ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 19, 4, 585–599, 1971, Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

MAŁE PUNKTOWO-SYMETRYCZNE DRGANIA OŚRODKA SPRĘŻYSTEGO ODKSZTAŁCAJĄCEGO SIĘ Z UPŁYWEM CZASU

BERNARD DUSZCZYK i ZBIGNIEW WESOŁOWSKI

Wszystkie dotychczasowe rozwiązania zagadnienia drgań i stateczności w nieliniowej teorii sprężystości dotyczą przypadków statycznych. Powstaje więc pytanie, jaki wpływ na krytyczne odkształcenie ma deformowanie się ciała ze skończoną prędkością. W szczególności interesujące jest pytanie, czy krytyczne odkształcenie w tym przypadku odpowiada stanowi bliższemu stanu naturalnego niż stan krytyczny przy odkształceniu statycznym, czy też tak nie jest. Innymi słowy: czy ruch ciała wpływa na ciało stabilizująco, czy też nie. Jak się zdaje, w chwili obecnej trudno udzielić ogólnej odpowiedzi na to pytanie.

W niniejszej pracy podamy odpowiednie równania dla pełnej kuli, której promień zmienia się jednostajnie w czasie. Jest to jedna z najprostszych możliwych sytuacji. Jednak nawet dla takiej kuli otrzymane równania są tak skomplikowane, że nie udało się ich analitycznie rozwiązać w przeciwieństwie do przypadku statycznego rozwiązanego w [1]. Udało się natomiast zbadać bliżej dwa przypadki drgań, mianowicie drgania promieniowe i płaskie.

1. Ruch podstawowy

Rozważmy pełną kulę o promieniu początkowym a. O materiale zakładamy, że jest sprężysty izotropowy o najzupełniej dowolnej charakterystyce fizykalnej. Wprowadźmy kulisty układ współrzędnych r, ϑ, φ, którego początek pokrywa się ze środkiem kuli. Oznaczmy przez R, θ, Φ współrzędne, które punkt (r, ϑ, φ) zajmuje w chwili t i rozważmy deformację

$$R(t)=r(1+ct), \qquad \theta(t)=\vartheta, \qquad \Phi(t)=\varphi, \tag{1.1}$$

gdzie c jest ustalonym parametrem. Zgodnie z (1.1) promień kuli w chwili t wynosi

$$A(t)=a(1+ct). \tag{1.2}$$

Dalej pokażemy, że deformacja (1.1) może być wywołana samym tylko ciśnieniem $q(t)$ przyłożonym na powierzchni kuli $R=A(t)$.

Przejdziemy do równań ruchu odpowiadających deformacji (1.1). Załóżmy, że współrzędnymi konwenkcyjnymi θ^i są współrzędne r, ϑ, φ. Oznaczając przez $\mathbf{r}$

oraz $\mathbf{R}(t)$ wektory położenia punktu θ^i odpowiednio w chwili $t=0$ oraz t wyznaczamy zgodnie z (1.1) wektory bazy $\mathbf{g}_i$ dla $t=0$ oraz $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{G}^i$ dla t

$$\mathbf{g}_i=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^i}, \quad \mathbf{G}_i=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^i}, \quad \mathbf{G}_i\,\mathbf{G}^k=\delta_i^k, \tag{1.3}$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{g}_1=\mathbf{e}_1, & \mathbf{g}_2=r\mathbf{e}_2, & \mathbf{g}_3=r\sin\vartheta\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{G}_1=(1+ct)\,\mathbf{e}_1, & \mathbf{G}_2=r\,(1+ct)\,\mathbf{e}_2, & \mathbf{G}_3=r\,(1+ct)\sin\vartheta\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{G}^1=(1+ct)^{-1}\,\mathbf{e}_1, & \mathbf{G}^2=r^{-1}\,(1+ct)^{-1}\,\mathbf{e}_2, & \mathbf{G}^3=r^{-1}\,(1+ct)^{-1}\sin^{-1}\vartheta\,\mathbf{e}_3, \end{array} \tag{1.4}$$

gdzie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ są jednostkowymi wektorami: promieniowym, południkowym i równoleżnikowym. Wynika stąd, że tensory metryczne g_{ij}, g^{ij} dla $t=0$ oraz G_{ij}, G^{ij} dla t wynoszą odpowiednio (wzory podane są np. w pracy [2])

$$g_{ij}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix}, \quad g^{ij}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\vartheta \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

oraz

$$G_{ij}=(1+ct)^2\,g_{ij}, \qquad G^{ij}=(1+ct)^{-2}\,g^{ij}. \tag{1.6}$$

Przed sformułowaniem równań ruchu należy wyznaczyć niezmienniki I_K tensora odkształcenia, tensor naprężenia τ^{ij}, gęstość $\rho(t)$, symbole Christoffela Γ^i_{jk} i przyspieszenie a^i. Na podstawie [2] wyznaczymy kolejno te wielkości:

$$I_1=3\,(1+ct)^2, \quad I_2=3\,(1+ct)^4, \quad I_3=(1+ct)^6 \tag{1.7}$$

oraz

$$\tau^{11}=r^2\,\tau^{22}=r^2\sin^2\vartheta\,\tau^{33}=\Psi_1+2\,(1+ct)^2\,\Psi_2+(1+ct)^{-2}\,\Psi_3, \tag{1.8}$$

przy czym Ψ_k określone są przez wzory

$$\Psi_1=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\,\frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Psi_2=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\,\frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad \Psi_3=2\sqrt{I_3}\,\frac{\partial W}{\partial I_3}. \tag{1.9}$$

Ponieważ masa nie zmienia się z upływem czasu, przeto z $(1.7)_3$ wynika, że gęstość ρ w chwili t wynosi

$$\rho(t)=(1+ct)^{-3}\,\mathring{\rho}, \qquad \mathring{\rho}=\rho(0). \tag{1.10}$$

Symbole Christoffela II-go rodzaju Γ^i_{jk} w chwili t wyznaczamy ze wzorów

$$\Gamma^i_{jk}=G^{ir}\,(G_{rj,k}+G_{rk,j}-G_{jk,r}), \tag{1.11}$$

co zgodnie z (1.6) prowadzi do formuł

$$\begin{array}{l} \Gamma^1_{22}=-r, \quad \Gamma^1_{33}=-r\sin^2\vartheta, \quad \Gamma^2_{33}=-\sin\vartheta\cos\vartheta, \\ \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=r^{-1}, \quad \Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=\mathrm{ctg}\,\vartheta. \end{array} \tag{1.12}$$

Pozostałe symbole drugiego rodzaju są równe zeru. Należy podkreślić, że symbole te są niezależne od czasu t, natomiast symbole pierwszego rodzaju Γ_{ijk}, których tutaj nie przytaczamy, zależą od czasu t.

Przejdziemy do wyznaczenia prędkości i przyśpieszenia. Zgodnie z (1.2) i (1.4) znajdziemy

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left[\frac{\partial R}{\partial t}\right]_{\theta^i=\mathrm{const}} = cr\mathbf{e}_1 = cr\,(1+ct)^{-1}\,\mathbf{G}_1, \\ \mathbf{a} &= \left[\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\right]_{\theta^i=\mathrm{const}} = 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Przy umowie, że wszytkie wielkości będziemy rozkładać w bazie $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{G}^i$, otrzymamy

$$v^i = \left(cr\,(1+ct)^{-1}, 0, 0\right), \qquad a^i = 0. \tag{1.14}$$

W dalszych obliczeniach będzie potrzebna pochodna czasowa wektora $\mathbf{G}_i$. Zachodzą równości

$$\left[\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial t}\right]_{\theta^i=\mathrm{const}} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t\,\partial\theta^i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta^i} = \mathbf{G}_r\,\nabla_i\,v^r. \tag{1.15}$$

Podstawiając (1.8)–(1.14) do równań ruchu

$$\nabla_i\,\tau^{ij} = \rho a^j, \tag{1.16}$$

stwierdzamy, że są one tożsamościowo spełnione. Ruch (1.2) jest więc dynamicznie możliwy. Korzystając z $(1.8)_1$ można wyznaczyć ciśnienie $q(t)$. Ponieważ

$$-q\mathbf{n} = \tau^{ij}\,n_i\,\mathbf{G}_j. \tag{1.17}$$

więc zgodnie z (1.4) i (1.6) otrzymujemy

$$q = -\tau^{11}\,G_{11} = -(1+ct)^2\,\tau^{11}. \tag{1.18}$$

2. Ruch dodatkowy

Rozważmy ruch mało różniący się od ruchu podstawowego $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)$ opisanego za pomocą funkcji (1.2). W tym celu oznaczmy wariacje wektora $\mathbf{R}$ przez $\varepsilon\mathbf{w}$ i rozważmy ruch

$$\overset{*}{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t) + \varepsilon\mathbf{w}(t), \tag{2.1}$$

gdzie ε jest małym parametrem. Każdy z wektorów (2.1) zależy również od r, ϑ, φ. Na skutek tego ruchu dodatkowego każda z wielkości podanych w poprzednim ustępie doznaje pewnego przyrostu, którego liniową część oznaczymy znakiem «prim». Ogólna teoria takiej deformacji podana została w pracy [3]. Obliczenie niniejsze oprzemy na podanych tam wzorach, jak również na formułach określających przyrosty przyśpieszeń podanych w [4].

W celu jaśniejszego przedstawienia zagadnienia powtórzymy tutaj wyprowadzenie wzorów dla przyrostów prędkości i przyśpieszeń. Pozostałe wzory podamy za [2 i 3].

Wyznaczmy najpierw wektory bazy $\mathbf{G}_i^*$ odpowiadającej ruchowi (2.1). Mamy oczywiście

$$\mathbf{G}_i^* = \frac{\partial \overset{*}{\mathbf{R}}}{\partial \theta^i} = \mathbf{G}_i + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta^i} = \mathbf{G}_i + \varepsilon \mathbf{G}_i'. \tag{2.2}$$

Wektor $\mathbf{w}$ rozkładać będziemy zawsze w bazach $\mathbf{G}_i$ oraz $\mathbf{G}^i$: $\mathbf{w} = w_i\, \mathbf{G}^i = w^i\, \mathbf{G}_i$. Przy takiej umowie mamy

$$\mathbf{G}_i' = \mathbf{G}_r \nabla_i w^r. \tag{2.3}$$

Z żądania, aby $\overset{*}{\mathbf{G}}_i \overset{*}{\mathbf{G}}{}^j = \delta_i^j$, znajdujemy

$$\overset{*}{\mathbf{G}}{}^i = \mathbf{G}^i + \varepsilon \mathbf{G}'^i, \qquad \mathbf{G}'^i = -\mathbf{G}^r \nabla_r w^i. \tag{2.4}$$

Przejdziemy teraz do wyznaczenia prędkości $\overset{*}{\mathbf{v}}(t)$ odpowiadającej ruchowi $\overset{*}{\mathbf{R}}(t)$. Zgodnie z (2.1) i (1.15)

$$\overset{*}{\mathbf{v}} = \left[\frac{\partial \overset{*}{\mathbf{R}}}{\partial t}\right]_{\theta^i = \mathrm{const}} = \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}\right]_{\theta^i = \mathrm{const}} + \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial t}(w^r \mathbf{G}_r)\right]_{\theta^i = \mathrm{const}} = \tag{2.5}$$
$$= v^r \mathbf{G}_r + \varepsilon \left[\mathbf{G}_r \frac{\partial}{\partial t} w^r + \mathbf{G}_i w^r \nabla_r v^i\right].$$

Mnożąc (2.5) obustronnie przez $\mathbf{G}^k + \varepsilon \mathbf{G}'^k$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\overset{*}{v}{}^k = v^k + \varepsilon v'^k, \\ &v'^k = \frac{D}{Dt} w^k + w^r \nabla_r v^k - v^r \nabla_r w^k, \qquad \frac{D}{Dt} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\right]_{\theta^i = \mathrm{const}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dla przyśpieszenia $\mathbf{a}^*$ otrzymujemy

$$\overset{*}{\mathbf{a}} = \left[\frac{\partial}{\partial t} \overset{*}{\mathbf{v}}\right]_{\theta^i = \mathrm{const}} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{v^r \mathbf{G}_r + \varepsilon\left[\mathbf{G}_r \frac{D}{Dt} w^r + w^r \mathbf{G}_p \nabla_r v^p\right]\right\}\right]_{\theta^i = \mathrm{const}}. \tag{2.7}$$

Wykonując wszystkie różniczkowania otrzymuje się

$$\overset{*}{\mathbf{a}} = \mathbf{G}_r \left[\frac{D}{Dt} v^r + v^r \mathbf{G}_p \nabla_r v + \varepsilon \left[\mathbf{G}_r \frac{D^2}{Dt^2} w^r + (\mathbf{G}_r \nabla_p v^r) \frac{D}{Dt} w^p + \right.\right. \tag{2.8}$$
$$\left.\left. + \left(\frac{D}{Dt} w^p\right) \mathbf{G}_r \nabla_p v^r + (\mathbf{G}_p \nabla_q v^p)(\nabla_r v^q) + w^r \mathbf{G}_p \frac{D}{Dt}(\nabla_r v^p)\right]\right]$$

i po obustronnym pomnożeniu przez $\mathbf{G}^i + \varepsilon \mathbf{G}'^i$

$$\begin{aligned} &\overset{*}{a}{}^i = a^i + \varepsilon a'^i, \\ &a^i = \frac{D}{Dt} v^i + v^r \nabla_r v^i, \\ &a'^i = \frac{D}{Dt^2} w^i + 2(\nabla_r v^i)\left(\frac{D}{Dt} w^r\right) + w^r \frac{D}{Dt}(\nabla_r v^i) + \\ &\qquad + w^r (\nabla_p v^i)(\nabla_r v^p) - (\nabla_r w^i)\, a^r. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Przejdziemy teraz do wyznaczenia a'^i dla rozpatrywanego ruchu (2.1), jeśli ruch podstawowy określony jest przez (1.1). Oznaczając kowariantne współrzędne wektora $\mathbf{w}$ przez u, v, w zgodnie z (1.6), mamy

$$w^1 = \frac{u}{(1+ct)^2}, \quad w^2 = \frac{v}{r^2(1+ct)^2}, \quad w^3 = \frac{w}{r^3(1+ct)^2 \sin^2 \vartheta}. \tag{2.10}$$

Podstawiając (2.10) do (2.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} a'^1 &= \frac{\ddot{u}}{(1+ct)^2} - 2\frac{c\dot{u}}{(1+ct)^3} + 2\frac{c^2 u}{(1+ct)^4}, \\ r^2 a'^2 &= \frac{\ddot{v}}{(1+ct)^2} - 2\frac{c\dot{v}}{(1+ct)^3} + 2\frac{c^2 v}{(1+ct)^4}, \\ r^2 \sin^2 \vartheta\, a'^3 &= \frac{\ddot{w}}{(1+ct)^2} - 2\frac{c\dot{w}}{(1+ct)^3} + 2\frac{cw}{(1+ct)^4}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

przy czym kropka oznacza różniczkowanie względem czasu t (przy ustalonym θ^i).

Korzystając z [2] przejdziemy do wyznaczenia przyrostów dalszych wielkości, odpowiadających zmianie $\mathbf{R}(t)$ na $\overset{*}{\mathbf{R}}(t)$. Oznaczając indeksami r, ϑ, φ różniczkowanie względem r, ϑ, φ mamy

$$\begin{aligned} G'_{11} &= -(1+ct)^4 G'^{11} = 2u_r, \\ G'_{22} &= -r^4(1+ct)^4 G'^{22} = 2(v_\vartheta + ru), \\ G'_{33} &= -r^4(1+ct)^4 \sin^4 \vartheta\, G'^{33} = 2(w_\varphi + ru\sin^2\vartheta + v\sin\vartheta\cos\vartheta), \\ G'_{23} &= -r^4(1+ct)^4 \sin^2\vartheta\, G'^{23} = w_\vartheta + v_\varphi - 2w\operatorname{ctg}\vartheta, \\ G'_{31} &= -r^2(1+ct)^4 \sin^2\vartheta\, G'^{31} = u_\vartheta + w_r - 2r^{-1} w, \\ G_{12} &= -r^2(1+ct)^3 G'^{12} = u_\vartheta + v_r - 2r^{-1} v; \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$G' = 2r^4(1+ct)^4 \sin^2\vartheta\, L\mathbf{w}; \tag{2.13}$$

$$I'_1 = 2L\mathbf{w}, \quad I'_2 = 4(1+ct)^2 L\mathbf{w}, \quad I'_3 = 2(1+ct)^4 L\mathbf{w}; \tag{2.14}$$

$$\rho' = -\mathring{\rho}(1+ct)^{-5} L\mathbf{w}; \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} (1+ct)^4 \tau'^{11} &= [H - (1+ct)^2 \Psi_1 + \Psi_3] L\mathbf{w} - 2[(1+ct)^4 \Psi_2 + \Psi_3] u_r, \\ r^2(1+ct)^4 \tau'^{22} &= [H - (1+ct)^2 \Psi_1 + \Psi_3] L\mathbf{w} - \\ &\quad - 2[(1+ct)^4 \Psi_2 + \Psi_3]\left(\frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{u}{r}\right), \\ r^2\sin^2\vartheta(1+ct)^4 \tau'^{33} &= [H - (1+ct)^2 \Psi_1 + \Psi_3] L\mathbf{w} - \\ &\quad - 2\left[\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} w_\varphi + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} v\operatorname{ctg}\vartheta\right], \\ r^4\sin^2\vartheta(1+ct)^4 \tau'^{23} &= -[(1+ct)^4 \Psi_2 + \Psi_3](v_\varphi + w_\vartheta - 2w\operatorname{ctg}\vartheta), \\ r^2\sin^2\vartheta(1+ct)^4 \tau'^{31} &= -[(1+ct)^4 \Psi_2 + \Psi_3]\left(u_\varphi + w_r - \frac{2}{r} w\right), \\ r^2(1+ct)^4 \tau'^{12} &= -[(1+ct)^4 \Psi_2 + \Psi_3]\left(u_\vartheta + v_r - \frac{2}{r} v\right), \end{aligned} \tag{2.16}$$

gdzie H jest funkcją materiałową, a L operatorem różniczkowym, określonymi wzorami

$$(2.17)\qquad Lw = u_r + \frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} w_\varphi + \frac{2}{r} u + \frac{1}{r^2} v \operatorname{ctg}\vartheta;$$

$$(2.18)\qquad \begin{aligned} H &= 2(1+ct)^4 [\Psi_{11} + 4(1+ct)^4 \Psi_{22} + (1+ct)^8 \Psi_{33} + 4(1+ct)^6 \Psi_{23} + \\ &\quad + 2(1+ct)^4 \Psi_{31} + 4(1+ct)^2 \Psi_{12}], \\ \Psi_{KL} &= \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_K \partial I_L}. \end{aligned}$$

Przyrosty symboli Christoffela drugiego rodzaju określone są formułami ([1])

$$(2.19)\qquad \begin{aligned}
(1+ct)^2 \Gamma'^{1}_{11} &= u_{rr}, \\
(1+ct)^2 \Gamma'^{1}_{22} &= u_{\vartheta\vartheta} + r u_r - \frac{2}{r} v_\vartheta - u, \\
(1+ct)^2 \Gamma'^{1}_{33} &= u_{\varphi\varphi} + r u_r \sin^2\vartheta + u_\vartheta \sin\vartheta\cos\vartheta - u\sin^2\vartheta - \\
&\quad - \frac{2}{r} v \sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{2}{r} w_\varphi, \\
(1+ct)^2 \Gamma'^{1}_{23} &= u_{\vartheta\varphi} - u_\varphi \operatorname{ctg}\vartheta - \frac{1}{r} v_\varphi - \frac{1}{r} w_\vartheta + \frac{2}{r} w \operatorname{ctg}\vartheta, \\
(1+ct)^2 \Gamma'^{1}_{31} &= u_{r\varphi} - \frac{1}{r} u_\varphi - \frac{1}{r} w_r + \frac{2}{r^2} w, \\
(1+ct)^2 \Gamma'^{1}_{12} &= u_{r\vartheta} - \frac{1}{r} u_\vartheta - \frac{1}{r} v_r + \frac{2}{r^2} v, \\
r^2 (1+ct)^2 \Gamma'^{2}_{11} &= v_{rr} - \frac{2}{r} v_r + \frac{2}{r^2} v, \\
r^2 (1+ct)^2 \Gamma'^{2}_{22} &= v_{\vartheta\vartheta} + 2r u_\vartheta + r v_r - 2v, \\
r^2 (1+ct)^2 \Gamma'^{2}_{33} &= v_{\varphi\varphi} + r v_r \sin^2\vartheta + v_\vartheta \sin\vartheta\cos\vartheta - 2w_\varphi \operatorname{ctg}\vartheta - v, \\
r^2 (1+ct)^2 \Gamma'^{2}_{23} &= v_{\vartheta\varphi} + r u_\varphi - v_\varphi \operatorname{ctg}\vartheta - w_\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta + 2w \operatorname{ctg}^2\vartheta, \\
r^2 (1+ct)^2 \Gamma'^{2}_{31} &= v_{r\varphi} - \frac{2}{r} v_\varphi - w_r \operatorname{ctg}\vartheta + \frac{2}{r} w \operatorname{ctg}\vartheta, \\
r^2 (1+ct)^2 \Gamma'^{2}_{12} &= v_{r\vartheta} + r u_r - \frac{2}{r} v_\vartheta - u, \\
r^2 \sin^2\vartheta\, (1+ct)^2 \Gamma'^{3}_{11} &= w_{rr} - \frac{2}{r} w_r + \frac{2}{r^2} w, \\
r^2 \sin^2\vartheta\, (1+ct)^2 \Gamma'^{3}_{22} &= w_{\vartheta\vartheta} + r w_r - 2w_\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta + 2w \operatorname{ctg}^2\vartheta, \\
r^2 \sin^2\vartheta\, (1+ct)^2 \Gamma'^{3}_{33} &= w_{\varphi\varphi} + 2r u_\varphi \sin^2\vartheta + 2v_\varphi \sin\vartheta\cos\vartheta + r w_r \sin^2\vartheta + \\
&\quad + w_\vartheta \sin\vartheta\cos\vartheta - 2w,
\end{aligned}$$

([1]) Należy podkreślić, że w omawianym przypadku nieprawdziwy jest wzór $\Gamma'^{i}_{jk} = \nabla_j \nabla_k w^i$.

(2.19) [c.d.]
$$r^2\sin^2\vartheta\,(1+ct)^2\,\Gamma'^{3}_{23}=w_{\vartheta\varphi}+ru_\vartheta\sin^2\vartheta+v_\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta-2w\operatorname{ctg}\vartheta-v,$$
$$r^2\sin^2\vartheta\,(1+ct)^2\,\Gamma'^{3}_{31}=w_{r\varphi}+ru_r\sin^2\vartheta+v_r\sin\vartheta\cos\vartheta-$$
$$-\frac{2}{r}w_\varphi-u\sin^2\vartheta-\frac{2}{r}\sin\vartheta\cos\vartheta,$$
$$r^2\sin^2\vartheta\,(1+ct)^2\,\Gamma'^{3}_{12}=w_{r\vartheta}-w_r\operatorname{ctg}\vartheta-\frac{2}{r}w_\vartheta+\frac{2}{r}w\operatorname{ctg}\vartheta.$$

Podstawienie (1.8), (2.11)–(2.19) do równań ruchu

$$\nabla_i\,\tau'^{ij}+\Gamma'^{j}_{ir}\,\tau^{ir}+\Gamma'^{r}_{rs}\,\tau^{sj}=\rho a'^{i}+\rho'\,a^{i}\tag{2.20}$$

prowadzi do układu trzech równań różniczkowych

$$M\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r-\frac{2}{r^2}u\right)+\frac{1}{r^2}P\left(u_{\vartheta\vartheta}+u_\vartheta\operatorname{ctg}\vartheta+\frac{1}{\sin^2\vartheta}u_{\varphi\varphi}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2}(M-P)(v_{r\vartheta}+v_r\operatorname{ctg}\vartheta)-\frac{2}{r^3}M(v_\vartheta+v\operatorname{ctg}\vartheta)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}(M-P)\,w_{r\varphi}-\frac{1}{r^3\sin^2\vartheta}M\,w_\varphi=\mathring{\rho}\left(\frac{u}{1+ct}\right)^{\cdot\cdot},\tag{2.21}$$

$$(M-P)\,u_{r\vartheta}+\frac{2}{r}Mu_\vartheta+P\left(v_{rr}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}w_{\varphi\varphi}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2}M\left(v_{\vartheta\vartheta}+v_\vartheta\operatorname{ctg}\vartheta-\frac{1}{\sin^2\vartheta}v\right)+(M-P)\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}w_{\vartheta\varphi}+$$
$$-\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}Mw_\varphi\operatorname{ctg}\vartheta=\mathring{\rho}\left(\frac{v}{1+ct}\right)^{\cdot\cdot},\tag{2.22}$$

$$(M-P)\,u_{r\varphi}+\frac{2}{r}Mu_\varphi+\frac{1}{r^2}(M-P)\,v_{\vartheta\varphi}+$$
$$+\frac{1}{r^2}(M+P)\,v_\varphi\operatorname{ctg}\vartheta+P\left(w_{rr}+\frac{1}{r^2}w_{\vartheta\vartheta}-w_\vartheta\frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\vartheta+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}Mw_{\varphi\varphi}=\mathring{\rho}\left(\frac{w}{1+ct}\right)^{\cdot\cdot}\right.,\tag{2.23}$$

gdzie M i P są znanymi funkcjami czasu t następującej postaci:

$$M=(1+ct)^2\,\Psi_1+2\,(1+ct)^4\,\Psi_2+\Psi_3+2\,(1+ct)^4\,[\Psi_{11}+4\,(1+ct)^4\,\Psi_{22}+$$
$$+(1+ct)^8\,\Psi_{33}+4\,(1+ct)^6\,\Psi_{23}+2\,(1+ct)^4\,\Psi_{31}+4\,(1+ct)^2\,\Psi_{12}],\tag{2.24}$$
$$P=(1+ct)^2\,\Psi_1+(1+ct)^4\,\Psi_2.$$

Jest widoczne, że $M(t)$ oraz $P(t)$ są liniowo zależne jedynie dla bardzo szczególnych materiałów. Dalej będziemy zakładali, że rozpatrujemy materiał, dla którego $M(t)$ i $P(t)$ są liniowo niezależne.

Opisanemu ruchowi może odpowiadać cały szereg warunków brzegowych zależnych od sposobu obciążenia kuli. Szczegółowe omówienie sześciu z nich podane jest np. w pracy [1]. W niniejszej pracy podamy odpowiednie wzory tylko dla dwu najprostszych przypadków.

Zakładamy, że przy ruchu zakłóconym $\overset{*}{R}(t)$ kula obciążona jest jedynie ciśnieniem hydrostatycznym $q(t)$; stąd wynika

$$\overset{*}{\tau}{}^{ij}\,\overset{*}{n}_i\,\overset{*}{\mathbf{G}}_j=-q\overset{*}{\mathbf{n}}, \tag{2.25}$$

przy czym

$$\overset{*}{\mathbf{n}}=\frac{\overset{*}{\mathbf{G}}}{\sqrt{G^{11}+\varepsilon G'^{11}}},\qquad n_i+\varepsilon n_i'=\left(\frac{1}{\sqrt{G^{11}+\varepsilon G'^{11}}},\ 0,\ 0\right). \tag{2.26}$$

Mnożąc skalarowo (2.25) obustronnie przez $\overset{*}{\mathbf{G}}{}^k=\mathbf{G}^k+\varepsilon\mathbf{G}'^k$ otrzymujemy

$$\tau^{1k}+qG^{1k}=0,\qquad \tau'^{1k}+qG'^{1k}=0\qquad \text{dla } r=a. \tag{2.27}$$

Warunek $(2.27)_1$ jest powtórzeniem warunku $(1.18)_1$. Podstawiając (1.8), $(1.18)_1$, (2.12) i (2.16) do $(2.27)_2$, mamy

$$\begin{gathered}[H+(1+ct)^2\Psi_1+2(1+ct)^4\Psi_2+\Psi_3]\,u_{,r}+\\ +[H-(1+ct)^2\Psi_1+\Psi_3]\left(\frac{1}{r^2}v_{\vartheta}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}w_{\varphi}+2\frac{u}{r}+\frac{v}{r^2}\operatorname{ctg}\vartheta\right)=0,\\ u_{\vartheta}+v_{,r}-2\frac{v}{r}=0,\qquad u_{\varphi}+w_{,r}-2\frac{w}{r}=0\qquad \text{dla}\quad r=a.\end{gathered} \tag{2.28}$$

Znacznie prostsze warunki brzegowe otrzymamy zakładając, że kula obciążona jest za pośrednictwem dostatecznie sztywnego pancerza. W tym przypadku

$$u=v=w=0\qquad \text{dla}\quad r=a. \tag{2.29}$$

Funkcje u, v, w muszą spełniać odpowiednie warunki początkowe.

Układ (2.21)–(2.23), (2.28) i odpowiednie warunki początkowe mogą być podstawą badań stateczności kuli odkształcanej w opisany sposób. Jednak ze względu na jego złożoność nie będziemy tutaj rozważali tego zagadnienia, a ograniczymy się tylko do badania szczególnych przypadków ruchu dodatkowego.

3. Rozwiązania trywialne

Podany wyżej układ równań (2.21)–(2.23) ma cały szereg rozwiązań trywialnych, które można uważać ze pewien sprawdzian jego poprawności. Omówimy tutaj kolejno kilka z nich.

1. *Rozwiązanie zerowe*. Ponieważ układ (2.21)–(2.23) jest jednorodny, istnieje rozwiązanie

$$u=v=w\equiv 0, \tag{3.1}$$

odpowiadające faktowi, że ruch podstawowy (1.1) jest zawsze możliwy.

2. *Sztywny obrót dokoła osi $\vartheta=0$ o stały kąt.* Łatwo sprawdzić, że omawiany układ równań ma rozwiązanie

$$u=v\equiv 0, \quad w=r^2(1+ct)^2\sin^2\vartheta. \tag{3.2}$$

Korzystając z (1.4) można wyznaczyć wektor przemieszczenia

$$\mathbf{w}=w\mathbf{G}^3=r(1+ct)\sin\vartheta\,\mathbf{e}_3=R\sin\vartheta\,\mathbf{e}_3. \tag{3.3}$$

Widać stąd, że (3.2) przedstawia stały w czasie obrót dokoła osi $\vartheta=0$. Łatwo sprawdzić, że obrót zależny od czasu nie spełnia (2.21)–(2.23).

3. *Translacja ze stałą prędkością.* Rozwiązaniem (2.21)–(2.23) jest również

$$u=Vt(1+ct)\cos\vartheta, \quad v=-Vtr(1+ct)\sin\vartheta, \quad w\equiv 0. \tag{3.4}$$

Na podstawie (1.4) można stąd wyznaczyć wektor dodatkowego przemieszczenia

$$\mathbf{w}=w_i\mathbf{G}^i=Vt\mathbf{e}_1\cos\vartheta-Vt\,\mathbf{e}_2\sin\vartheta=Vt\mathbf{e}_0, \tag{3.5}$$

gdzie $\mathbf{e}_0$ jest jednostkowym wektorem w kierunku $\vartheta=0$. Kula przemieszcza się więc jak ciało sztywne w kierunku $\vartheta=0$ z prędkością V. Ze względu na równouprawnienie wszystkich kierunków możliwy jest również ruch w kierunku dowolnym. Oznaczając przez V_1, V_2, V_3 współrzędne tej dowolnej prędkości w kartezjańskim układzie współrzędnych $\{x_i\}$, mamy przemieszczenie

$$\bar{w}_r=(V_1t, V_2t, V_3t). \tag{3.6}$$

W celu otrzymania współrzędnych wektora $\mathbf{w}$ w kulistym układzie współrzędnych należy przetransformować (3.6) zgodnie ze wzorami

$$w_i=\frac{\partial x_r}{\partial\theta^i}\bar{w}_r \tag{3.7}$$

oraz

$$\begin{aligned} x_1&=r(1+ct)\sin\vartheta\sin\varphi,\\ x_2&=r(1+ct)\sin\vartheta\cos\varphi,\\ x_3&=r(1+ct)\cos\vartheta, \end{aligned} \tag{3.8}$$

skąd otrzymuje się

$$\begin{aligned} u=w_1&=V_1\,t(1+ct)\sin\vartheta\sin\varphi+V_2\,t(1+ct)\sin\vartheta\cos\varphi+\\ &\qquad+V_3\,t(1+ct)\cos\vartheta,\\ v=w_2&=V_1\,rt(1+ct)\cos\vartheta\sin\varphi+V_2\,rt(1+ct)\cos\vartheta\cos\varphi-\\ &\qquad-V_3\,rt(1+ct)\sin\vartheta,\\ w=w_3&=V_1\,rt(1+ct)\sin\vartheta\cos\varphi-V_2\,rt(1+ct)\sin\vartheta\sin\varphi. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Rozwiązanie (3.4) otrzymuje się z ogólniejszego (3.9) przez przyjęcie

$$V_1=V_2=0, \quad V_3=V. \tag{3.10}$$

Przy poszukiwaniu rozwiązań nietrywialnych ograniczymy się do zagadnienia osiowo symetrycznego $w\equiv 0$, $\partial/\partial\varphi\equiv 0$. Rozwiązania poszukujemy metodą Fouriera, rozkładając przemieszczenia u, v w szereg względem funkcji kulistych $Y_{n\nu}(\vartheta)$ (wielomiany Legendre'a argumentu $\cos\vartheta$):

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{n\nu} \alpha_n(r,t)\, Y_n(\vartheta), \\
v &= \sum_{n\nu} r\beta_n(r,t)\, \frac{\partial}{\partial\vartheta} Y_n(\vartheta).
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Podstawienie (3.1) do równań (2.21)-(2.23) prowadzi do układu równań

$$
\begin{aligned}
&M\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\alpha_n + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\alpha_n - \frac{2}{r^2}\alpha_n\right) - \kappa\left[P\left(\frac{1}{r^2}\alpha_n - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\beta_n - \frac{1}{r^2}\beta_n\right)+\right. \\
&\qquad\left. + M\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\beta_n - \frac{1}{r^2}\beta_n\right)\right] = \dot{\rho}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\alpha_n}{1+ct}\right), \\
&M\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\alpha_n + \frac{2}{r^2}\alpha_n\right) + P\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\alpha_n + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\beta_n + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\beta_n\right) - \\
&\qquad - \kappa M\frac{1}{r^2}\beta_n = \dot{\rho}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\beta_n}{1+ct}\right),
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

gdzie

$$
\kappa = n^2 + n. \tag{3.13}
$$

Równania (3.12) otrzymano z (2.21) i (2.22) przez podzielenie odpowiednio przez Y_n oraz $\frac{d}{d\vartheta}Y_n$. Ponieważ $\frac{d}{d\vartheta}\equiv 0$, więc w dalszych rozważaniach należy odrzucić $(3.12)_2$, jeśli $n=0$. Mimo, że rozważane zagadnienie jest geometrycznie proste, otrzymany układ jest bardzo skomplikowany i znalezienie ogólnego rozwiązania jest, praktycznie biorąc, niemożliwe.

W celu znalezienia rozwiązania szczególnego załóżmy, że funkcje $\alpha_n(r,t)$ i $\beta_n(r,t)$ są analityczne i mają następującą postać

$$
\alpha_n(r,t) = A(r)\,\chi(t), \qquad \beta_n(r,t) = B(r)\,\chi(t). \tag{3.14}
$$

Rozważmy więc sytuację, gdy zaburzenie, zachowując swą postać, zmienia się z czasem.

Podstawiając teraz (3.14) do (3.12) otrzymujemy następujący układ równań («prim» oznacza odtąd różniczkowanie względem r, podczas gdy kropka oznacza różniczkowanie względem t):

$$
\begin{aligned}
&\chi(t)\,M(t)\left[A'' + \frac{2}{r}A' - \frac{2}{r^2}A - \frac{\kappa}{r}B' + \frac{\kappa}{r^2}B\right] + \\
&\qquad + \chi(t)\,P(t)\left[-\frac{\kappa}{r^2}A + \frac{\kappa}{r}B' + \frac{\kappa}{r^2}B\right] = \mathring{\rho}A\left(\frac{\chi}{1+ct}\right)^{\cdot\cdot}, \\
&\chi(t)\,M(t)\left[\frac{1}{r}A' + \frac{2}{r^2}A - \frac{\kappa}{r^2}B\right] + \\
&\qquad + \chi(t)\,P(t)\left[-\frac{1}{r}A' + B'' + \frac{2}{r}B'\right] = \mathring{\rho}B\left(\frac{\chi}{1+ct}\right)^{\cdot\cdot},
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

gdzie funkcje w klamrach są funkcjami tylko zmiennej r. Jeśli $n=0$ i $B=0$ w pewnym obszarze, to na mocy $(3.15)_2$ otrzymujemy w tym obszarze $A=0$ i nie ma drgań. Podobnie, jeśli w pewnym obszarze $A=0$, to z $(3.15)_1$ wynika $B=0$. Przy $n\neq 0$ funkcje A oraz B mogą więc być równe zeru tylko w odosobnionych punktach. Jeśli $n=0$, to zgodnie z podaną poprzednio dyskusją równanie $(3.15)_2$ należy odrzucić. Weźmy najpierw pod uwagę $n\neq 0$. Po podzieleniu równań (3.15) odpowiednio przez A i B przybierają one następującą budowę:

$$(3.16)\qquad \begin{aligned} K_1(r)\,Q(t)+L_1(r)\,S(t)=T_1(t),\\ K_2(r)\,Q(t)+L_2(r)\,S(t)=T_2(t). \end{aligned}$$

Po zróżniczkowaniu (3.16) obustronnie względem r, otrzymuje się

$$(3.17)\qquad K_1'(r)\,Q(t)+L_1'(r)\,S(t)=0,\qquad K_2'(r)\,Q(t)+L_2'(r)\,S(t)=0.$$

Dla każdego z równań (3.17) mogą zachodzić następujące przypadki:

1. $K'(r)=0$, $L'(r)=0$.
Wtedy więc $C_1\,Q(t)+C_2\,S(t)=T(t)$ (gdzie $C_1, C_2=\text{const}$).
2. $K'(r)=0$, $\delta(t)=0$; skąd wynika, że $\chi(t)=0$.
3. $L'(r)=0$, $Q(t)=0$; skąd wynika, że $\chi(t)=0$.
4. $K'(r)/L'(r)=-C$, $R(t)/S(t)=C$ gdzie C jest dowolną stałą. Pociąga to za sobą zależność $T(t)=DQ(t)$, $M(t)=CP(t)$.

Po wykluczeniu trywialnych przypadków 2 oraz 3 [por. (3.14)] pozostają przypadki 1 oraz 4. Przypadek 4 należy wykluczyć, gdyż spełnienie równości $M(t)=$ $=CP(t)$ jest możliwe tylko dla pewnych szczególnych materiałów. W związku z tym będziemy rozpatrywali tylko sytuacje, kiedy dla obu równań (3.17) zachodzi przypadek 1. Mamy więc

$$(3.18)\qquad \begin{aligned} A''+\frac{2}{r}A'-\frac{2}{r^2}A-\frac{\kappa}{r}B'+\frac{\kappa}{r^2}B&=k_1A,\\ -\frac{\dot{\kappa}}{r^2}A-\frac{\kappa}{r}B'+\frac{\kappa}{r^2}B&=k_2A,\\ \frac{1}{r}A'+\frac{2}{r^2}A-\frac{\kappa}{r^2}B&=k_3B,\\ -\frac{1}{r}A'+B''+\frac{2}{r}B'&=k_4B, \end{aligned}$$

gdzie k_1, k_2, k_3 i k_4 są stałymi.

Jeśli $\kappa\neq 0$, to (3.18) jest zawsze układem sprzecznym i (3.12) nie ma rozwiązań postaci (3.14). Jeśli natomiast $n=0$, to równania $(3.18)_{3,4}$ należy odrzucić. W tym przypadku można założyć $B\equiv 0$, $\partial/\partial\vartheta\equiv 0$ [por. (3.11) dla $n=0$], skąd zgodnie z (3.14) i (3.11) wynika $\beta=0$. Układ (3.15) redukuje się więc do jednego równania

$$(3.19)\qquad \chi(t)\,M(t)\left(A''+\frac{2}{r}A'-\frac{2}{r^2}A\right)=\mathring{\rho}A\left(\frac{\chi}{1+ct}\right)^{\cdot\cdot},$$

które rozpada się na układ dwu równań

$$A''+\frac{2}{r}A'-\frac{2}{r^2}A+k^2A=0 \tag{3.20}$$

oraz

$$\left(\frac{\chi}{1+ct}\right)^{\cdot\cdot}+k^2\frac{M(1+ct)}{\overset{\circ}{\rho}}\frac{\chi}{1+ct}=0, \tag{3.21}$$

gdzie k jest stałą sprzężenia. Równanie (3.20) można sprowadzić do równania Bessela (por. np. [5]). Rozwiązaniem ogólnym jest (C_1 i C_2 są stałymi całkowania)

$$A=C_1 r^{-1/2} J_{3/2}(kr)+C_2 r^{-1/2} J_{3/2}(kr). \tag{3.22}$$

Ponieważ $J_{-3/2}(kr)$ jest nieoznaczone dla $r=0$, więc należy przyjąć $C_2\equiv 0$.

Pozostaje rozwiązanie równania (3.21). Dla dowolnego M analityczne rozwiązanie ogólne nie jest znane. W szczególnych przypadkach (3.21) może zredukować się do równania oscylatora harmonicznego, równania Mathieu, równania Lamégo i innych. W większości przypadków odpowiednie rozwiązanie jest funkcją oscylującą.

Zakładając, że rozwiązanie równania (3.21) zostało już znalezione (np. przy pomocy numerycznych metod), przejdziemy do warunków brzegowych (2.28) lub (2.29). Warunki te nakładają ograniczenia na funkcję (3.22). Okazuje się, że warunki (2.28) nie mogą być spełnione, ponieważ $C_2=0$. Możliwe jest natomiast spełnienie warunków (2.29) przez przyjęcie takiego $k=\bar{k}$, że

$$J_{3/2}(\bar{k}a)=0. \tag{3.23}$$

Ostatecznie otrzymujemy więc wniosek, że rozwiązanie o postaci (3.14) dopuszcza jedynie drgania promieniowe. Drgania te nie mogą spełnić warunku brzegowego odpowiadającego obciążeniu hydrostatycznemu. Układ (3.12) nie dopuszcza więc przy obciążeniu hydrostatycznym rozwiązania o postaci (3.14)

4. Fala płaska

Jeśli abstrahować od warunków brzegowych, to (3.20) i (3.21) przedstawia falę kulistą w ośrodku deformującym się zgodnie z (1.1). W niniejszym punkcie rozważmy falę płaską w ośrodku deformującym się w opisany wyżej sposób.

Zakładając, że fala propaguje się w kierunku $\vartheta=0$, poprowadźmy w tym kierunku oś z kartezjańskiego układu współrzędnych. Dodatkowe przemieszczenie $\mathbf{w}$ ma z założenia kierunek osi Z i jest funkcją jedynie Z oraz t.

Zgodnie z (1.1)

$$Z=R\cos\theta=r(1+ct)\cos\vartheta, \qquad z=r\cos\vartheta. \tag{4.1}$$

Dla ułatwienia dalszych obliczeń zamiast funkcją $\bar{\Psi}(Z,t)$ posługujemy się funkcją

$$u_{(z)}=\Psi(z,t). \tag{4.2}$$

We wprowadzonym poprzednio kulistym układzie współrzędnych przemieszczenie (4.2) ma współrzędne

$$u = \Psi(z,t)\cos\vartheta, \qquad v = -r\Psi(z,t)\sin\vartheta, \qquad w=0. \tag{4.3}$$

Związki (4.3) można otrzymać z (4.2) przez zwykłą transformację współrzędnych. Po podstawieniu (4.3) do układu (2.21)–(2.23) równanie ostatnie spełnione jest tożsamościowo, a każde z równań (2.21) i (2.22) prowadzi do równania

$$M\Psi'' = \mathring{\rho}\left(\frac{\Psi}{1+ct}\right)^{\cdot\cdot}, \tag{4.4}$$

przy czym znakiem «prim» oznaczono różniczkowanie względem z, a kropką różniczkowanie względem t. Rozdzielając zmienne (użyte tutaj oznaczenia A i χ reprezentują inne wielkości niż w poprzednim paragrafie)

$$\Psi(z,t) = A(z)\,\chi(t), \tag{4.5}$$

mamy

$$A'' + k^2 A = 0 \tag{4.6}$$

oraz

$$\left(\frac{\chi}{1+ct}\right)^{\cdot\cdot} + k^2 \frac{M(1+ct)}{\mathring{\rho}}\left(\frac{\chi}{1+ct}\right) = 0. \tag{4.7}$$

Ogólnym rozwiązaniem (4.6) jest (C_1 i C_2 oznaczają całkowania)

$$A = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz. \tag{4.8}$$

Równanie (4.7) jest równaniem (3.21). Fala płaska zachowuje się więc w czasie tak, jak fala kulista rozważana w poprzednim punkcie.

5. Materiał sprężysty Murnaghana

W teorii liniowej izotropowy materiał sprężysty scharakteryzowany jest dwoma stałymi Lamégo λ i μ. W teorii drugiego rzędu pojawiają się trzy dalsze stałe l, m i n, a potencjał sprężystości

$$W = \frac{l+2m}{24}(I_1-3)^3 + \frac{\lambda+2\mu+4m}{8}(I_1-3)^2 + \frac{8\mu+n}{8}(I_1-3) - \\ - \frac{m}{4}(I_1-3)(I_2-3) - \frac{4\mu+n}{8}(I_2-3) + \frac{n}{8}(I_3-1). \tag{5.1}$$

Równoważną postać potencjału W (5.1) podał F. D. Murnaghan [6]. Dla dość szerokiej klasy materiałów związek (5.1) jest spełniony w znacznie szerszym zakresie, niż wynikałoby to z ograniczeń na wielkość deformacji, które odnoszą się do teorii drugiego rzędu. Materiały należące do tej klasy nazywamy materiałami Murnaghana.

Zgodnie z (1.9) i $(2.18)_2$ dla materiału (5.1) zachodzą związki

$$
\begin{aligned}
&\Psi_1=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\left[\frac{l-2m}{8}(I_1-3)^2+\frac{\lambda+2\mu+4m}{4}(I_1-3)+\frac{8\mu+n}{8}-\frac{m}{4}(I_2-3)\right],\\
&\Psi_2=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\left[-\frac{m}{4}(I_1-3)-\frac{4\mu+n}{8}\right],\\
(5.2)\qquad &\Psi_3=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\,\frac{n}{8},\\
&\Psi_{11}=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\left[\frac{l-2m}{4}(I_1-3)+\frac{\lambda+2\mu+4m}{4}\right],\\
&\Psi_{12}=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\left(-\frac{m}{4}\right),\\
&\Psi_{22}=\Psi_{33}=\Psi_{23}=\Psi_{31}=0.
\end{aligned}
$$

Zgodnie z (2.24) funkcje $M(t)$ i $P(t)$ są określone w następujący sposób:

$$
(5.3)\qquad
\begin{aligned}
M(t)&=s_1(1+ct)^3+s_2(1+ct)+s_3(1+ct)^{-1},\\
P(t)&=s_4(1+ct)^3+s_5(1+ct)+s_6(1+ct)^{-1},
\end{aligned}
$$

gdzie $s_1, \ldots, s_6$ są następującymi stałymi materiałowymi:

$$
(5.4)\qquad
\begin{aligned}
s_1&=\frac{21}{4}l+2m+\frac{n}{4},\\
s_2&=\frac{3}{2}l+4m-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\lambda-3\mu,\\
s_3&=\frac{9}{4}l+12m+\frac{1}{4}n+\frac{3}{2}\lambda+5\mu,\\
s_4&=\frac{9}{4}l+\frac{3}{2}m,\\
s_5&=-\frac{9}{2}l-\frac{3}{2}m+\frac{3}{2}\lambda+2\mu-\frac{1}{4}n,\\
s_6&=\frac{9}{4}l-\frac{1}{4}n-\frac{3}{2}\lambda-5\mu.
\end{aligned}
$$

Dla podanych wyżej funkcji $\mathring{M}(t)$ i $P(t)$ układ równań (3.12) może być rozwiązany numerycznie. W szczególnym przypadku drgań promieniowych opisanych równaniem (3.21) mamy

$$
(5.5)\qquad \left(\frac{\chi}{1+ct}\right)^{\bullet\bullet}+\frac{k^2}{\mathring{\rho}}\left[s_1(1+ct)^4+s_2(1+ct)^2+s_3\right]\frac{\chi}{1+ct}=0.
$$

Jeśli $s_1 = s_2' = 0$, to (5.5) prowadzi do drgań harmonicznych. Jeśli natomiast $s_1 \neq 0$ lub $s_2 \neq 0$, to przez podstawienie

$$\left(\frac{\chi}{1+ct}\right)^{\bullet} = \frac{\chi}{1+ct} u(t) \tag{5.6}$$

można sprowadzić równanie (5.5) do równania Riccatiego i scałkować w standardowy sposób.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. Wesołowski, *Stability of a full elastic sphere uniformly loaded on the surface*, Arch. Mech. Stos., **16**, 5, 1964.
2. A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical elasticity*, Oxford 1954.
3. A. E. Green, R. S. Rivlin, R. T. Shield, *General theory of small elastic deformations*, Proc. Roy. Soc., **A211**, 1952.
4. S. Zahorski, *Some problems of motion and stability for hygrosteric materials*, Arch. Mech. Stos., **15**, 6, 1963.
5. E. Kamke, *Differentialgleichungen*, Leipzig 1964.
6. F. D. Murnaghan, *Finite deformations of an elastic solid*, New York 1951.

Резюме

МАЛЫЕ ТОЧЕЧНО-СИММЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ, ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ

Рассматривается малое движение, наложенное на упругую сферу, внешний радиус которой изменяется равномерно во времени. После определения основных деформаций предполагается, что на нее наложено поле малых перемещений, изменяющихся во времени. Найдены уравнения, которым удовлетворяют эти малые перемещения и обнаружено их тривиальное решение. После разложения добавочных перемещений в ряд Фурье по сферическим функциям, обсуждается случай, когда решение является произведением функции времени и функции остальных переменных. Указано, что в этом случае возможны лишь радиальные колебания. В заключение обсуждается плоская волна, распространяющаяся в деформирующейся сфере.

Summary

SMALL CENTRALLY SYMMETRIC VIBRATIONS OF THE ELASTIC MEDIUM SUBJECT TO TIME-DEPENDENT DEFORMATIONS

A small motion is superimposed on the finite motion of a sphere with the radius increasing uniformly with time. The fundamental deformation determined, a small time-dependent displacement field is imposed on this motion. The equations to be satisfied by these small displacements are found, their trivial solutions being derived. After expanding the additional displacements into a Fourier series of spherical functions the case is considered when the solution is a product of a function of time and a function of the remaining variables. It is shown that the only possible vibrations are, in this case, radial vibrations of the sphere.

A plane wave propagating in the sphere undergoing the finite deformation is considered.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 marca 1971 r.