ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, **19**, 2, 233—245, 1971, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa

PEWNE ROZWIĄZANIA DLA KOŁOWYCH PŁYT TRÓJWARSTWOWYCH OBCIĄŻONYCH OSIOWO-SYMETRYCZNIE

JERZY GOŁAŚ (POZNAŃ)

1. Wstęp

W pracy zajmiemy się trójwarstwową płytą kołową swobodnie podpartą na całym obwodzie, na którą działa obciążenie osiowo-symetryczne w postaci siły skupionej oraz w postaci obciążenia ciągłego.

Założymy, że płyta jest symetryczna względem swej płaszczyzny środkowej, że warstwy zewnętrzne płyty spełniają wszystkie założenia teorii tarcz i płyt izotropowych cienkich, że warstwa środkowa jest nieściśliwa i wykazuje sztywność jedynie na odkształcenia postaciowe w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej płyty.

W pracy oprzemy się na oznaczeniach i związkach podanych w pracach [1, 2, 3 i 4], w których znaleźć można równania równowagi różnej postaci dla omawianych płyt. Opracowanie niniejsze jest rozszerzeniem pracy [4], w której podane zostały rozwiązania dla obciążenia $p(r, \varphi)=\text{const}$ działającego na całym obszarze płyty.

2. Obciążenie siłą skupioną

Równania równowagi dla kołowej płyty trójwarstwowej spełniającej powyżej podane założenia, obciążonej w środku siłą skupioną $P\delta(r)/2\pi r$ prostopadłą do powierzchni środkowej płyty, mają postać

$$\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\nabla^2\right)\nabla^2\nabla^2 U(r)=\frac{P\delta(r)}{2\pi r D_z}, \qquad \left(1-\frac{1}{\mu^2}\nabla^2\right)\Theta(r)=0. \tag{2.1}$$

Przemieszczenia w, u_r, u_φ płyty, określają funkcje $U(r)$ i $\Theta(r)$ następująco:

$$\begin{aligned} w(r)&=(1-\kappa\nabla^2)\,U(r),\\ u_r(r)&=-\frac{2h+\delta}{2}\frac{\partial U(r)}{\partial r}+\frac{2h+\delta}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta(r)}{\partial\varphi},\\ u_\varphi(r)&=-\frac{2h+\delta}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial\varphi}-\frac{2h+\delta}{2}\frac{\partial\Theta(r)}{\partial r},\end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie w oznacza ugięcie płyty, jednakowe dla wszystkich warstw, u_r, u_φ przemieszczenia w płaszczyźnie środkowej warstwy dolnej odpowiednio w kierunku osi r i φ, δ grubość warstwy zewnętrznej, $2h$ grubość warstwy środkowej, κ, λ, μ współczynniki zależne od stałych materiałowych i wymiarów geometrycznych płyty oraz D_z sztywność całkowitą płyty trójwarstwowej.

W przypadku zagadnienia osiowo-symetrycznego warunki swobodnego podparcia na obwodzie płyty są następujące [4]:

$$w(a)=0, \quad m_r(a)=0, \quad N_r(a)=0, \quad u_\varphi(a)=0. \tag{2.3}$$

Rozwiązania pierwszego równania układu (2.1) poszukiwać będziemy w postaci

$$U(r)=U_0(r)+U_1(r), \tag{2.4}$$

gdzie U_0 jest całką szczególną równania niejednorodnego, a U_1 spełnia równanie

$$\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\nabla^2\right)\nabla^2\nabla^2 U_1(r)=0. \tag{2.5}$$

Rozwiązaniem równania (2.5) jest suma

$$U_1(r)=B(r)+H(r)=C_1+C_2 r^2+C_3 r^2\ln r+C_4\ln r+C_5 I_0(\lambda r)+C_6 K_0(\lambda r), \tag{2.6}$$

przy czym funkcje B i H spełniają równania

$$\nabla^2\nabla^2 B(r)=0, \qquad \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\nabla^2\right)H(r)=0.$$

Przejdźmy teraz do wyznaczenia całki szczególnej równania

$$\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\nabla^2\right)\nabla^2\nabla^2 U_0(r)=\frac{P\delta(r)}{2\pi r D_z}. \tag{2.7}$$

W tym celu wykonajmy na równaniu (2.7) transformację Hankela:

$$U_0^*(\alpha)=\int_0^\infty rU_0(r)J_0(\alpha r)\,dr \tag{2.8}$$

oraz

$$U_0(r)=\int_0^\infty \alpha U_0^*(\alpha)\,J_0(\alpha r)\,d\alpha. \tag{2.9}$$

Po wykonaniu jej otrzymamy

$$U_0^*(\alpha)=\frac{P}{2\pi D_z}\,\frac{1}{\alpha^4\left(1+\dfrac{\alpha^2}{\lambda^2}\right)}. \tag{2.10}$$

Następnie wstawiając (2.10) do wzoru (2.9) otrzymamy

$$U_0(r)=\frac{P}{2\pi D_z}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^3\left(1+\dfrac{\alpha^2}{\lambda^2}\right)}J_0(\alpha r)\,d\alpha. \tag{2.11}$$

Przekształćmy całkę (2.11) następująco:

$$U_0(r)=\frac{P}{2\pi D_z}\left[\int\limits_0^\infty \frac{1}{\alpha^3}J_0(\alpha r)\,d\alpha-\frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\alpha}J_0(\alpha r)\,d\alpha+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}J_0(\alpha r)d\alpha\right]. \tag{2.12}$$

Poszukiwane przez nas rozwiązanie uzyskamy w postaci wyraźnej, jeżeli wyznaczymy wartości całek występujących po prawej stronie wyrażenia (2.12).

Całki niewłaściwe

$$R_1=\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha}d\alpha, \qquad R_2=\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^3}d\alpha, \tag{2.13}$$

nie istnieją. Można jednak wydzielić z nich tzw. część skończoną [3, 5 i 6].

W celu przypisania wartości całkom (2.13) posłużmy się wzorem podanym w pracy [3]:

$$\text{f.p.}\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^p}d\alpha=-\frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\ldots(n-p)}\int\limits_0^\infty \varphi^{(p)}(\alpha)\ln\alpha\,d\alpha, \tag{2.14}$$

który prawdziwy jest dla funkcji $\varphi(\alpha)$ ograniczonej wraz z pochodną do rzędu p przy $\alpha\geqslant 0$ i spełniającej warunek $\varphi^{(k)}(\alpha)<A/\alpha^l$ przy $\alpha\to\infty$, $l>1$.

Wobec tego, że funkcja występująca w liczniku wyrażenia (2.13) spełnia te założenia, to wykorzystując wzór (2.14) otrzymamy [7]:

$$\begin{aligned}&\text{f.p.}\ R_1=-\ln r+\ln 2-C,\\&\text{f.p.}\ R_2=\frac{r^2}{4}\ln r-\frac{r^2}{4}(\ln 2-C),\end{aligned} \tag{2.15}$$

gdzie przez C oznaczono stałą Eulera.

Ostatnia całka występująca po prawej stronie wyrażenia (2.12) wynosi [7]

$$R_3=K_0(\lambda r). \tag{2.16}$$

Wstawiając wyrażenia (2.15) i (2.16) do związku (2.12) otrzymamy poszukiwaną przez nas całkę szczególną:

$$U_0(r)=\frac{P}{8\pi D_z}\left[r^2\ln r+\frac{4}{\lambda^2}\ln r+\frac{4}{\lambda^2}K_0(\lambda r)\right]. \tag{2.17}$$

W wyrażeniu powyższym pominięto stałą Eulera C oraz $\ln 2$, co nie wpływa na poszukiwane przez nas rozwiązanie.

Wyznaczone rozwiązanie (2.17) jest identyczne z rozwiązaniem uzyskanym w pracy [5] dla współrzędnych prostokątnych.

Ostatecznie układ równań (2.1) posiada następujące rozwiązanie:

$$
\begin{aligned}
&U(r)=\frac{P}{8\pi D_z}\Big[r^2\ln r+\frac{4}{\lambda^2}\ln r+\frac{4}{\lambda^2}K_0(\lambda r)+C_1+C_2r^2+\\
(2.18)\qquad &\qquad\qquad +C_3r^2\ln r+C_4\ln r+C_5I_0(\lambda r)+C_6K_0(\lambda r)\Big],\\
&\Theta(r)=C_7I_0(\mu r)+C_8K_0(\mu r).
\end{aligned}
$$

W przypadku płyt jednospójnych przemieszczenia w punkcie dla $r=0$ muszą posiadać wartości skończone, zatem należy przyjąć $C_3=C_4=C_6=C_8=0$. Pozostałe cztery stałe C_1, C_2, C_5 i C_7 wyznaczymy z warunków brzegowych płyty. Korzystając z warunku $(2.3)_4$ otrzymamy $C_7\,\mu I_1(\mu a)=0$; skąd $C_7=0$, ponieważ $\mu I_1(\mu a)\neq 0$. Funkcja Θ jest więc tożsamościowo równa zeru.

Podstawiając (2.18) do trzech pierwszych warunków (2.3) otrzymamy układ równań algebraicznych na wyznaczenie stałych C_1, C_2 i C_5. Po rozwiązaniu otrzymamy

$$
\begin{aligned}
&C_1=-\frac{4}{\lambda^2}\ln a+\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}a^2-2\kappa\frac{1-\nu}{1+\nu}-4(1-\kappa\lambda^2)\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\dfrac{1-\nu}{\lambda^2a^2}I_0(\lambda a)-\dfrac{1-\nu}{\lambda^2a^2}}{I_0(\lambda a)-\dfrac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)},\\
(2.19)\qquad &C_2=-\ln a-\frac{3+\nu}{2(1+\nu)},\\
&C_5=\frac{4}{\lambda^2}\,\frac{\dfrac{1-\nu}{\lambda^2a^2}-K_0(\lambda a)-\dfrac{1-\nu}{\lambda a}K_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)-\dfrac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)}.
\end{aligned}
$$

Podstawiając obliczone stałe do (2.18) otrzymamy poszukiwane rozwiązanie zagadnienia:

$$
\begin{aligned}
(2.20)\qquad U(r)=\frac{P}{8\pi D_z}\Bigg[&r^2\ln\frac{r}{a}+\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}(a^2-r^2)+\frac{4}{\lambda^2}\ln\frac{r}{a}-2\kappa\frac{1-\nu}{1+\nu}+\\
&+\frac{4}{\lambda^2}K_0(\lambda r)+\frac{4}{\lambda^2}I_0(\lambda r)\,\frac{\dfrac{1-\nu}{\lambda^2a^2}-K_0(\lambda a)-\dfrac{1-\nu}{\lambda a}K_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)-\dfrac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)}-\\
&-4(1-\kappa\lambda^2)\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\dfrac{1-\nu}{\lambda^2a^2}I_0(\lambda a)-\dfrac{1-\nu}{\lambda^2a^2}}{I_0(\lambda a)-\dfrac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Znajomość funkcji $U(r)$ pozwala na proste wyznaczenie wszystkich poszukiwanych wielkości przemieszczeń i sił wewnętrznych dla omawianego przypadku. Otrzymamy je wykorzystując zależności (2.2):

$$w=\frac{P}{16\pi D_z}\left[\frac{3+\nu}{1+\nu}(a^2-r^2)+2r^2\ln\frac{r}{a}\right]-\frac{P}{2\pi}\frac{D_k}{D_z^2}\kappa\times$$
$$\times\left\{\ln\frac{r}{a}+K_0(\lambda r)-K_0(\lambda a)+[I_0(\lambda r)-I_0(\lambda a)]\frac{\frac{1-\nu}{\lambda^2a^2}-K_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}K_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)}\right\},$$

$$u_r=-\frac{P}{8\pi}\frac{2h+\delta}{D_z}\left[r\ln\frac{r}{a}-\frac{1}{1+\nu}r+\frac{2}{\lambda^2 r}-\frac{2}{\lambda}K_1(\lambda r)+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\lambda}I_1(\lambda r)\frac{\frac{1-\nu}{\lambda^2a^2}-K_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}K_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)}\right],$$

$$u_\varphi=0\,,$$

$$N_r=\frac{E\delta}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}\right)\right]=-\frac{P}{4\pi}\frac{D_k(1+\nu)}{D_z(2h+\delta)}\ln\frac{r}{a}-$$

(2.21)
$$-\frac{P}{2\pi}\frac{D_k}{D_z(2h+\delta)}\left\{-\frac{1-\nu}{\lambda^2r^2}+K_0(\lambda r)+\frac{1-\nu}{\lambda r}K_1(\lambda r)+\right.$$
$$\left.+\left[I_0(\lambda r)-\frac{1-\nu}{\lambda r}I_1(\lambda r)\right]\frac{\frac{1-\nu}{\lambda^2a^2}-K_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}K_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)}\right\},$$

$$N_\varphi=\frac{E\delta}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}+\nu\frac{\partial u_r}{\partial r}\right]=-\frac{P}{4\pi}\frac{D_k}{D_z(2h+\delta)}\left[(1+\nu)\ln\frac{r}{a}-1+\nu\right]-$$
$$-\frac{P}{2\pi}\frac{D_k}{D_z(2h+\delta)}\left\{\frac{1-\nu}{\lambda^2r^2}+\nu K_0(\lambda r)-\frac{1-\nu}{\lambda r}K_1(\lambda r)+\right.$$
$$\left.+\left[\nu I_0(\lambda r)+\frac{1-\nu}{\lambda r}I_1(\lambda r)\right]\frac{\frac{1-\nu}{\lambda^2a^2}-K_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}K_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)}\right\},$$

(2.21) [c.d.]
$$N_{r\varphi}=\frac{E\delta}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right]=0\,,$$

$$m_r=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]=-\frac{P}{4\pi}\frac{D}{D_z}(1+\nu)\ln\frac{r}{a}+$$
$$+\frac{P}{4\pi}\frac{D_k}{D_z}\left\{-\frac{1-\nu}{\lambda^2 r^2}+K_0(\lambda r)+\frac{1-\nu}{\lambda r}K_1(\lambda r)+\right.$$
$$\left.+\left[I_0(\lambda r)-\frac{1-\nu}{\lambda r}I_1(\lambda r)\right]\frac{\frac{1-\nu}{\lambda^2 a^2}-K_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}K_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)}\right\},$$

$$m_\varphi=-D\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]=-\frac{P}{4\pi}\frac{D}{D_z}\left[(1+\nu)\ln\frac{r}{a}-1+\nu\right]+$$
$$+\frac{P}{4\pi}\frac{D_k}{D_z}\left\{\frac{1-\nu}{\lambda^2 r^2}+\nu K_0(\lambda r)-\frac{1-\nu}{\lambda r}K_1(\lambda r)+\right.$$
$$\left.+\left[\nu I_0(\lambda r)+\frac{1-\nu}{\lambda r}I_1(\lambda r)\right]\frac{\frac{1-\nu}{\lambda^2 a^2}-K_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}K_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)}\right\},$$

$$m_{r\varphi}=-(1-\nu)D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)=0\,,$$

$$q_\varphi=-D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\nabla^2 w)=0\,,$$

$$q_r=-D\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 w)=-\frac{P}{2\pi}\frac{D}{D_z}\frac{1}{r}-\frac{P}{4\pi}\frac{D_k}{D_z}\lambda K_1(\lambda r)+$$
$$+\frac{P}{4\pi}\frac{D_k}{D_z}\lambda I_1(\lambda r)\frac{\frac{1-\nu}{\lambda^2 a^2}-K_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}K_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)},$$

$$N_{rz}=-D_k\frac{d}{dr}\nabla^2 U=-\frac{P}{2\pi}\frac{D_k}{D_z}\frac{1}{r}+$$
$$+\frac{P}{2\pi}\frac{D_k}{D_z}\lambda\left[K_1(\lambda r)-I_1(\lambda r)\frac{\frac{1-\nu}{\lambda^2 a^2}-K_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}K_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)-\frac{1-\nu}{\lambda a}I_1(\lambda a)}\right],$$

$$N_{\varphi z}=0\,,$$

gdzie oznaczono

$$D_k = \frac{E\delta\,(2h+\delta)^2}{2\,(1-\nu^2)}, \qquad D_z = D_k + 2D\,, \qquad (1-\kappa\lambda^2) = -\frac{D_k}{2D}.$$

Otrzymane powyżej siły wewnętrzne dotyczą poszczególnych warstw płyty. Sumując je odpowiednio, otrzymamy przekrojowe siły wypadkowe dla całej płyty trójwarstwowej:

$$\begin{aligned} & Q_r = 2\bar{q}_r + N_{rz} = 2\left(\frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial \varphi} + q_r\right) + N_{rz} = -\frac{P}{2\pi}\,\frac{1}{r}, \\ (2.22) \qquad & M_r = N_r\,(2h+\delta) + 2m_r = -\frac{P}{4\pi}\,(1+\nu)\ln\frac{r}{a}, \\ & M_\varphi = N_\varphi\,(2h+\delta) + 2m_\varphi = -\frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{r}{a} - 1 + \nu\right]. \end{aligned}$$

Formuły (2.22) są identyczne z odpowiednimi wzorami dla izotropowych płyt cienkich.

Zbadajmy jeszcze zachowanie się ugięcia $w(r)$, gdy $r \to 0$. Biorąc pod uwagę, że dla dostatecznie małego argumentu r można stosować wzór asymptotyczny $K_0(\lambda r) \approx -\ln \lambda r$ oraz $I_0(0) = 1$, to dla granicy $r \to 0$ otrzymamy

$$\begin{aligned} (2.23) \qquad w(0) = & \frac{Pa^2}{16\pi D_z}\,\frac{3+\nu}{1+\nu} + \\ & + \frac{P}{2\pi}\,\frac{D_k}{D_z^2}\,\kappa\left\{\ln \lambda a + K_0(\lambda a) - [1 - I_0(\lambda a)]\,\frac{\dfrac{1-\nu}{\lambda^2 a^2} - K_0(\lambda a) - \dfrac{1-\nu}{\lambda a} K_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a) - \dfrac{1-\nu}{\lambda a} I_1(\lambda a)}\right\}. \end{aligned}$$

Ugięcie w punkcie przyłożenia siły skupionej ma wartość skończoną. Wzór (2.23) wyraża zarazem największe ugięcie rozważanej płyty trójwarstwowej. Można zauważyć, że wyraz pierwszy niezależny od κ jest identyczny z ugięciem płyty izotropowej o sztywności D_z, a pozostałe wyrazy są dodatkami wywołanymi strukturą warstwową płyty.

3. Obciążenie ciągłe osiowo-symetryczne

Rozpatrzmy teraz kołową płytę trójwarstwową, na którą działa obciążenie $p(r)$ ciągłe osiowo-symetryczne na całym obszarze płyty.

Mamy w tym przypadku do rozwiązania układ równań

$$(3.1) \qquad \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\nabla^2\right)\nabla^2\,\nabla^2\,U(r) = \frac{p(r)}{D_z}, \qquad \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\nabla^2\right)\Theta(r) = 0\,.$$

Całkę szczególną pierwszego równania układu (3.1) wyznaczymy posługując się metodą wariacji stałych. Metoda ta w zastosowaniu do (2.6) prowadzi do następującego układu równań algebraicznych:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dC_1}{dr}+\frac{dC_2}{dr}r^2+\frac{dC_3}{dr}r^2\ln r+\frac{dC_4}{dr}\ln r+\frac{dC_5}{dr}I_0+\frac{dC_6}{dr}K_0=0,\\
&\frac{dC_2}{dr}2r+\frac{dC_3}{dr}(2r\ln r+r)+\frac{dC_4}{dr}\frac{1}{r}+\frac{dC_5}{dr}\lambda I_1-\frac{dC_6}{dr}\lambda K_1=0,\\
&\frac{dC_2}{dr}2+\frac{dC_3}{dr}(2\ln r+3)-\frac{dC_4}{dr}\frac{1}{r^2}+\frac{dC_5}{dr}\left(\lambda^2 I_0-\frac{\lambda}{r}I_1\right)+\\
&\qquad\qquad+\frac{dC_6}{dr}\left(\lambda^2 K_0+\frac{\lambda}{r}K_1\right)=0,\\
&\frac{dC_3}{dr}\frac{2}{r}+\frac{dC_4}{dr}\frac{2}{r^3}+\frac{dC_5}{dr}\left(\lambda^3 I_1+2\frac{\lambda}{r^2}I_1-\frac{\lambda^2}{r}I_0\right)-\\
&\qquad\qquad-\frac{dC_6}{dr}\left(-\lambda^3 K_1-\frac{\lambda^2}{r}K_0-2\frac{\lambda}{r^2}K_1\right)=0,\\
&-\frac{dC_3}{dr}\frac{2}{r^2}-\frac{dC_4}{dr}\frac{6}{r^4}+\frac{dC_5}{dr}\left(\lambda^4 I_0-2\frac{\lambda^3}{r}I_1+3\frac{\lambda^2}{r^2}I_0-\right.\\
&\qquad\left.-6\frac{\lambda}{r^3}I_1\right)+\frac{dC_6}{dr}\left(\lambda^4 K_0+2\frac{\lambda^3}{r}K_1+3\frac{\lambda^2}{r^2}K_0+6\frac{\lambda}{r^3}K_1\right)=0,\\
&\frac{dC_3}{dr}\frac{4}{r^3}+\frac{dC_4}{dr}\frac{24}{r^5}+\frac{dC_5}{dr}\left(\lambda^5 I_1-2\frac{\lambda^4}{r}I_0+7\frac{\lambda^3}{r^2}I_1-\right.\\
&\qquad\left.-12\frac{\lambda^2}{r^3}I_0+24\frac{\lambda}{r^4}I_1\right)+\frac{dC_6}{dr}\left(-\lambda^5 K_1-2\frac{\lambda^4}{r}K_0-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-7\frac{\lambda^3}{r^2}K_1-12\frac{\lambda^2}{r^3}K_0-24\frac{\lambda}{r^4}K_1\right)=-\frac{p(r)}{D_z}\lambda^2 .
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Rozwiązując układ równań (3.2) względem pochodnych $dC_i(r)/dr$, $i=1,\ldots,6$, możemy poszukiwane funkcje $C_i(r)$ przedstawić w postaci:

$$
\begin{aligned}
C_1(r)&=\frac{1}{4D_z}\int p(r)\,r^3(1-\ln r)\,dr-\frac{1}{D_z\lambda^2}\int p(r)\,r\ln r\,dr,\\
C_2(r)&=-\frac{1}{4D_z}\int p(r)\,r\,(1+\ln r)\,dr,\\
C_3(r)&=\frac{1}{4D_z}\int p(r)\,r\,dr,\\
C_4(r)&=\frac{1}{4D_z}\int p(r)\,r^3\,dr+\frac{1}{D_z\lambda^2}\int p(r)\,r\,dr,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

(3.3) [c.d.]
$$C_5(r) = -\frac{1}{D_z\lambda^2}\int p(r)\, rK_0(\lambda r)\, dr,$$
$$C_6(r) = \frac{1}{D_z\lambda^2}\int p(r)\, rI_0(\lambda r)\, dr.$$

Podstawiając (3.3) do (2.6) otrzymamy poszukiwaną całkę szczególną:

$$U_0(r) = \frac{1}{4D_z}\int p(r)\, r^3(1-\ln r)\, dr - \frac{1}{D_z\lambda^2}\int p(r)\, r\ln r\, dr - \\ -\frac{r^2}{4D_z}\int p(r)\, r(1+\ln r)\, dr + \frac{r^2\ln r}{4D_z}\int p(r)\, r\, dr + \frac{\ln r}{4D_z}\int p(r)\, r^3\, dr + \\ +\frac{\ln r}{D_z\lambda^2}\int p(r)\, r\, dr - \frac{I_0(\lambda r)}{D_z\lambda^2}\int p(r)\, rK_0(\lambda r)\, dr + \frac{K_0(\lambda r)}{D_z\lambda^2}\int p(r)\, rI_0(\lambda r)\, dr. \tag{3.4}$$

Zatem rozwiązaniem układu równań zagadnienia (3.1) jest suma funkcji wyrażonych wzorami (2.6) i (3.4) oraz funkcja Θ przedstawiona wzorem (2.8):

$$U(r) = \frac{1}{4D_z}\int p(r)\, r^3(1-\ln r)\, dr - \frac{1}{D_z\lambda^2}\int p(r)\, r\ln r\, dr - \\ -\frac{r^2}{4D_z}\int p(r)\, r(1+\ln r)\, dr + \frac{r^2\ln r}{4D_z}\int p(r)\, r\, dr + \\ +\frac{\ln r}{4D_z}\int p(r)\, r^3\, dr + \frac{\ln r}{D_z\lambda^2}\int p(r)\, r\, dr - \frac{I_0(\lambda r)}{D_z\lambda^2}\int p(r)\, rK_0(\lambda r)\, dr + \\ +\frac{K_0(\lambda r)}{D_z\lambda^2}\int p(r)\, rI_0(\lambda r)\, dr + C_1 + C_2 r^2 + C_3 r^2\ln r + C_4\ln r + \\ + C_5 I_0(\lambda r) + C_6 K_0(\lambda r), \tag{3.5}$$
$$\Theta(r) = C_7 I_0(\mu r) + C_8 K_0(\mu r).$$

Wielkości przemieszczeń w, u_r, u_φ otrzymamy podstawiając rozwiązania (3.5) do wzorów (2.2):

$$w = U_0 - \kappa\left(\frac{d^2U_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dU_0}{dr}\right) + C_1 + C_2(r^2-4\kappa) + C_3\,[r^2\ln r - \\ -4\kappa(1+\ln r)] + C_4\ln r + C_5(1-\kappa\lambda^2)\, I_0(\lambda r) + C_6(1-\kappa\lambda^2)\, K_0(\lambda r),$$
$$u_r = -\frac{2h+\delta}{2}\left[\frac{dU_0}{dr} + 2C_2 r + C_3 r(2\ln r+1) + C_4\frac{1}{r} + \\ + C_5\lambda I_1(\lambda r) - C_6\lambda K_1(\lambda r)\right], \tag{3.6}$$
$$u_\varphi = -\frac{2h+\delta}{2}\,[C_7\mu I_1(\mu r) - C_8\mu K_1(\mu r)].$$

Natomiast wielkości sił statycznych otrzymamy, wykorzystując wzory (3.6):

$$N_r = \frac{E\delta}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right)\right] = -\frac{E\delta(2h+\delta)}{2(1-\nu^2)}\left\{\frac{d^2U_0}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dU_0}{dr} + \right.$$
$$+2(1+\nu)C_2 + [2(1+\nu)\ln r + 3 + \nu]C_3 - (1-\nu)\frac{1}{r^2}C_4 + \left[\lambda^2 I_0(\lambda r) - \right.$$
$$\left.\left. -(1-\nu)\frac{\lambda}{r}I_1(\lambda r)\right]C_5 + \left[\lambda^2 K_0(\lambda r) + (1-\nu)\frac{\lambda}{r}K_1(\lambda r)\right]C_6\right\},$$

$$N_\varphi = \frac{E\delta}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \nu\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) = -\frac{E\delta(2h+\delta)}{2(1-\nu^2)}\left\{\nu\frac{d^2U_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_0}{dr} + \right.$$
$$+2(1+\nu)C_2 + [2(1+\nu)\ln r + 1 + 3\nu]C_3 + (1-\nu)\frac{1}{r^2}C_4 + \left[\nu\lambda^2 I_0(\lambda r) + \right.$$
$$\left.\left. +(1-\nu)\frac{\lambda}{r}I_1(\lambda r)\right]C_5 + \left[\nu\lambda^2 K_0(\lambda r) - (1-\nu)\frac{\lambda}{r}K_1(\lambda r)C_6\right\},$$

$$N_{r\varphi} = \frac{E\delta}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right) = -\frac{E\delta(2h+\delta)}{2(1+\nu)}\left\{\left[\mu^2 I_0(\mu r) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -2\frac{\mu}{r}I_1(\mu r)\right]C_7 + \left[\mu^2 K_0(\mu r) + 2\frac{\mu}{r}K_1(\mu r)\right]C_8\right\},$$

(3.7)

$$m_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] = -D\left\{-\kappa\frac{d^4U_0}{dr^4} - \right.$$
$$-\frac{(1+\nu)\kappa}{r}\frac{d^3U_0}{dr^3} + \left[1 + \frac{\kappa}{r^2}(2-\nu)\right]\frac{d^2U_0}{dr^2} +$$
$$+\left[\frac{\nu}{r} - \frac{\kappa}{r^3}(2-\nu)\right]\frac{dU_0}{dr} + 2(1+\nu)C_2 + \left[2(1+\nu)\ln r + 3 + \nu + \right.$$
$$\left. +\frac{4\kappa}{r^2}(1-\nu)\right]C_3 - \frac{1-\nu}{r^2}C_4 + (1+\kappa\lambda^2)\left[\lambda^2 I_0(\lambda r) - \right.$$
$$\left.\left. -(1-\nu)\frac{\lambda}{r}I_1(\lambda r)\right]C_5 + (1-\kappa\lambda^2)\left[\lambda^2 K_0(\lambda r) + (1-\nu)\frac{\lambda}{r}K_1(\lambda r)\right]C_6\right\},$$

$$m_\varphi = -D\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) = -D\left\{-\nu\kappa\frac{d^4U_0}{dr^4} - \right.$$
$$-\frac{(1+\nu)\kappa}{r}\frac{d^3U_0}{dr^3} + \left[\nu + \frac{\kappa}{r^2}(2\nu-1)\right]\frac{d^2U_0}{dr^2} +$$
$$+\left[\frac{1}{r} - \frac{\kappa}{r^3}(2\nu-1)\right]\frac{dU_0}{dr} + 2(1+\nu)C_2 + \left[2(1+\nu)\ln r + 3\nu + 1 - \right.$$

(3.7) [c.d.]

$$-\frac{4\kappa}{r^2}(1-\nu)\bigg]C_3+\frac{1-\nu}{r^2}C_4+(1-\kappa\lambda^2)\bigg[\nu\lambda^2 I_0(\lambda r)+$$

$$+(1-\nu)\frac{\lambda}{r}I_1(\lambda r)\bigg]C_5+(1-\kappa\lambda^2)\bigg[\nu\lambda^2 K_0(\lambda r)-(1-\nu)\frac{\lambda}{r}K_1(\lambda r)\bigg]C_6\bigg\},$$

$$m_{r\varphi}=-(1-\nu)D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)=0,$$

$$q_r=-D\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 w)=-D\bigg\{-\kappa\frac{d^5U_0}{dr^5}-\frac{2\kappa}{r}\frac{d^4U_0}{dr^4}+\left(1+\frac{3\kappa}{r^2}\right)\frac{d^3U_0}{dr^3}+$$

$$+\frac{1}{r}\left(1-\frac{3\kappa}{r^2}\right)\frac{d^2U_0}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{3\kappa}{r^2}\right)\frac{dU_0}{dr}+\frac{4}{r}C_3+$$

$$+(1-\kappa\lambda^2)\lambda^3 I_1(\lambda r)C_5-(1-\kappa\lambda^2)\lambda^3K_1(\lambda r)C_6\bigg\},$$

$$q_\varphi=-D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\nabla^2 w)=0,$$

$$N_{rz}=G_w(2h+\delta)\left(\frac{u_r}{h}+\frac{2h+\delta}{2h}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=-\frac{G_w(2h+\delta)^2\kappa}{2h}\bigg[\frac{d^3U_0}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2U_0}{dr^2}-$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dU_0}{dr}+\frac{4}{r}C_3+\lambda^3I_1(\lambda r)C_5-\lambda^3K_1(\lambda r)C_6\bigg],$$

$$N_{\varphi z}=G_w(2h+\delta)\left(\frac{u_\varphi}{h}+\frac{2h+\delta}{2h}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=-\frac{G_w(2h+\delta)^2\mu}{2h}[I_1(\mu r)C_7-K_1(\mu r)C_8],$$

gdzie funkcja $U_0(r)$ określona jest wzorem (3.4).

W przypadku płyt z otworem przyjąć należy pełne rozwiązania (3.5), (3.6) i (3.7). Osiem stałych $C_1, \ldots, C_8$ trzeba wyznaczyć z ośmiu warunków brzegowych, z czterech na brzegu wewnętrznym i czterech na brzegu zewnętrznym.

Dla płyt jednospójnych (ponieważ przemieszczenia i siły statyczne rosną nieograniczenie, gdy $r\to 0$) stałe C_3, C_4, C_6 i C_8 przyjmują wartość zera.

Z warunku brzegowego $(2.3)_4$ otrzymamy, podobnie jak w punkcie 2 niniejszej pracy, dla obciążenia siłą skupioną, że $C_7=0$, zatem funkcja Θ i przemieszczenie u_φ równają się zeru na całym obszarze płyty.

Wyprowadzone powyżej wzory odnoszą się do dowolnego obciążenia osiowo-symetrycznego. Łatwo z nich otrzymać rozwiązania dla szczególnego przypadku obciążenia, np. $p=\text{const}$ [4]. Ze wzoru (3.5) otrzymamy w tym przypadku

$$U(r)=\frac{pr^4}{64D_z}+\frac{pr^2}{4D_z\lambda^2}+\frac{p}{D_z\lambda^4}+C_1+C_2r^2+C_5I_0(\lambda r)= \tag{3.8}$$

$$=\frac{pr^4}{64D_z}+\bar{C}_1+\bar{C}_2r^2+C_5I_0(\lambda r).$$

Stałe $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ i C_5 wyznaczymy z trzech pierwszych warunków brzegowych (2.3). Wynoszą one

$$\bar{C}_1 = \frac{5+\nu}{1+\nu}\frac{pa^4}{64D_z} + C_1^*,$$

(3.9)
$$\bar{C}_2 = -\frac{3+\nu}{1+\nu}\frac{pa^2}{32D_z} + C_2^*,$$

$$C_5 = C_5^* = -\frac{1+\nu}{2}\frac{p}{D_z\lambda^3}\frac{a}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu) I_1(\lambda a)},$$

gdzie przez C_i^* oznaczono następujące dodatki charakterystyczne dla rozpatrywanych płyt trójwarstwowych:

$$C_1^* = -\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{pa^2}{8D_z}\kappa + \frac{p}{2D_z\lambda^2}\left[\frac{1}{\lambda}\frac{(1+\nu)(1-\kappa\lambda^2)aI_0(\lambda a)}{\lambda a I_0(\lambda a)-(1-\nu) I_1(\lambda a)} + 2\kappa - \frac{a^2}{2}\right],$$

$$C_2^* = \frac{p}{4D_z\lambda^2}.$$

Przyjęcie $C_1^* = C_2^* = C_5^* = 0$ sprowadza zagadnienie do płyt zwykłych [1].

Przemieszczenia i siły statyczne wyznaczyć można ze związków (3.6) i (3.7), gdzie za funkcję $U_0(r)$ należy podstawić $U_0 = pr^4/64D_z$, a zamiast stałych wyrażenia (3.9). Wzory na powyższe wielkości dla rozpatrywanego przypadku obciążenia p=const podano w pracy [4].

Literatura cytowana w tekście

1. J. Wachowiak, P. Wilde, *Wolnopodparte prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inżyn. Lądow., 1, 1966.
2. H. Mikołajczak, *Zagadnienia nieciągłych warunków brzegowych dla prostokątnych płyt trójwarstwowych*, rozp. habil., roczniki WSR w Poznaniu, dodatek 12, 1965.
3. R. Ganowicz, *Wybrane zagadnienia teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych*, Mech. Teoret. i Stos., **4**, 3, 1966.
4. H. Mikołajczak, J. Gołaś, *Trójwarstwowa płyta kołowa obciążona osiowo-symetrycznie*, Pozn. Tow. Przyj. Nauk, **2**, 6, 1969.
5. R. Ganowicz, *Rozwiązania osobliwe w ogólnej teorii płyt trójwarstwowych*, Mech. Teoret. i Stos., **5**, 3, 1967.
6. W. Nowacki, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
7. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1962.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНОК ПОД ВЛИЯНИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

В работе дается решение для трехслойных круговых пластинок свободно опертых по всей окружности, подверженных действию осесимметрической нагрузки. Рассматривается нагрузка сосредоточенной силой и непрерывная нагрузка на всей области пластинки. Предполагается, что пластинка симметрична по отношению своей серединой плоскости и что внешние слои удовлетворяют всем предположениям теории тонких изотропных дисков и пластинок, а серединный слой является несжимаемым и проявляет, единственно, жесткость на формоизменение в перпендикулярном направлении серединой поверхности пластинки.

Summary

CERTAIN SOLUTIONS FOR CIRCULAR THREE-LAYER PLATES UNDER AXIALLY-SYMMETRICAL LOAD

Solutions are given in this paper for three-layer circular plates freely supported on the whole circumference, subjected to the action of an axially-symmetrical load. A loading by condensed force and continuous load over the entire region of the plate is considered. It is assumed that the plate is symmetrical with respect to its central plane, that the external layers of the plate satisfy all the assumptions of the theory of shields and thin isotropic plates, and that the central layer is incompressible and exhibits only rigidity to deformations of shape in the direction normal to the surface on the central plate.

WYŻSZA SZKOŁA ROLNICZA
POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 czerwca 1970 r.