{\theta r}=\gamma\left(\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial r}-\frac{\varphi_\theta}{r}\right)-\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial r}+\frac{\varphi_\theta}{r}\right),\\
&\mu_{z\theta}=(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial z},\qquad \mu_{\theta z}=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\mu_{z\theta}.
\end{aligned}
$$

Eliminując teraz z (3.4) funkcje u_r, u_z, φ_θ otrzymamy następujące równania zgodności odkształceń, wyrażone już w naprężeniach:

$$
(3.5)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left[\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{rz}+\sigma_{zr})-\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{zz}-\lambda e)\right]\right\}+2\lambda\frac{\partial^2 e}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial}{\partial z}(\mu_{r\theta}-\mu_{\theta r})=\frac{2\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mu_{z\theta}),\\
&\frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{zz}-\lambda e)+\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\mu_{z\theta}=\frac{1}{4\alpha}\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{rz}-\sigma_{zr})+\frac{1}{4\mu}\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{rz}+\sigma_{zr}),\\
&\frac{1}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})=\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{\theta\theta}-\lambda e),\\
&\frac{\partial}{\partial z}\mu_{r\theta}=\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{r}\right)\mu_{z\theta}.
\end{aligned}
$$

Droga wyprowadzenia powyższych równań jest następująca. Dodajemy stronami zróżniczkowane względem z równania $(3.4)_4$ i $(3.4)_5$, eliminując następnie z rezultatu wielkość $\partial u_z/\partial z$ za pomocą $(3.4)_3$. Po wykonaniu otrzymamy pochodną $\partial^2 u_r/\partial z^2$ wyrażoną przez naprężenia. Dodajemy do siebie równania $(3.4)_1$ i $(3.4)_2$ dwukrotnie zróżniczkowane względem z, a z wyniku eliminujemy funkcję $\partial^2 u_r/\partial z^2$ i otrzymamy równanie $(3.5)_1$.

Równania $(3.4)_6$ i $(3.4)_7$ zróżniczkowane względem z odejmujemy stronami i eliminujemy z rezultatu wielkość $\partial\varphi_\theta/\partial z$ za pomocą $(3.4)_8$. Prowadzi to do równania $(3.5)_2$. Równanie $(3.5)_3$ otrzymujemy następująco: dodajemy stronami równania $(3.4)_4$ i $(3.4)_5$ wyznaczając w ten sposób pochodną $\partial u_z/\partial r$. Następnie $(3.4)_4$ i $(3.4)_5$ zróżniczkowane względem z odejmujemy od siebie i w tak otrzymane równanie podstawiamy wyżej określoną pochodną $\partial u_z/\partial r$ oraz $\partial\varphi_\theta/\partial z$ z $(3.4)_8$. Eliminując z otrzymanego związku wyrażenie $\partial^2 u_r/\partial z^2$ za pomocą wzoru wyprowadzonego na wstępie, otrzymujemy równanie $(3.5)_3$. Eliminacja z równania $(3.4)_1$ i $(3.4)_2$ składowej u_r prowadzi do równania $(3.5)_4$. Wreszcie równanie $(3.5)_5$ otrzymujemy różniczkując $(3.4)_6$ względem z i podstawiając do otrzymanego związku pochodną $\partial\varphi_\theta/\partial z$ z równania $(3.4)_8$.

W (3.5) wielkość e wyrażamy w naprężeniach sumując stronami równania $(3.4)_{1-3}$:

$$e = \frac{1}{2\mu+3\lambda}(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{zz}). \tag{3.6}$$

Równania (3.5) i (3.2) wraz z naprężeniowymi warunkami brzegowymi stanowią pełny układ równań naprężeniowych w rozważanym osiowo-symetrycznym problemie mikropolarnej teorii sprężystości dla obszaru jednospójnego.

W mikropolarnej sprężystości w układzie kartezjańskim rozpatrywane są w naprężeniach następujące zagadnienia: przestrzenne zagadnienie dynamiczne w pracach [4 i 16], płaskie zagadnienie dynamiczne termosprężystości w pracy [17] oraz przestrzenne zagadnienie statyczne w pracy [18].

4. Dalsze równania w naprężeniach

Wykorzystajmy wyprowadzone w p. 2 oddzielne równania dla przemieszczeń i obrotu (2.4) - (2.7) w ten sposób, aby za pomocą przemieszczeniowych równań równowagi (2.3) i związków konstytutywnych w postaci (3.4) wyprowadzić oddzielne równania różniczkowe dla poszczególnych składowych stanu naprężenia σ_{zz}, σ_{rz}, σ_{zr}, $\mu_{z\theta}$, $\mu_{\theta z}$, dla kombinacji $\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}$, $\mu_{r\theta}-\mu_{\theta r}$ oraz pewne równania dodatkowe. Wymienione równania mają następującą postać:

$$\begin{aligned} &\nabla^2\nabla^2 D\sigma_{zz}=0,\\ &\nabla_0^2\nabla_0^2 D_0(\sigma_{rz},\sigma_{rz})=0,\\ &\nabla^2\nabla^2 D(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})=0,\\ &\nabla_0^2 D_0(\mu_{z\theta},\mu_{\theta z})=0,\\ &\nabla^2 D(\mu_{r\theta}-\mu_{\theta r})=0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

oraz

$$\begin{aligned} &\nabla^2(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{zz})=0,\\ &D_0(\sigma_{rz}-\sigma_{zr})=0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Powyższe równania wyprowadzamy w następujący sposób.

Na obu stronach równania $(3.4)_3$ wykonujemy operację $\nabla^2 \nabla^2 D$. Uwzględniając zależności (2.4) i (2.7) otrzymujemy równanie dla σ_{zz} $(4.1)_1$. Wykonując na wzorach $(3.4)_{4,5}$ operację $\nabla_0^2 \nabla_0^2 D_0$ i uwzględniając (2.5) – (2.7) otrzymamy równania dla σ_{rz} i σ_{zr} w postaci $(4.1)_2$. Związki $(3.4)_{1,2}$ po dodaniu stronami możemy przekształcić w ten sposób, że po prawej stronie rezultatu wystąpi tylko wielkość e i $\partial u_z/\partial z$. Wykonując na powyższym równaniu operację $\nabla^2 \nabla^2 D$ i uwzględniając (2.4) i (2.7) otrzymujemy równanie $(4.1)_3$ dla $\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}$. Równanie $(4.1)_4$ dla składowej $\mu_{z\theta}$, a co za tym idzie i dla $\mu_{\theta z}$, uzyskujemy wykonując na $(3.4)_8$ operację $\nabla_0^2 D_0$ i uwzględniając (2.5). Równanie $(4.1)_5$ dla $\mu_{r\theta}-\mu_{\theta r}$ otrzymujemy w sposób następujący: równania $(3.4)_6$ i $(3.4)_7$ odejmujemy stronami eliminując z rezultatu wielkość $[(1/r)/(\partial/\partial r)](r\varphi_\theta)$ za pomocą równania równowagi $(2.3)_2$. Następnie wykonujemy na uzyskanym równaniu operację $\nabla^2 D$ i uwzględniamy (2.4) i (2.7). Równania dodatkowe (4.2) otrzymujemy następująco: z (3.6) i (2.4) otrzymujemy równanie Laplace'a dla niezmiennika stanu naprężenia $(4.2)_1$. Odejmujemy stronami równania $(3.4)_4$ i $(3.4)_5$ eliminując z otrzymanego rezultatu wyrażenie $2\alpha\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}-\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$ za pomocą przemieszczeniowego równania równowagi $(2.3)_3$. Jeżeli wykonamy na otrzymanym wyniku operację D_0 i uwzględnimy (2.5), to otrzymamy równanie $(4.2)_2$ dla $\sigma_{rz}-\sigma_{zr}$.

5. Zagadnienie półprzestrzeni $z \geqslant 0$ poddanej normalnemu, osiowo-symetrycznemu obciążeniu na brzegu

Stan przemieszczeń i obrotów określony za pomocą układu równań (2.3) może być wywołany działaniem sił i momentów masowych w postaci $(2.2)_2$ lub odpowiednio dobranymi obciążeniami brzegowymi.

Rozpatrzmy zagadnienie półprzestrzeni bez obciążeń masowych i załóżmy, że na jej brzegu działa osiowo-symetryczne obciążenie pionowe zgodnie skierowane z dodatnim kierunkiem osi z. Warunkom brzegowym należy więc nadać postać

$$\sigma_{zz}(r,0)=-p(r), \qquad \sigma_{zr}(r,0)=0, \qquad \mu_{z\theta}(r,0)=0. \tag{5.1}$$

Zakładamy, że całka z obciążenia w płaszczyźnie $z=0$ jest ograniczona. Problem możemy sformułować w naprężeniach następująco: należy wyznaczyć składowe stanu naprężenia (3.1) dla półprzestrzeni, spełniające warunki równowagi (3.2), związki geometrycznej zgodności (3.5) oraz warunki brzegowe (5.1).

Przy rozwiązywaniu tego problemu posłużymy się równaniami (4.1). Wprowadźmy nieskończoną transformację Hankela zdefiniowaną następująco [5]:

$$\begin{aligned} [\bar{f}(\xi,z),\bar{\bar{f}}(\xi,z)] &= \int_0^\infty r f(r,z)\,[J_0(\xi r),J_1(\xi r)]\,dr, \\ f(r,z) &= \int_0^\infty \xi\,[\bar{f}(\xi,z),\bar{\bar{f}}(\xi,z)]\,[J_0(\xi r),J_1(\xi r)]\,d\xi. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Wykonajmy na równaniach (4.1) transformację $(5.2)_1$ pamiętając o zależnościach

$$
(5.3)\qquad
\begin{aligned}
&\int_0^\infty r\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)f(r)J_0(\xi r)\,dr=-\xi^2\bar{f}(\xi),\\
&\int_0^\infty r\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}\right)f(r)J_1(\xi r)\,dr=-\xi^2\tilde{f}(\xi).
\end{aligned}
$$

Otrzymujemy

$$
(5.4)\qquad
\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{dz^2}-\xi^2\right)^2\left(\frac{d^2}{dz^2}-\rho^2\right)[\bar{\sigma}_{zz},\tilde{\sigma}_{rz},\tilde{\sigma}_{zr},(\bar{\sigma}_{rr}+\bar{\sigma}_{\theta\theta})]=0,\\
&\left(\frac{d^2}{dz^2}-\xi^2\right)\left(\frac{d^2}{dz^2}-\rho^2\right)[\tilde{\mu}_{z\theta},(\bar{\mu}_{r\theta}-\bar{\mu}_{\theta r})]=0,
\end{aligned}
$$

gdzie $\rho=(\xi^2+1/l^2)^{1/2}$.

Równania (5.4) są zwyczajnymi, liniowymi, jednorodnymi równaniami różniczkowymi czwartego i szóstego rzędu o stałych współczynnikach. Uwzględniając warunki fizyczne dla półprzestrzeni, tzn. znikanie naprężeń, gdy $(r^2+z^2)^{1/2}\to\infty$, ogólnemu rozwiązaniu tych równań możemy nadać następującą postać:

$$
(5.5)\qquad
\begin{aligned}
&\bar{\sigma}_{zz}=(A+B\xi z)\,e^{-\xi z}+Ce^{-\rho z},\\
&\tilde{\sigma}_{rz}=(F+G\xi z)\,e^{-\xi z}+He^{-\rho z},\\
&\tilde{\sigma}_{zr}=(K+L\xi z)\,e^{-\xi z}+Me^{-\rho z},\\
&\tilde{\mu}_{z\theta}=De^{-\xi z}+Ee^{-\rho z},\\
&\bar{\sigma}_{rr}+\bar{\sigma}_{\theta\theta}=(Q+R\xi z)\,e^{-\xi z}+Se^{-\rho z},\\
&\bar{\mu}_{r\theta}-\bar{\mu}_{\theta r}=Ne^{-\xi z}+Pe^{-\rho z}.
\end{aligned}
$$

W rozwiązaniu (5.5) równań (5.4) litery $A-H$ i $K-S$ oznaczają dowolne stałe. Stałych tych jest szesnaście. Pokażemy, że potrafimy je wyznaczyć spełniając wszystkie warunki wyszczególnione w sformułowaniu problemu; w szczególności uzyskamy również z wyrażeń $(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})$ i $(\mu_{r\theta}-\mu_{\theta r})$ poszczególne ich składowe.

W tym celu wykonujemy transformację $(5.2)_1$ na dodatkowych równaniach (4.2), równaniu równowagi $(3.2)_2$ oraz na warunkach brzegowych (5.1):

$$
(5.6)\qquad
\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{dz^2}-\xi^2\right)(\bar{\sigma}_{rr}+\bar{\sigma}_{\theta\theta})=-\left(\frac{d^2}{dz^2}-\xi^2\right)\bar{\sigma}_{zz},\\
&\left(\frac{d^2}{dz^2}-\rho^2\right)(\tilde{\sigma}_{rz}-\tilde{\sigma}_{zr})=0,\\
&\xi\tilde{\sigma}_{rz}+\frac{d}{dz}\bar{\sigma}_{zz}=0,\\
&\bar{\sigma}_{zz}(\xi,0)=-\bar{p}(\xi),\quad \tilde{\sigma}_{zr}(\xi,0)=0,\quad \tilde{\mu}_{z\theta}(\xi,0)=0.
\end{aligned}
$$

Podstawiając (5.5) do (5.6) i eliminując stałe E, F, G, H, K, L, M, R i S, otrzymamy odpowiednio

$$
\begin{aligned}
&R+B=0, \quad S+C=0,\\
&K-F=0, \quad L-G=0,\\
&F=A-B, \quad G=B, \quad H=\frac{\rho}{\xi}C,\\
&A+C=-\bar{p}(\xi), \quad K+M=0, \quad D+E=0.
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Uwzględniając (5.7), wzory (5.5) przedstawiamy w postaci

$$
\begin{aligned}
&\bar{\sigma}_{zz}=(A+B\xi z)\,e^{-\xi z}+Ce^{-\rho z},\\
&\tilde{\sigma}_{rz}=(A-B+B\xi z)\,e^{-\xi z}+\frac{\rho}{\xi}\,Ce^{-\rho z},\\
&\tilde{\sigma}_{zr}=(A-B+B\xi z)\,e^{-\xi z}-(A-B)\,e^{-\rho z},\\
&\tilde{\mu}_{z\theta}=D\,(e^{-\xi z}-e^{-\rho z}),\\
&\tilde{\sigma}_{rr}+\tilde{\sigma}_{\theta\theta}=(Q-B\xi z)\,e^{-\xi z}-Ce^{-\rho z},\\
&\tilde{\mu}_{r\theta}-\tilde{\mu}_{\theta r}=Ne^{-\xi z}+Pe^{-\rho z}.
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

Wzory (5.8) znajdą zastosowanie przy rozpatrywaniu zagadnienia termosprężystego.

Pozostało nam do wyznaczenia siedem stałych, przy czym dysponujemy jeszcze nie wykorzystanym warunkiem

$$
A+C=-\bar{p}(\xi). \tag{5.9}
$$

Brakujące sześć warunków wiążących stałe otrzymamy z równań geometrycznej zgodności $(3.5)_{1-3}$.

Pomnóżmy obustronnie równania $(3.5)_{1-2}$ przez $rJ_0(\xi r)$, a równanie $(3.5)_3$ przez $rJ_1(\xi r)$ i scałkujmy je względem r w przedziale $[0, \infty)$. Uwzględniając $(5.2)_1$, $(5.3)_1$ oraz wzory

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{d}{dr}[rf(r)]\,J_0(\xi r)\,dr=\xi\tilde{f}(\xi),\\
&\int_0^\infty r\frac{d}{dr}[f(r)]\,J_1(\xi r)\,dr=-\xi\bar{f}(\xi),
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

otrzymujemy odpowiednio

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dz^2}(\bar{\sigma}_{rr}+\bar{\sigma}_{\theta\theta})=\xi\frac{d}{dz}(\tilde{\sigma}_{rz}+\tilde{\sigma}_{zr})+\xi^2(\bar{\sigma}_{zz}-\lambda\bar{e})+2\lambda\frac{d^2\bar{e}}{dz^2},\\
&\frac{d}{dz}(\bar{\mu}_{r\theta}-\bar{\mu}_{\theta r})=\frac{2\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\xi\,\tilde{\mu}_{z\theta},\\
&-\frac{\xi}{2\mu}(\bar{\sigma}_{zz}-\lambda\bar{e})+\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\tilde{\mu}_{z\theta}=\frac{1}{4\alpha}\frac{d}{dz}(\tilde{\sigma}_{rz}-\tilde{\sigma}_{zr})+\frac{1}{4\mu}\frac{d}{dz}(\tilde{\sigma}_{rz}+\tilde{\sigma}_{zr}).
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

W równaniach (5.11) $\bar{e}$ oznacza transformację $(5.2)_1$ wykonaną na (3.6). Spełniając przetransformowane warunki zgodności odkształceń (5.11) za pomocą wzorów (5.8) i wykorzystując warunek (5.9) wyznaczamy pozostałe stałe A, B, C, D, N, P i Q:

$$
\begin{aligned}
&N=-\frac{2\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{C}{\xi}, \quad P=\frac{2\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{C}{\rho}, \quad D=\frac{C}{\xi},\\
&B=\frac{C}{2a_0\xi^2}, \quad C=-2a_0\xi^2\frac{\bar{p}}{\Delta_0},\\
&A=-\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\left(1-2a_0\xi^2\frac{\xi}{\rho}\right),\\
&Q=-\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\left(\frac{\mu+2\lambda}{\mu+\lambda}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\rho}\right).
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

W (5.12) wprowadziliśmy oznaczenia $a_0=(\gamma+\varepsilon)(2\mu+\lambda)/4\mu(\mu+\lambda)$, $\bar{p}=\bar{p}(\xi)$, $\Delta_0=\Delta_0(\xi)=1+2a_0\xi^2(1-\xi/\rho)$. Stosując twierdzenie o transformacji odwrotnej $(5.2)_2$ oraz uwzględniając wartości wyznaczonych stałych (5.12) wzory (5.8) zapisujemy w postaci całek:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{zz}(r,z)=-\int_0^\infty\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi\left[(1+\xi z)e^{-\xi z}+2a_0\xi^2\left(e^{-\rho z}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\xi z}\right)\right]J_0(\xi r)\,d\xi,\\
&\sigma_{rz}(r,z)=-\int_0^\infty\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi\left[\xi z e^{-\xi z}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\rho}\left(\frac{\rho^2}{\xi^2}e^{-\rho z}-e^{-\xi z}\right)\right]J_1(\xi r)\,d\xi,\\
&\sigma_{zr}(r,z)=-\int_0^\infty\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi\left[\xi z e^{-\xi z}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\rho}(e^{-\rho z}-e^{-\xi z})\right]J_1(\xi r)\,d\xi,\\
&\mu_{z\theta}(r,z)=2a_0\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi^2(e^{-\rho z}-e^{-\xi z})J_1(\xi r)\,d\xi,\\
&\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}=-\int_0^\infty\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi\left[\left(\frac{\mu+2\lambda}{\mu+\lambda}-\xi z\right)e^{-\xi z}+2a_0\xi^2\left(\frac{\xi}{\rho}e^{-\xi z}-e^{-\rho z}\right)\right]J_0(\xi r)\,d\xi,\\
&\mu_{r\theta}-\mu_{\theta r}=\frac{4\varepsilon a_0}{\gamma+\varepsilon}\int_0^\infty\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi^2\left(e^{-\xi z}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\rho z}\right)J_0(\xi r)\,d\xi.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Dla uzyskania pełnej informacji o stanie naprężenia w półprzestrzeni pozostało wyznaczenie składowych σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\mu_{r\theta}$ i $\mu_{\theta r}$. W tym celu wykorzystamy niespełnione równania równowagi $(3.2)_{1,3}$ oraz wzory $(5.13)_{5,6}$. Przekształcamy równania równowagi $(3.2)_{1,3}$ do postaci

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma_{rr})=r(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})-r^2\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zr},\\
&\frac{\partial}{\partial r}(r^2\mu_{r\theta})=r(\mu_{r\theta}-\mu_{\theta r})-r^2\frac{\partial}{\partial z}\mu_{z\theta}-r^2(\sigma_{zr}-\sigma_{rz}).
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Podstawiamy do $(5.14)_1$ wyrażenia na $(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})$ oraz na σ_{zr} dane wzorami $(5.13)_{3,5}$; otrzymany rezultat obustronnie całkujemy względem r zmieniając po prawej stronie wyrażenia porządek całkowania. Uwzględniając wartości następujących całek:

$$
(5.15)\qquad
\begin{aligned}
&\int_0^r rJ_0(\xi r)\,dr=\frac{r}{\xi}J_1(\xi r),\\
&\int_0^r r^2 J_1(\xi r)\,dr=\frac{2r}{\xi^2}J_1(\xi r)-\frac{r^2}{\xi}J_0(\xi r),
\end{aligned}
$$

otrzymujemy

$$
(5.16)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r,z)=\int_0^\infty \frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi\Bigg[\left(\xi z-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-\xi z}&+\\
+2a_0\xi^2\left(e^{-\rho z}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\xi z}\right)\Bigg]&\left[J_0(\xi r)-\frac{J_1(\xi r)}{\xi r}\right]d\xi+\\
&-\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\int_0^\infty\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi e^{-\xi z}J_0(\xi r)\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Podstawiając σ_{rr} do $(5.13)_5$ wyznaczamy składową $\sigma_{\theta\theta}$:

$$
(5.17)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}(r,z)=\int_0^\infty \frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi\Bigg[\left(\xi z-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-\xi z}&+\\
+2a_0\xi^2\left(e^{-\rho z}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\xi z}\right)\Bigg]\frac{J_1(\xi r)}{\xi r}d\xi&-\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\int_0^\infty\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi e^{-\xi z}J_0(\xi r)\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Składowe $\mu_{r\theta}$ i $\mu_{\theta r}$ otrzymujemy przy użyciu wzorów $(5.13)_{2,3,4,6}$, $(5.14)_2$ i (5.15) postępując podobnie jak przy wyznaczaniu σ_{rr} i $\sigma_{\theta\theta}$:

$$
(5.18)\qquad
\begin{aligned}
\mu_{r\theta}(r,z)&=2a_0\int_0^\infty\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi^2\left(e^{-\xi z}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\rho z}\right)\left[J_0(\xi r)-\frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon}\frac{J_1(\xi r)}{\xi r}\right]d\xi,\\
\mu_{\theta r}(r,z)&=2a_0\int_0^\infty\frac{\bar{p}}{\Delta_0}\xi^2\left(e^{-\xi z}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\rho z}\right)\left[\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}J_0(\xi r)-\frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon}\frac{J_1(\xi r)}{\xi r}\right]d\xi.
\end{aligned}
$$

Pozostałe równania geometrycznej zgodności $(3.5)_{4,5}$ są teraz spełnione tożsamościowo.

We wzorach $(5.13)_{1-4}$ i (5.16) – (5.18) mamy zestawione rezultaty dla poszczególnych składowych stanu naprężenia. Opisują one w pełni stan naprężenia w półprzestrzeni i stanowią rozwiązanie postawionego na początku problemu.

Rozpatrzmy przypadek szczególny. Dla $\alpha\to 0$, $\rho\to\xi$, $\Delta_0\to 1$ składowe tensora naprężeń momentowych znikają, natomiast wzory dla σ_{zz}, $\sigma_{zr}=\sigma_{rz}$, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ przechodzą na wzory klasycznej teorii sprężystości dla ośrodka Hooke'a [7].

Rezultat dla półprzestrzeni poddanej osiowo-symetrycznemu obciążeniu normalnemu, uzyskany w tej pracy, pokrywa się z wynikami prac [3 i 6], gdzie zagadnienie osiowo-symetryczne rozwiązuje się przez wprowadzenie uogólnionych funkcji Love'a oraz potencjałów sprężystych.

6. Zagadnienie osiowo-symetryczne mikropolarnej termosprężystości

W punkcie tym podamy różniczkowe równania naprężeniowe dla zagadnienia osiowo-symetrycznego mikropolarnej termosprężystości.

Wektorowe równania przemieszczeniowe mikropolarnej termosprężystości z pominięciem sił i momentów masowych oraz wyrazów inercyjnych mają postać [1]:

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\,\nabla^2\,\mathbf{u}+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}+2\alpha\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}=\nu\,\mathrm{grad}\,T,\\
&[(\gamma+\varepsilon)\,\nabla^2-4\alpha]\,\boldsymbol{\varphi}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{\varphi}+2\alpha\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}=0,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

gdzie $\nu=(3\lambda+2\mu)\,\alpha_t$, a α_t jest termicznym współczynnikiem rozszerzalności liniowej ośrodka. Funkcja T określa przyrost temperatury liczony od stanu naturalnego ośrodka. Do równań (6.1) należy dołączyć równanie przewodnictwa cieplnego. W ogólnym przypadku jest to układ z trzema niewiadomymi. Napiszmy (6.1) w układzie współrzędnych walcowych r, θ, z, uwzględniając osiową symetrię zagadnienia. Otrzymamy dwa niezależne układy równań, ale wyrazy termiczne wystąpią tylko w układzie związanym z wektorami $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\varphi}$ w postaci $\mathbf{u}\equiv(u_r, 0, u_z)$, $\boldsymbol{\varphi}\equiv(0, \varphi_\theta, 0)$. Układ ten jest następujący:

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)u_r+(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial r}-2\alpha\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial z}=\nu\frac{\partial T}{\partial r},\\
&(\mu+\alpha)\,\nabla^2 u_z+(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial z}+2\alpha\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_\theta)=\nu\frac{\partial T}{\partial z},\\
&\left[(\gamma+\varepsilon)\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)-4\alpha\right]\varphi_\theta+2\alpha\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)=0.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Z równań (6.2), postępując podobnie jak w p. 2, możemy wyprowadzić równanie wiążące dylatację e z funkcją T:

$$
\nabla^2 e=m\nabla^2 T
\tag{6.3}
$$

oraz następujące oddzielne równania różniczkowe dla poszczególnych składowych wektora $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\varphi}$ z temperaturą T:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_0^2 D_0\,\varphi_\theta=0,\\
&\nabla_0^2\,\nabla_0^2 D_0\,u_r=m\frac{\partial}{\partial r}D\nabla^2 T,\\
&\nabla^2\,\nabla^2 D\,u_z=m\frac{\partial}{\partial z}D\nabla^2 T.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

W (6.3) i (6.4) $m=\nu/(2\mu+\lambda)$.

Stan naprężenia w rozpatrywanym zagadnieniu reprezentowany jest przez składowe niesymetrycznych tensorów naprężeń siłowych i momentowych jak w (3.1). Składowe te wyrażają się przez funkcje u_r, u_z, φ_θ i T następująco:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{rr}=2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}+\lambda e-\nu T,\\
(6.5)\qquad &\sigma_{\theta\theta}=2\mu\frac{u_r}{r}+\lambda e-\nu T,\\
&\sigma_{zz}=2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}+\lambda e-\nu T.
\end{aligned}
$$

Pozostałe równania konstytutywne pokrywają się z równaniami konstytutywnymi $(3.4)_{4-8}$ dla zagadnienia bez temperatury. Również pozostają tu zachowane naprężeniowe równania równowagi (3.2) oraz związki (3.3).

Równania geometrycznej zgodności dla termosprężystości (w naprężeniach) uzyskamy ze związków (6.5) oraz $(3.4)_{4-8}$, postępując podobnie jak w p. 3. I tak odpowiednikami równań $(3.5)_{1,3,4}$ są tu odpowiednio równania $(6.6)_{1,3,4}$. W równaniach $(6.6)_{2,5}$ nie występuje temperatura T i widzimy, że są one identyczne z $(3.5)_{2,5}$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left[\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zr}+\sigma_{rz})-\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{zz}-\lambda e+\nu T)\right]\right\}+2\lambda\frac{\partial^2 e}{\partial z^2}-2\nu\frac{\partial^2 T}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial}{\partial z}(\mu_{r\theta}-\mu_{\theta r})=\frac{2\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mu_{z\theta}),\\
(6.6)\quad &\frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{zz}-\lambda e+\nu T)+\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\mu_{z\theta}=\frac{1}{4\alpha}\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{rz}-\sigma_{zr})+\frac{1}{4\mu}\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{rz}+\sigma_{zr}),\\
&\frac{1}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})=\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{\theta\theta}-\lambda e+\nu T),\\
&\frac{\partial}{\partial z}\mu_{r\theta}=\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{r}\right)\mu_{z\theta}.
\end{aligned}
$$

W równaniach (6.6) wyrażamy e przez naprężenia i temperaturę na podstawie wzoru

$$
(6.7)\qquad e=\frac{1}{2\mu+3\lambda}(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{zz})+\frac{3\nu}{2\mu+3\lambda}T,
$$

otrzymanego z (6.5).

Równania (6.6), (3.2) wraz z równaniem przewodnictwa cieplnego, przy danych warunkach brzegowych dla naprężeń i temperatury, stanowią pełne sformułowanie w naprężeniach rozważanego stacjonarnego, osiowo-symetrycznego problemu mikropolarnej termosprężystości dla obszaru jednospójnego.

Z zależności (6.5) i $(3.4)_{4-8}$ przy użyciu równań (6.3), (6.4), (6.7) oraz przemieszczeniowych równań równowagi (6.2) możemy wyprowadzić następujące równania różniczkowe:

$$
(6.8)\quad
\begin{aligned}
&\nabla^2 \nabla^2 D\, \sigma_{zz} = 2\mu m \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \nabla^2\right) D\nabla^2 T,\\
&\nabla_0^2 \nabla_0^2 D_0 (\sigma_{rz}, \sigma_{zr}) = 2\mu m \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial r} D\nabla^2 T,\\
&\nabla^2 \nabla^2 D (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = -2\mu m \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \nabla^2\right) D\nabla^2 T,\\
&\nabla_0^2 D_0 (\mu_{z\theta}, \mu_{\theta z}) = 0,\\
&\nabla^2 D (\mu_{r\theta} - \mu_{\theta r}) = 0
\end{aligned}
$$

oraz dodatkowe równania postaci

$$
(6.9)\quad
\begin{aligned}
&\nabla^2 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) = -4\mu m \nabla^2 T,\\
&D_0 (\sigma_{zr} - \sigma_{rz}) = 0.
\end{aligned}
$$

7. Zagadnienie półprzestrzeni $z \geqslant 0$ poddanej stacjonarnemu, osiowo-symetrycznemu ogrzaniu na brzegu

Rozważmy osiowo-symetryczne, stacjonarne zagadnienie termosprężystości dla jednorodnej izotropowej półprzestrzeni mikropolarnej. Załóżmy, że w półprzestrzeni nie występują żadne źródła ciepła. W takim przypadku równanie przewodnictwa cieplnego dla funkcji T nie jest związane z żadnym układem równań równowagi i jest równaniem Laplace'a:

$$
(7.1)\qquad \nabla^2 T(r, z) = 0.
$$

W tak postawionym zagadnieniu przyczyną deformacji ośrodka może być tylko stacjonarne ogrzanie półprzestrzeni w płaszczyźnie $z=0$ w sposób niezależny od kąta θ. Przyjmując dodatkowo, że brzeg półprzestrzeni wolny jest od obciążeń mechanicznych, możemy sformułować warunki brzegowe zagadnienia:

$$
(7.2)\qquad \sigma_{zz}(r, 0) = 0, \quad \sigma_{zr}(r, 0) = 0, \quad \mu_{z\theta}(r, 0) = 0, \quad T(r, 0) = f(r).
$$

Przy założeniu, że całka z funkcji obciążenia w płaszczyźnie $z=0$ jest ograniczona, do warunków (7.2) dołączamy warunki regularności rozwiązania w nieskończoności, tzn. znikanie naprężeń i pola temperatury, gdy $(r^2+z^2)^{1/2} \to \infty$.

Zadaniem naszym będzie określenie rozkładu temperatury T oraz składowych stanu naprężenia (3.1) w półprzestrzeni, spełniając równania równowagi (3.2), związki geometrycznej zgodności w postaci (6.6), równanie przewodnictwa cieplnego (7.1) i całość warunków (7.2).

Zagadnienie to rozwiążemy dwiema metodami.

7.1

Rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego (7.1) z warunkiem $(7.2)_4$ dla półprzestrzeni przedstawiamy w postaci całki Hankela,

$$T(r,z)=\int_0^\infty \bar{f}(\xi)\,\xi e^{-\xi z} J_0(\xi r)\,d\xi. \tag{7.3}$$

Dla określenia składowych stanu naprężenia wychodzimy z równań (6.8), do których wprowadzamy znaną funkcję T z (7.3). Ze względu na fakt, że funkcja T z (7.3) jest rozwiązaniem równania Laplace'a, równania (6.8) przechodzą w układ jednorodnych równań różniczkowych, identyczny z układem (4.1) (por. p. 4). Rozwiązanie zatem równań z (6.8) dla półprzestrzeni z warunkami $(7.2)_{1-3}$ przy wykorzystaniu związków pomocniczych (6.9) [identycznych teraz z (4.2)] i równania równowagi $(3.2)_2$ sprowadza się do dokładnego powtórzenia postępowania szczegółowo opisanego w p. 5 aż do momentu uzyskania wzorów (5.8). Wzory te wykorzystamy, uwzględniając tu jednak odmienny niż w p. 5 warunek brzegowy dla składowej σ_{zz}, który prowadzi do zależności

$$A+C=0. \tag{7.4}$$

Stałe A, B, C, D, Q, N i P wyznaczamy spełniając przetransformowane równania zgodności $(6.6)_{1-3}$ i wstawiając do nich wspomniane wyrażenia (5.8). Uzyskujemy algebraiczny układ równań, z którego w połączeniu z (7.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&A=-\mu m\bar{f}\frac{2a_0\xi^2}{\Delta_0},\\
&B=-\mu m\bar{f}(1-1/\Delta_0),\\
&Q=-\frac{\mu m\bar{f}}{\Delta_0}\left[\frac{2\mu+\lambda}{\mu+\lambda}+2a_0\xi^2\left(3-4\frac{\xi}{\rho}\right)\right],\\
&D=-\frac{1}{\xi}A,\qquad N=\frac{2\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\frac{1}{\xi}A,\qquad P=-\frac{2\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\frac{1}{\rho}A.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Można sprawdzić, że pozostałe równania geometrycznej zgodności $(6.6)_{4,5}$ nie wnoszą nowych warunków wiążących stałe i wobec (7.4), (7.5) są spełnione tożsamościowo.

Pełne rozwiązanie zagadnienia uzyskamy spełniając niewykorzystane dotąd równania równowagi $(3.2)_{1,3}$. Spełnienie ich przez (5.8) prowadzi do wyznaczenia składowych $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \mu_{r\theta}, \mu_{\theta r}$, przy czym tok postępowania jest identyczny z podanym w p. 5 dla zagadnienia bez temperatury. Ostatecznie rezultat przedstawiamy w postaci całek:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}(r,z)=-\mu m\int_0^\infty \Big[&\bar{f}\xi(1-1/\Delta_0)(1+\xi z)e^{-\xi z}+\\
&+\frac{2a_0\xi^2}{\Delta_0}\left(\frac{\xi}{\rho}e^{-\xi z}-e^{-\rho z}\right)\Big]J_0(\xi r)\,d\xi,
\end{aligned} \tag{7.6}$$

(7.6) [c.d.]
$$\sigma_{zr}(r,z) = -\mu m \int_0^\infty \bar{f}\xi \left[(1-1/\Delta_0)\, \xi z e^{-\xi z} + \frac{2a_0 \xi^2}{\Delta_0} \frac{\xi}{\rho} (e^{-\xi z} - e^{-\rho z}) \right] J_1(\xi r)\, d\xi,$$

$$\sigma_{rz}(r,z) = -\mu m \int_0^\infty \bar{f}\xi \left[(1-1/\Delta_0)\, \xi z e^{-\xi z} + \frac{2a_0 \xi^2}{\Delta_0} \frac{\xi}{\rho} \left(e^{-\xi z} - \frac{\rho^2}{\xi^2} e^{-\rho z} \right) \right] J_1(\xi r)\, d\xi,$$

$$\mu_{z\theta}(r,z) = 2\mu m a_0 \int_0^\infty \frac{\bar{f}\xi}{\Delta_0} (e^{-\xi z} - e^{-\rho z})\, J_1(\xi r)\, d\xi,$$

$$\sigma_{rr}(r,z) = 2\mu m a_0 \int_0^\infty \frac{\bar{f}\xi}{\Delta_0} \left\{ \left[\frac{2\mu}{\gamma+\varepsilon} + \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\rho}\right) \xi z \right] e^{-\xi z} + \xi^2 (e^{-\xi z} - e^{-\rho z}) \right\} \left[J_0(\xi r) - \frac{J_1(\xi r)}{\xi r} \right] d\xi - 4\mu m a_0 \int_0^\infty \frac{\bar{f}\xi}{\Delta_0} \left[\frac{\mu}{\gamma+\varepsilon} + \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\rho}\right) \right] e^{-\xi z} J_0(\xi r)\, d\xi,$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r,z) = 2\mu m a_0 \int_0^\infty \frac{\bar{f}\xi}{\Delta_0} \left\{ \left[\frac{2\mu}{\gamma+\varepsilon} + \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\rho}\right) \xi z \right] e^{-\xi z} + \xi^2 (e^{-\xi z} - e^{-\rho z}) \right\} \frac{J_1(\xi r)}{\xi r} d\xi - 4\mu m a_0 \int_0^\infty \frac{\bar{f}\xi}{\Delta_0} \left[\frac{\mu}{\gamma+\varepsilon} + \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\rho}\right) \right] e^{-\xi z} J_0(\xi r)\, d\xi,$$

$$\mu_{r\theta}(r,z) = 2\mu m a_0 \int_0^\infty \frac{\bar{f}\xi^2}{\Delta_0} \left(\frac{\xi}{\rho} e^{-\rho z} - e^{-\xi z} \right) \left[J_0(\xi r) - \frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon} \frac{J_1(\xi r)}{\xi r} \right] d\xi,$$

$$\mu_{\theta r}(r,z) = 2\mu m a_0 \int_0^\infty \frac{\bar{f}\xi^2}{\Delta_0} \left(\frac{\xi}{\rho} e^{-\rho z} - e^{-\xi z} \right) \left[\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} J_0(\xi r) - \frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon} \frac{J_1(\xi r)}{\xi r} \right] d\xi,$$

$$\bar{f} = \bar{f}(\xi) = \int_0^\infty r f(r)\, J_0(\xi r)\, dr.$$

Dla przypadku szczególnego $\alpha=0$ wzory (7.6) przechodzą we wzory klasycznej termosprężystości. Znikają składowe tensora naprężeń momentowych oraz składowe σ_{zz}, σ_{rz}, σ_{zr}. Różne od zera pozostają tylko składowe σ_{rr} i $\sigma_{\theta\theta}$. Jest to tzw. quasi-płaski stan naprężenia [10].

Problem został więc rozwiązany. Rozkład temperatury w półprzestrzeni określa wzór (7.3), a stan naprężenia opisany jest przez elementy z macierzy (3.1) o wartościach określonych przez wzory (7.6).

W pracy [6] rozpatrzone zagadnienie rozwiązuje się za pomocą potencjałów sprężystych, w pracy zaś [8] przez bezpośrednie całkowanie równań przemieszczeniowych. Otrzymany rezultat pokrywa się z wynikami podanymi w wyżej wymienionych pracach. Otrzymujemy również dobre przejście do rezultatów w pracy [9] ($\alpha \to \infty$) dla tzw. pseudo-continuum Cosseratów [14].

7.2

Inne podejście do problemu polega na przyjęciu tensora naprężeń siłowych i momentowych w postaci [11]

$$
\begin{gathered}
\sigma_{zz}=\sigma'_{zz}+\sigma''_{zz},\\
\sigma_{rz}=\sigma'_{rz}+\sigma''_{rz},\\
\sigma_{zr}=\sigma'_{zr}+\sigma''_{zr},\\
\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}=(\sigma'_{rr}+\sigma'_{\theta\theta})+(\sigma''_{rr}+\sigma''_{\theta\theta}),\\
\mu_{z\theta}=\mu'_{z\theta}+\mu''_{z\theta},\\
\mu_{r\theta}-\mu_{\theta r}=(\mu'_{r\theta}-\mu'_{\theta r})+(\mu''_{r\theta}-\mu''_{\theta r}).
\end{gathered}
\tag{7.7}
$$

Wielkości oznaczone znakiem «prim» są całkami szczególnymi niejednorodnego układu równań (6.8). Wielkości z dwoma kreskami są całkami ogólnymi jednorodnego układu równań (6.8).

Rozwiązanie problemu sprowadza się wówczas do:

a) wyznaczenia składowych stanu naprężenia dla zagadnienia klasycznej termosprężystości generowanego przez odpowiednio dobrane warunki brzegowe (temperatura, obciążenia mechaniczne);

b) rozwiązania typowego problemu brzegowego mikropolarnej sprężystości ($T=0$).

Poprawność takiego postępowania wynika z zasady superpozycji, która ma tutaj zastosowanie ze względu na liniowość wszystkich równań różniczkowych i warunków brzegowych.

Rozwiązanie dla wielkości oznaczonych znakiem «prim» wyznaczymy przy tak dobranych warunkach brzegowych, że zagadnienie z punktu b sprowadzi się do już rozwiązanego problemu w p. 5.

Wyjściowymi równaniami dla punktu a są następujące równania różniczkowe uzyskane z $(6.8)_{1-3}$:

$$
\begin{gathered}
\nabla^2\sigma'_{zz}=2\mu m\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\nabla^2\right)T,\\
\nabla_0^2(\sigma'_{rz},\sigma'_{zr})=2\mu m\frac{\partial^2 T}{\partial z\,\partial r},\\
\nabla^2(\sigma'_{rr}+\sigma'_{\theta\theta})=-2\mu m\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\nabla^2\right)T.
\end{gathered}
\tag{7.8}
$$

Wszystkie składowe oznaczone symbolem «prim» tensora naprężeń momentowych przyjmujemy z $(6.8)_{4,5}$ za równe zeru:

$$
\mu'_{z\theta}=\mu'_{\theta z}=\mu'_{r\theta}=\mu'_{\theta r}=0. \tag{7.9}
$$

Ponadto ze związków dodatkowych (6.9) mamy

$$\sigma'_{rr}+\sigma'_{\theta\theta}+\sigma'_{zz}=-4\mu mT, \qquad \sigma'_{rz}-\sigma'_{zr}=0. \tag{7.10}$$

Z $(7.10)_2$ widzimy, że oznaczony znakiem «prim» tensor naprężeń siłowych jest symetryczny.

Do równań (7.8) - (7.10) dołączamy równania równowagi (3.2) i związki geometrycznej zgodności (6.6) napisane dla wielkości oznaczonych symbolem «prim».

Rozwiązanie dla temperatury (7.3) z warunkiem $(7.2)_4$ jest nadal poprawne, natomiast dla obciążeń mechanicznych zażądajmy, aby były spełnione następujące warunki na brzegu:

$$\sigma'_{zz}(r,0)\neq 0, \qquad \sigma'_{zr}(r,0)=0 \tag{7.11}$$

oraz warunki regularności w nieskończoności.

Wykonajmy na równaniach (7.8) transformację $(5.2)_1$ i uwzględnijmy równanie (7.1) dla T; otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{dz^2}-\xi^2\right)\bar{\sigma}'_{zz}=2\mu m\frac{d^2\bar{T}}{dz^2},\\
&\left(\frac{d^2}{dz^2}-\xi^2\right)(\tilde{\sigma}'_{rz},\tilde{\sigma}'_{zr})=-2\mu m\xi\frac{d\bar{T}}{dz},\\
&\left(\frac{d^2}{dz^2}-\xi^2\right)(\bar{\sigma}'_{rr}+\bar{\sigma}''_{\theta\theta})=-2\mu m\frac{d^2\bar{T}}{dz^2}.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Spełniając warunki fizyczne problemu należy przyjąć ogólne rozwiązanie równań w postaci:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}'_{zz}&=(A'+B'\xi z)\,e^{-\xi z},\\
\tilde{\sigma}'_{zr}&=(D'+C'\xi z)\,e^{-\xi z},\\
\tilde{\sigma}'_{zr}&=(E'+F'\xi z)\,e^{-\xi z},\\
\bar{\sigma}'_{rr}+\bar{\sigma}'_{\theta\theta}&=(G'+H'\xi z\delta)\,e^{-\xi z}.
\end{aligned} \tag{7.13}$$

W (7.13) $A'-H'$ oznaczają dowolne stałe.

Podstawiając do (7.12) rozwiązanie na temperaturę z (7.3) oraz żądając, aby (7.13) było rozwiązaniem równań (7.12), otrzymujemy

$$B'=C'=F'=-H'=-\mu m\bar{f}(\xi). \tag{7.14}$$

Spełniając warunek $(7.10)_1$ uzyskujemy

$$G'+A'=-4\mu m\bar{f}(\xi). \tag{7.15}$$

Z warunku równowagi $(3.2)_2$ mamy

$$A'=B'+D'. \tag{7.16}$$

Z warunku symetrii $(7.10)_2$ wynika, że $D'=E'$. Jeżeli spełnimy warunek brzegowy $(7.11)_2$, to uzyskamy

$$D'=E'=0. \tag{7.17}$$

Spełnienie warunku brzegowego $(7.11)_2$ pociąga za sobą spełnienie warunku $(7.11)_1$, ponieważ $A' \neq 0$. Z (7.14), (7.16) i (7.17) otrzymujemy bowiem

$$A' = -\mu m \bar{f}(\xi). \tag{7.18}$$

Określenie składników wyrażenia $\sigma'_{rr} + \sigma'_{\theta\theta}$ uzyskamy spełniając równanie równowagi $(3.2)_1$. Ostatecznie znajdziemy

$$\begin{aligned}
\sigma'_{zz} &= -\mu m \int_0^\infty \xi \bar{f}(\xi)(1+\xi z) e^{-\xi z} J_0(\xi r)\, d\xi, \\
\sigma'_{rz} = \sigma'_{zr} &= -\mu m \int_0^\infty \xi^2 \bar{f}(\xi) z e^{-\xi z} J_1(\xi r)\, d\xi, \\
\sigma'_{rr} &= -\mu m \int_0^\infty \xi \bar{f}(\xi)(1+\xi z) e^{-\xi z} \frac{J_1(\xi r)}{\xi r}\, d\xi + \\
&\quad - \mu m \int_0^\infty \xi \bar{f}(\xi)(1-\xi z) e^{-\xi z} J_0(\xi r)\, d\xi, \\
\sigma'_{\theta\theta} &= \mu m \int_0^\infty \xi \bar{f}(\xi)(1+\xi z) e^{-\xi z} \frac{J_1(\xi r)}{\xi r}\, d\xi + 2\mu m \int_0^\infty \xi \bar{f}(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r)\, d\xi.
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Wyznaczone rozwiązanie (7.9) i (7.19) spełnia również równanie równowagi $(3.2)_3$ i związki zgodności odkształceń (6.6).

Przejdźmy do zagadnienia b. Równania wyjściowe dla wielkości z dwiema kreskami są następujące:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \nabla^2 D \sigma''_{zz} &= 0, \\
\nabla_0^2 \nabla_0^2 D_0 (\sigma''_{rz}, \sigma''_{zr}) &= 0, \\
\nabla^2 \nabla^2 D (\sigma''_{rr} + \sigma''_{\theta\theta}) &= 0, \\
\nabla_0^2 D_0 (\mu''_{z\theta}, \mu''_{\theta z}) &= 0, \\
\nabla^2 D (\mu''_{r\theta} - \mu''_{\theta r}) &= 0.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Ponadto mamy

$$\nabla^2 (\sigma''_{rr} + \sigma''_{\theta\theta} + \sigma''_{zz}) = 0, \qquad D_0 (\sigma''_{rz} - \sigma''_{zr}) = 0. \tag{7.21}$$

Do równań (7.20) należy dołączyć równania równowagi (3.2) i związki zgodności odkształceń bez temperatury (3.5). Rozwiązanie zagadnienia musi być takie, aby były spłenione warunki na brzegu półprzestrzeni $(7.2)_{1-3}$:

$$[\sigma'_{zz} + \sigma''_{zz}]_{z=0} = [\sigma'_{zr} + \sigma''_{zr}]_{z=0} = [\mu'_{z\theta} + \mu''_{z\theta}]_{z=0} = 0 \tag{7.22}$$

oraz warunki fizyczne.

Podstawiając do (7.22) wartości składowe σ'_{zz}, σ'_{zr} i $\mu'_{z\theta}$ na brzegu, odpowiednio na podstawie $(7.19)_1$, $(7.11)_2$ i (7.9) otrzymujemy warunki brzegowe dla zadania b:

$$\sigma''_{zz}(r,0) = \mu m f(r), \qquad \sigma''_{zr}(r,0) = 0, \qquad \mu''_{z\theta}(r,0) = 0. \tag{7.23}$$

Problem brzegowy mikropolarnej sprężystości dla półprzestrzeni z warunkami typu (7.23) został szczegółowo rozpatrzony w p. 5. Wystarczy zatem w celu uzyskania rozwiązania b we wzorach $(5.13)_{1-4}$ i (5.16) - (5.18) podstawić

$$\bar{p}(\xi) = -\mu m \bar{f}(\xi). \tag{7.24}$$

Końcowy rezultat dla problemu termosprężystości otrzymamy dodając wartości naprężeń zestawione we wzorach (7.9) i (7.19) z odpowiednimi wartościami naprężeń, zestawionymi we wzorach $(5.13)_{1-4}$ i (5.16) - (5.18) pamiętając o (7.24). Wykonanie prowadzi do tych samych rezultatów, które uzyskaliśmy poprzednio dla zagadnienia termosprężystego, tzn. do (7.6).

Literatura cytowana w tekście

1. W. Nowacki, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. W. Nowacki, *Plane problems of micropolar elasticity*, Arch. Mech. Stos., **23**, 5, 587 - 611, 1971.
3. W. Nowacki, *Generalized Love's functions in micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **17**, 4, 247 - 256, 1969.
4. J. Ignaczak, *Tensorial equations of motion for elastic materials with microstructure*, Witold Nowacki Anniversary Volume, Wolters-Noordhoff Publishing, 1971.
5. I. N. Sneddon, *Fourier transforms*, Mc. Grow-Hill Book Company, Inc. New-Toronto-London 1951.
6. W. Nowacki, *Axial-symmetric problems in micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 7 - 8, 317 - 326, 1971.
7. W. Nowacki, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
8. R. S. Dhaliwal, *The steady-state axisymmetric problem of micropolar thermoelasticity*, Arch. Mech. Stos., **23**, 5, 705 - 714, 1971.
9. P. Puri, *Steady-state thermoelastic problems for the half-space with couple-stresses*, Arch. Mech. Stos., **22**, 4, 479 - 490, 1970.
10. W. Nowacki, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1966.
11. W. Nowacki, *The plane problem of micropolar thermoelasticity*, Arch. Mech. Stos., **22**, 1, 1 - 26, 1970.
12. E. V. Kuvchinski, *Continual theory of asymmetric elasticity* [in Russian], Fiz. Tvier. Tiela, 5, 2591, 1963.
13. V. A. Palmov, *Fundamental equations of asymmetric elasticity* [in Russian], Prikl. Math. Mech., **28**, 1964.
14. R. D. Midlin, *Effects of coupled-stresses in linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, 1962.
15. A. C. Eringen, *Linear theory of micropolar elasticity*, J. Math. Mech., **15**, 6, 1966.
16. Z. Olesiak, *Stress differential equations of the micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **18**, 5, 1970.
17. D. Ieşan, *On the plane coupled micropolar thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **16**, 8, 379 - 384, 1968.
18. N. Sadru, *On some problems of the linear theory of asymmetric elasticity*, Int. J. Engng. Sci., **4**, 1, 1966.
19. W. Günther, *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums*, Anh. Braunschweig. Wiss. Ges., **10**, 195 - 213, 1958.

Резюме

СТАТИЧЕСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ

В статье дана полная формулировка в напряжениях статической осесимметрической задачи несимметричной теории упругости и термоупругости. Векторы перемещений и поворота можно выразить в этой задаче в следующем виде: $\mathbf{u}(u_r, 0, u_z)$, $\boldsymbol{\varphi}(0, \varphi_\theta, 0)$.

Формулировка задачи состоит из дефференциальных уравнений равновесия в напряжениях, дифференциальных геометрических соотношений совместности, выраженных также в напряжениях, и краевых условий.

В качестве примера рассматрена задача об однородном изотропном микрополярном полупространстве с осесимметрической нормальной нагрузкой на поверхности, а также задача о полупространстве, осесимметрически нагреваемом с поверхности и свободном от механических воздействий. Последняя задача решена двумя способами.

Полученные составляющие тензоров силовых и моментных напряжений выражены в виде интегралов Ганкеля.

Summary

STATIC AXI-SYMMETRIC PROBLEM OF MICROPOLAR ELASTICITY AND THERMOELASTICITY THEORY

The paper presents a complete formulation (in terms of stresses) of the static, axisymmetric problem of the theory of asymmetric elasticity and thermoelasticity, characterized by the following form of the displacement and rotation vectors: $\mathbf{u}(u_r, 0, u_z)$, $\boldsymbol{\varphi}(0, \varphi_\theta, 0)$. The formulation consists of the stress equations of equilibrium, the differential compatibility equations expressed in terms of stresses, and the boundary conditions.

An example concerns the problem of homogeneous, isotropic micropolar halfspace with an axi-symmetric normal boundary load, and the problem of a halfspace axi-symmetrically heated at the surface, free from mechanical loads. The latter problem is solved in two ways.

The final result, the components of the force-stress and couple-stress tensors, has the form of Hankel-type integrals.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
INSTYTUT MECHANIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 grudnia 1971 r.