ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 19, 2, 371—378, 1971, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa

ZGINANIE MIKROPOLARNEJ BELKI WSPORNIKOWEJ OBCIĄŻONEJ MOMENTAMI

D. IEŞAN (IASSY)

1. Wstęp

W pracy rozpatrzono zagadnienie zginania belki jednorodnej i izotropowej momentami działającymi na jej końcach w ramach liniowej teorii sprężystości ciał mikropolarnych. Odpowiedni dobór osi Ox_3 pozwala rozwiązać zagadnienie zginania mikropolarnej belki sprężystej niezależnie od problemu rozciągania takiej belki siłami podłużnymi.

2. Równania podstawowe

W całej pracy stosuje się prostokątny układ współrzędnych Ox_k $(k=1, 2, 3)$. Niech V oznacza obszar przestrzeni zajęty przez mikropolarne ciało sprężyste o granicy S. Zakładamy, że w ciele nie działają siły ani momenty masowe.

Podstawowe równania statyki jednorodnych i izotropowych ciał sprężystych mikropolarnych mają następującą postać [1 i 2]:

równania równowagi

$$t_{ji,j}=0, \qquad m_{ji,j}+\epsilon_{imn}t_{mn}=0, \tag{2.1}$$

równania konstytutywne

$$\begin{aligned} t_{ij}&=\lambda\varepsilon_{rr}\delta_{ij}+(\mu+\kappa)\varepsilon_{ij}+\mu\varepsilon_{ji}, \\ m_{ij}&=\alpha\varphi_{r,r}\delta_{ij}+\beta\varphi_{i,j}+\gamma\varphi_{j,i}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

oraz związki geometryczne

$$\varepsilon_{ij}=u_{j,i}+\epsilon_{jim}\varphi_m. \tag{2.3}$$

W równaniach powyższych zastosowano następujące oznaczenia: t_{ij} są to składowe tensora naprężenia, m_{ij} składowe tensora naprężeń momentowych, u_i składowe wektora przemieszczenia, φ_i składowe wektora mikroobrotów, ε_{ij} składowe mikropolarnego tensora odkształcenia, δ_{ij} delta Kroneckera, ϵ_{ijk} symbol permutacyjny, $\lambda, \mu, \kappa, \alpha, \beta, \gamma$ charakterystyczne stałe materiałowe; przecinkiem oznaczono różniczkowanie cząstkowe względem zmiennej x_i.

Siły i momenty powierzchniowe (napięcia) działające w punkcie $x\,(x_k)$ na powierzchni S wyrażają się wzorami

$$t_i=t_{ji}n_j, \qquad m_i=m_{ji}n_j, \tag{2.4}$$

gdzie $n_j=\cos(n_x, x_j)$, n_x zaś jest wektorem jednostkowym normalnej zewnętrznej do powierzchni S w punkcie x.

3. Zginanie belek momentami przyłożonymi na końcach

Rozpatrzmy pryzmatyczną belkę wykonaną z jednorodnego i izotropowego, mikropolarnego materiału sprężystego, ograniczoną płaszczyznami prostopadłymi do tworzących. Belka ma długość l, a jej przekrój poprzeczny Σ jest obszarem jednospójnym i ograniczonym zamkniętą krzywą Lapunowa L.

Zakładamy znikanie sił i momentów masowych; powierzchnia boczna belki jest swobodna od obciążeń siłami i momentami. Belka jest na jednym końcu utwierdzona, a na drugim końcu obciążona momentami M i $-M$ w płaszczyznach osi współrzędnych.

Osie układu odniesienia Ox_1 i Ox_2 przyjmujemy w płaszczyźnie swobodnego końca belki, oś Ox_3 jest skierowana równolegle do tworzących i do wnętrza materiału.

W płaszczyźnie $x_3=0$ mamy następujące warunki brzegowe:

$$\int_\Sigma t_{31}\,d\sigma=0, \quad \int_\Sigma t_{32}\,d\sigma=0, \quad \int_\Sigma t_{33}\,d\sigma=0,$$

$$\int_\Sigma (x_2 t_{33}+m_{31})\,d\sigma=-M_1, \quad \int_\Sigma (x_1 t_{33}-m_{32})\,d\sigma=M_2, \tag{3.1}$$

$$\int_\Sigma (x_1 t_{32}-x_2 t_{31}+m_{33})\,d\sigma=0,$$

gdzie M_1 i M_2 są składowymi momentu M w kierunkach osi Ox_1 i Ox_2.

Siła i moment wypadkowy działające na każdy przekrój poprzeczny spełniają warunki równowagi, tak więc warunki (3.1) powinny być spełnione dla $x_3=h$ $(0\leqslant h\leqslant l)$.

Na powierzchni bocznej belki mamy następujące warunki

$$t_{\alpha k} n_\alpha=0, \quad m_{\alpha k} n_\alpha=0, \quad k=1,2,3, \quad \alpha=1,2. \tag{3.2}$$

Zagadnienie sprowadza się teraz do rozwiązania równań (2.1) - (2.3) z warunkami (3.1).

Posługując się wynikami prac [3 i 4] staramy się znaleźć rozwiązanie zagadnienia w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{1}{2} a_1 (x_3^2+\nu x_1^2-\nu x_2^2)-a_2 \nu x_1 x_2+a_1 v_1^{(1)}(x_1,x_2)+a_2 v_1^{(2)}(x_1,x_2),\\
u_2 &= -a_1 \nu x_1 x_2-\frac{1}{2} a_2 (x_3^2-\nu x_1^2+\nu x_2^2)+a_1 v_2^{(1)}(x_1,x_2)+a_2 v_2^{(2)}(x_1,x_2),\\
u_3 &= (a_1 x_1+a_2 x_2) x_3,\\
\varphi_1 &= a_2 x_3,\\
\varphi_2 &= -a_1 x_3,\\
\varphi_3 &= -a_1 \nu x_2+a_2 \nu x_1+a_1 w^{(1)}(x_1,x_2)+a_2 w^{(2)}(x_1,x_2),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

gdzie $v_\alpha^{(\beta)}(x_1, x_2)$, $w^{(\beta)}(x_1, x_2)$, $(\alpha, \beta = 1, 2)$ są nieznanymi funkcjami, a stałe a_α $(\alpha = 1, 2)$ zostaną określone w dalszej części pracy.

We wzorze (3.3) zastosowaliśmy oznaczenie

$$\nu = \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu + \kappa}. \tag{3.4}$$

Ze wzorów (2.3) i (3.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = -\nu(a_1 x_1 + a_2 x_2) + a_1 \varepsilon_{11}^{(1)} + a_2 \varepsilon_{11}^{(2)},\\
&\varepsilon_{22} = -\nu(a_1 x_1 + a_2 x_2) + a_1 \varepsilon_{22}^{(1)} + a_2 \varepsilon_{22}^{(2)},\\
&\varepsilon_{12} = a_1 \varepsilon_{12}^{(1)} + a_2 \varepsilon_{12}^{(2)}, \quad \varepsilon_{21} = a_1 \varepsilon_{21}^{(1)} + a_2 \varepsilon_{21}^{(2)},\\
&\varepsilon_{33} = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

gdzie

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(\rho)} = v_{\beta,\alpha}^{(\rho)} + \epsilon_{\beta\alpha 3} w^{(\rho)}, \quad \alpha, \beta, \rho = 1, 2. \tag{3.6}$$

Wstawiając (3.5) do (2.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&t_{\alpha\beta} = a_1 \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} + a_2 \sigma_{\alpha\beta}^{(2)},\\
&t_{33} = E(a_1 x_1 + a_2 x_2) + \lambda(a_1 v_{\rho,\rho}^{(1)} + a_2 v_{\rho,\rho}^{(2)}), \quad \alpha, \beta, \rho = 1, 2,\\
&t_{13} = t_{31} = t_{23} = t_{32} = 0,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

gdzie

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(\rho)} = \lambda v_{\eta,\eta}^{(\rho)} \delta_{\alpha\beta} + (\mu + \kappa) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\rho)} + \mu \varepsilon_{\beta\alpha}^{(\rho)}, \quad \alpha, \beta, \eta, \rho = 1, 2 \tag{3.8}$$

i gdzie użyto oznaczenia

$$E = \frac{(2\mu + \kappa)(3\lambda + 2\mu + \kappa)}{2\lambda + 2\mu + \kappa}. \tag{3.9}$$

Z równań (2.2) i (3.6) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&m_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad m_{33} = 0,\\
&m_{13} = a_2(\beta + \gamma\nu) + a_1 \mu_{13}^{(1)} + a_2 \mu_{13}^{(2)},\\
&m_{31} = a_2(\beta\nu + \gamma) + a_1 \mu_{31}^{(1)} + a_2 \mu_{31}^{(2)},\\
&m_{23} = -a_1(\beta + \gamma\nu) + a_1 \mu_{23}^{(1)} + a_2 \mu_{23}^{(2)},\\
&m_{32} = -a_1(\beta\nu + \gamma) + a_1 \mu_{32}^{(1)} + a_2 \mu_{32}^{(2)},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

gdzie

$$\mu_{\alpha 3}^{(\rho)} = \gamma w_{,\alpha}^{(\rho)}, \quad \mu_{3\alpha}^{(\rho)} = \beta w_{,\alpha}^{(\rho)}, \quad \alpha, \rho = 1, 2. \tag{3.11}$$

Równania równowagi (2.1) sprowadzają się [po uwzględnieniu związków (3.7) i (3.10)] do postaci

$$t_{\alpha\beta,\alpha} = 0, \quad m_{\alpha 3,\alpha} + t_{12} - t_{21} = 0, \tag{3.12}$$

a warunki brzegowe (3.5) przybierają postać

$$t_{\alpha\beta} n_\alpha = 0, \quad m_{\alpha 3} n_\alpha = 0 \quad \text{na } L. \tag{3.13}$$

Równania równowagi (3.12) i warunki brzegowe (3.13) będą spełnione pod warunkiem spełnienia równań

$$\begin{aligned} &\sigma^{(\rho)}_{\alpha\beta,\alpha} = 0, \\ &\mu^{(\rho)}_{\alpha 3,\alpha} + \sigma^{(\rho)}_{12} - \sigma^{(\rho)}_{21} = 0, \quad \alpha, \beta, \rho = 1, 2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

oraz warunków brzegowych

$$\begin{aligned} &\sigma^{(1)}_{\alpha\beta} n_\alpha = 0, \quad \sigma^{(2)}_{\alpha\beta} n_\alpha = 0, \\ &\mu^{(1)}_{\alpha 3} n_\alpha = (\beta + \gamma\nu) n_2, \quad \mu^{(2)}_{\alpha 3} n_\alpha = -(\beta + \gamma\nu) n_1 \quad \text{na } L. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Tak więc funkcje $v^{(\rho)}_\alpha (x_1, x_2)$, $w^{(\rho)} (x_1, x_2)$ są rozwiązaniem (3.6), (3.8), (3.11), (3.14) i (3.15) dla płaskiego stanu odkształceń ciał mikropolarnych.

Zagadnienie płaskiego stanu odkształcenia ośrodka mikropolarnego było przedmiotem pracy [5]. Warunkiem koniecznym i dostatecznym rozwiązania zagadnień (3.6), (3.8), (3.11), (3.14), (3.15) jest spełnienie warunków [5]

$$\int_L (\beta + \gamma\nu) n_\alpha \, ds = 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{3.16}$$

Warunki te są oczywiście spełnione.

W dalszej części pracy założymy, że funkcje $v^{(\rho)}_\alpha (x_1, x_2)$ i $w^{(\rho)} (x_1, x_2)$ są znane.

Warunki $(3.1)_1$ i $(3.1)_4$ są tożsamościowo spełnione na podstawie wzorów (3.7) i (3.10).

Z równań $(3.1)_2$, $(3.1)_3$ oraz (3.7), (3.10) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &K_1 a_1 + K_2 a_2 = 0, \\ &L_{11} a_1 + L_{12} a_2 = M_2, \\ &L_{21} a_1 + L_{22} a_2 = -M_1, \end{aligned} \tag{3.17}$$

gdzie

$$\begin{aligned} &K_1 = \int_\Sigma (E x_1 + \lambda v^{(1)}_{\rho,\rho}) \, d\sigma, \quad K_2 = \int_\Sigma (E x_2 + \lambda v^{(2)}_{\rho,\rho}) \, d\sigma, \\ &L_{11} = \int_\Sigma [x_1 (E x_1 + \lambda v^{(1)}_{\rho,\rho}) - \beta w^{(1)}_{,2} + \beta\nu + \gamma] \, d\sigma, \\ &L_{12} = \int_\Sigma [x_1 (E x_2 + \lambda v^{(2)}_{\rho,\rho}) - \beta w^{(2)}_{,2}] \, d\sigma, \\ &L_{21} = \int_\Sigma [x_2 (E x_1 + \lambda v^{(1)}_{\rho,\rho}) + \beta w^{(1)}_{,1}] \, d\sigma, \\ &L_{22} = \int_\Sigma [x_2 (E x_2 + \lambda v^{(2)}_{\rho,\rho}) + \beta w^{(2)}_{,1} + \beta\nu + \gamma] \, d\sigma. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Rozważmy teraz transformację

$$x_1' = x_1 - x_1^0, \quad x_2' = x_2 - x_2^0. \tag{3.19}$$

Wielkości K_1 i K_2 w nowym układzie odniesienia oznaczamy przez K_1' i K_2'. Ze związków (3.18) i (3.19) otrzymujemy

$$K_1' = -EA\,x_1^0 + K_1, \quad K_2' = -EAx_2^0 + K_2, \tag{3.20}$$

gdzie A jest polem powierzchni przekroju poprzecznego.

Dobieramy następnie x_1^0 i x_2^0 w ten sposób, aby

$$K_1' = 0, \quad K_2' = 0. \tag{3.21}$$

Z równań (3.20) i (3.21) otrzymujemy

$$x_1^0 = \frac{K_1}{EA}, \quad x_2^0 = \frac{K_2}{EA}. \tag{3.22}$$

Jeśli x_1^0 i x_2^0 przyjmują powyższe wartości, to pierwszy ze związków (3.17) odniesiony do nowych osi współrzędnych jest spełniony tożsamościowo.

W dalszej części pracy zakładamy, że przekształcenie (3.19), w którym x_1^0 i x_2^0 przyjmują wartości (3.22), zostało wykonane od samego początku i nowy układ współrzędnych będziemy oznaczać przez $Ox_1\,x_2\,x_3$.

W tej sytuacji związki (3.17) redukują się do postaci

$$\begin{aligned} L_{11}\,a_1 + L_{12}\,a_2 &= M_2, \\ L_{21}\,a_1 + L_{22}\,a_2 &= -M_1. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Wykażemy, że liniowe równania (3.23) określają stałe a_1 i a_2. Zakładamy, że gęstość energii wewnętrznej [2]

$$\begin{aligned} 2U(u, \varphi) = t_{ij}\,\varepsilon_{ij} + m_{ij}\,\varphi_{j,i} = \lambda\varepsilon_{kk}\,\varepsilon_{ll} + (\mu+\kappa)\,\varepsilon_{kl}\,\varepsilon_{kl} + \\ + \mu\varepsilon_{kl}\,\varepsilon_{lk} + \alpha\varphi_{k,k}\,\varphi_{l,l} + \beta\varphi_{k,l}\,\varphi_{l,k} + \gamma\varphi_{k,l}\,\varphi_{k,l} \end{aligned} \tag{3.24}$$

jest dodatnio określoną formą kwadratową.

Rozpatrzmy dwie sprężyste konfiguracje u_i', φ_i', ε_{ij}', t_{ij}', m_{ij}' oraz u_i'', φ_i'', ε_{ij}'', t_{ij}'', m_{ij}''. Jeśli zauważymy, że

$$2U(u', \varphi'; u'', \varphi'') = t_{ij}'\,\varepsilon_{ij}'' + m_{ij}'\,\varphi_{j,i}'', \tag{3.25}$$

to otrzymujemy

$$\begin{aligned} U(u', \varphi'; u'', \varphi'') &= U(u'', \varphi''; u'\,\varphi'), \\ U(u, \varphi; u, \varphi) &= U(u, \varphi). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Wiadomo z prac [6, 7], że

$$\begin{aligned} &\int_S (t_i'\,u_i'' + m_i'\,\varphi_i'')\,d\sigma = \int_S (t_i''\,u_i' + m_i''\,\varphi_i')\,d\sigma = 2\int_V U(u', \varphi'; u'', \varphi'')\,d\tau, \\ &\int_S (t_i\,u_i + m_i\,\varphi_i)\,d\sigma = 2\int_V U(u, \varphi)\,d\tau, \end{aligned} \tag{3.27}$$

gdzie wielkości t_i i m_i są dane wzorami (2.4).

Równania (3.3), (3.7) i (3.10) można napisać w postaci

$$
u_i = a_1 u_i^{(1)} + a_2 u_i^{(2)}, \qquad \varphi_i = a_1 \varphi_i^{(1)} + a_2 \varphi_i^{(2)},
$$
$$
t_{ij} = a_1 t_{ij}^{(1)} + a_2 t_{ij}^{(2)}, \qquad m_{ij} = a_1 m_{ij}^{(1)} + a_2 m_{ij}^{(2)}, \tag{3.28}
$$

gdzie

$$
u_1^{(1)} = -\frac{1}{2}(x_3^2 + \nu x_1^2 - \nu x_2^2) + v_1^{(1)}, \qquad u_2^{(1)} = -\nu x_1 x_2 + v_2^{(1)}, \qquad u_3^{(1)} = x_1 x_3,
$$
$$
\varphi_1^{(1)} = 0, \qquad \varphi_2^{(1)} = -x_3, \qquad \varphi_3^{(1)} = -\nu x_2 + w^{(1)},
$$
$$
u_1^{(2)} = -\nu x_1 x_2 + v_1^{(2)}, \qquad u_2^{(2)} = -\frac{1}{2}(x_3^2 - \nu x_1^2 + \nu x_2^2) + v_2^{(2)}, \qquad u_3^{(2)} = x_2 x_3,
$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1^{(2)} = x_3, \qquad \varphi_2^{(2)} = 0, \qquad \varphi_3^{(2)} = \nu x_1 + w^{(2)},\\
&t_{\alpha\beta}^{(1)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}, \qquad t_{33}^{(1)} = E x_1 + \lambda v_{\rho,\rho}^{(1)}, \qquad t_{\alpha 3}^{(1)} = t_{3\alpha}^{(1)} = 0,\\
&t_{\alpha\beta}^{(2)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}, \qquad t_{33}^{(2)} = E x_2 + \lambda v_{\rho,\rho}^{(2)}, \qquad t_{\alpha 3}^{(2)} = t_{3\alpha}^{(2)} = 0,\\
&m_{\alpha\beta}^{(1)} = m_{\alpha\beta}^{(2)} = m_{33}^{(1)} = m_{33}^{(2)} = 0,\\
&m_{13}^{(1)} = \gamma w_{,1}^{(1)}, \qquad m_{31}^{(1)} = \beta w_{,1}^{(1)}, \qquad m_{23}^{(1)} = \gamma w_{,2}^{(1)} - \beta - \gamma\nu, \qquad m_{32}^{(1)} = \beta w_{,2}^{(1)} - \beta\nu - \gamma,\\
&m_{13}^{(2)} = \gamma w_{,1}^{(2)} + \beta + \gamma\nu, \qquad m_{31}^{(2)} = \beta w_{,1}^{(2)} + \beta\nu + \gamma, \qquad m_{23}^{(2)} = \gamma w_{,2}^{(2)}, \qquad m_{32}^{(2)} = \beta w_{,2}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Łatwo wykazać, że

$$
2U(u,\varphi) = a_1^2 U(u^{(1)}, \varphi^{(1)}) + 2a_1 a_2 U(u^{(1)}, \varphi^{(1)}; u^{(2)}, \varphi^{(2)}) + a_2^2 U(u^{(2)}, \varphi^{(2)}). \tag{3.30}
$$

Energia wewnętrzna wynosi

$$
W = \int_V U(u,\varphi)\, d\tau = a_1^2 W_{11} + 2a_1 a_2 W_{12} + a_2^2 W_{22}, \tag{3.31}
$$

gdzie

$$
W_{11} = \int_V U(u^{(1)}, \varphi^{(1)})\, d\tau,
$$
$$
W_{12} = \int_V U(u^{(1)}, \varphi^{(1)}; u^{(2)}, \varphi^{(2)})\, d\tau, \qquad W_{22} = \int_V U(u^{(2)}, \varphi^{(2)})\, d\tau. \tag{3.32}
$$

Ponieważ energia wewnętrzna ma postać dodatnio określonej formy kwadratowej, to

$$
W_{11} W_{22} - W_{12}^2 > 0. \tag{3.33}
$$

Stosujemy teraz wzory (3.27) do konfiguracji $u_i^{(\alpha)}$, $\varphi_i^{(\alpha)}$, ..., $m_{ij}^{(\alpha)}$. Na powierzchni $x_3 = l$ mamy

$$
t_1^{(\alpha)} = t_2^{(\alpha)} = 0, \qquad t_3^{(\alpha)} = t_{33}^{(\alpha)}, \qquad m_1^{(\alpha)} = m_{31}^{(\alpha)}, \qquad m_2^{(\alpha)} = m_{32}^{(\alpha)}, \qquad m_3^{(\alpha)} = 0,
$$
$$
u_3^{(1)} = l x_1, \qquad \varphi_1^{(1)} = 0, \qquad \varphi_2^{(1)} = -l, \tag{3.34}
$$
$$
u_3^{(2)} = l x_2, \qquad \varphi_1^{(2)} = l, \qquad \varphi_2^{(2)} = 0, \qquad \alpha = 1, 2,
$$

a na powierzchni $x_3 = 0$

$$
t_1^{(\alpha)} = t_2^{(\alpha)} = 0, \qquad u_3^{(\alpha)} = 0, \qquad \varphi_1^{(\alpha)} = \varphi_2^{(\alpha)} = 0, \qquad m_3^{(\alpha)} = 0, \qquad \alpha = 1, 2. \tag{3.35}
$$

Biorąc pod uwagę warunki brzegowe (3.2) i związki (3.29), (3.34), (3.35) otrzymujemy ze wzorów $(3.27)_2$ i (3.32)

$$2W_{11} = lL_{11}, \quad 2W_{22} = lL_{22}. \tag{3.36}$$

Jeśli zastosujemy wzór $(3.27)_1$ dla $u_i' = u_i^{(1)}$, $\varphi_i' = \varphi_i^{(1)}$ oraz $u_i'' = u_i^{(2)}$, $\varphi_i'' = \varphi_i^{(2)}$ i wykorzystamy zależności (3.29) i (3.32), to otrzymamy

$$2W_{12} = lL_{12} = lL_{21}. \tag{3.37}$$

Ze związków (3.33), (3.36) i (3.40) wynika, że

$$d = L_{11}L_{22} - L_{12}^2 \neq 0; \tag{3.38}$$

tak więc ze wzoru (3.23) uzyskujemy ostatecznie

$$a_1 = \frac{1}{d}(L_{22}M_2 + L_{12}M_1), \quad a_2 = -\frac{1}{d}(L_{11}M_1 + L_{12}M_2). \tag{3.39}$$

W ten sposób wykazaliśmy, że rozwiązanie naszego problemu ma postać (3.3), przy czym funkcje $v_\alpha^{(\rho)}(x_1, x_2)$, $w^{(\rho)}(x_1, x_2)$ $(\alpha, \rho = 1, 2)$ są rozwiązaniami płaskich zagadnień stanu odkształcenia ciała mikropolarnego (3.6), (3.8), (3.11), (3.14), (3.15), stałe zaś a_1, a_2 dane są przez wzory (3.39).

Literatura cytowana w tekście

1. A. C. Eringen, *Linear theory of micropolar elasticity*, J. Math. Mech., 15, 909–924, 1966.
2. A. C. Eringen, *Theory of micropolar elasticity*, Mathematical Fundamentals of Fracture, 2, edited by H. Liebowitz, Academic Press 1967.
3. N. I. Muskhelishvili, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Groningen 1953.
4. L. M. Milne-Thomson, *Antiplane elastic systems*, Springer 1962.
5. D. Ieşan, *Existence theorems in the theory of micropolar elasticity*, Intern. J. Eng. Sci., 8, 777–791, 1970.
6. N. Şandru, *On some problems of the linear theory of asymmetric elasticity*, Intern. J. Eng. Sci., 4, 81–96, 1966.
7. D. Ieşan, *On the linear theory of micropolar elasticity*, Intern. J. Eng. Sci., 7, 1213–1220, 1969.

Резюме

ИЗГИБ МИКРОПОЛЯРНОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ, ЗАГРУЖЕННОЙ МОМЕНТАМИ

В работе рассматривается вопрос изгиба однородной и изотропной балки под влиянием моментов, действующих на ее концах, в рамках линейной теории упругости микрополярных тел. Рассуждения основываются на модели микрополярного тела, разработанной А. Ц. Эрингеном.

Summary

BENDING OF MICROPOLAR ELASTIC BEAMS BY TERMINAL COUPLES

The considerations presented in the paper concern the problem of bending of homogeneous and isotropic beams by terminal couples on the basis of the linear theory of micropolar elasticity. The model of the micropolar body is due to A. C. Eringen.

WYDZIAŁ MATEMATYKI I MECHANIKI
UNIWERSYTETU W IASSY, RUMUNIA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 grudnia 1970 r.