

KRZYWIZNA I WYDŁUŻENIE OSI SPRĘŻYSTYCH CYLINDRÓW MIMOŚRODOWYCH  
POD DZIAŁANIEM CIŚNIENIA WEWNĘTRZNEGO

DANUTA ALBIŃSKA (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy rozpatrzmy grubościenny cylinder mimośrodowy, poddany działaniu równomiernego ciśnienia wewnętrznego  $p$  w zakresie sprężystym. Rozpatrywany problem został rozwiązany w r. 1921 przez G. B. JEFFERY'EGO [3], a następnie w r. 1933 przez S. A. CZAPLYGINA i N. S. ARŻANIKOWA [2] jako zagadnienie płaskie w teorii sprężystości we współrzędnych bipolarnych, a więc przy założeniu płaskiego stanu naprężenia lub płaskiego stanu odkształcenia.

Rozwiązania te, mianowicie odnoszące się do płaskiego stanu odkształcenia, mogą być przystosowane do obliczania cylindrów lub rurociągów mimośrodowych. Celem obecnej pracy jest właśnie wyprowadzenie efektywnych wzorów na moment zginający  $M$  i siłę podłużną  $N$ , które to wielkości odpowiadają płaskiemu stanowi odkształcenia, przyjętemu w rozwiązaniu Jeffery'ego. Zasadnicza trudność polega na obliczaniu dość złożonych całek występujących we wzorach ogólnych, ziterowanych we współrzędnych bipolarnych. Korzystając z wyprowadzonych wzorów będziemy następnie mogli określić krzywiznę  $\kappa$  i wydłużenie osi  $\varepsilon_0$  rozpatrywanego cylindra, jeżeli nie działa nań ani moment zginający, ani siła podłużna. Opierając się na zasadzie superpozycji należy mianowicie przyłożyć dodatkowo moment zginający i siłę podłużną, zatem poszukiwane wielkości geometryczne wyniosą:

$$(1.1) \quad \kappa = -\frac{M}{EJ_\xi}, \quad \varepsilon_0 = -\frac{N}{EF},$$

gdzie  $J_\xi$  i  $F$  oznaczają odpowiednio moment bezwładności i pole powierzchni przekroju. Zasada superpozycji pozwoli również wtedy na rozwiązanie dowolnego przypadku złożonego.

2. Rozkład naprężeń

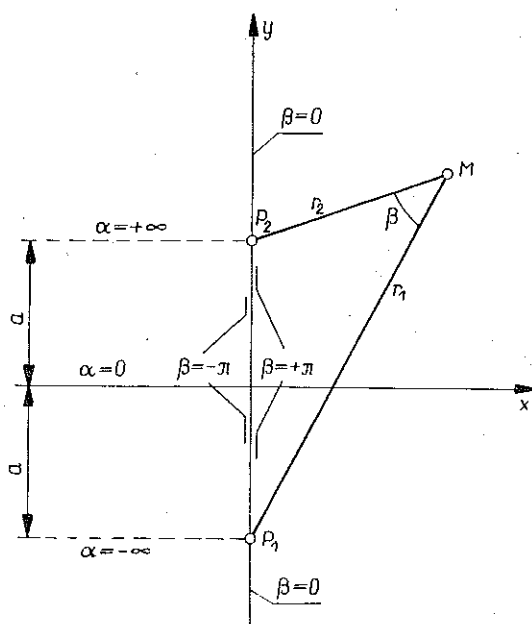
Przyjmijmy współrzędne bipolarne  $\alpha$  i  $\beta$  określone na rys. 1 i za pomocą wzorów następujących:

$$\alpha = \lg \frac{r_1}{r_2}, \quad \beta = \angle P_1 M P_2.$$

Współrzędne te są związane ze współrzędnymi kartezjańskimi  $x, y$  następująco:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x &= \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, & y &= \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \\ \operatorname{sh} \alpha &= \frac{2ay}{\sqrt{(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2 y^2}}, \\ \sin \beta &= \frac{2ax}{\sqrt{(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2 y^2}}, \end{aligned}$$

gdzie  $a$  oznacza połowę odległości między biegunami. We współrzędnych tych układ równań  $\alpha = \alpha_1$  i  $\alpha = \alpha_2$  określa kontur przekroju pewnego cylindra mimośro-



Rys. 1

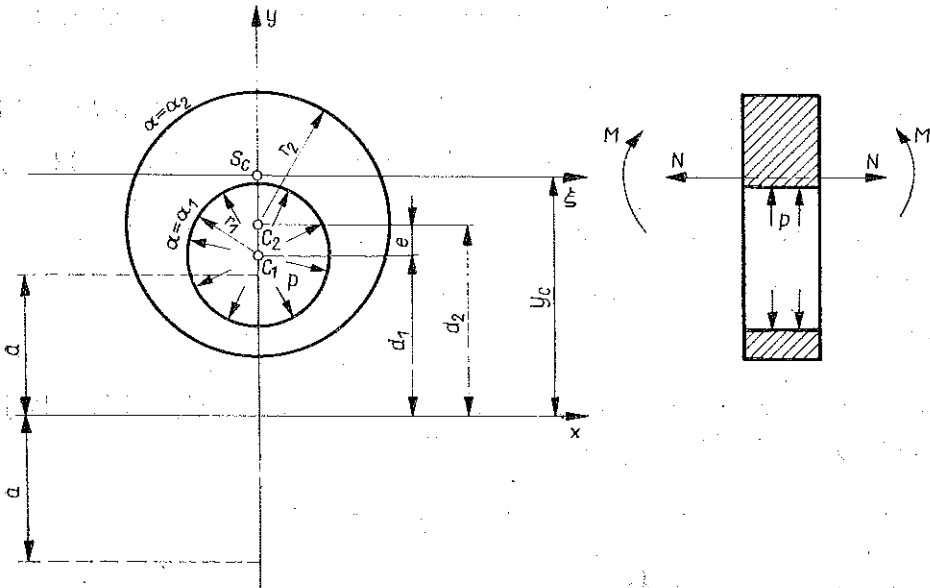
dowego (rys. 2). Między promieniami  $r_1$  i  $r_2$  oraz mimośrodem cylindra  $e$  z jednej strony, a stałymi  $\alpha_1, \alpha_2$  oraz  $a$  — z drugiej, można przy tym wprowadzić następujące związki:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} r_1 &= \frac{a}{\operatorname{sh} \alpha_1}, & \operatorname{ch} \alpha_1 &= \frac{r_2^2 - r_1^2 - e^2}{2er_1}, \\ r_2 &= \frac{a}{\operatorname{sh} \alpha_2}, & \operatorname{ch} \alpha_2 &= \frac{r_2^2 - r_1^2 + e^2}{2er_2}, \end{aligned}$$

$$e = a (\operatorname{cth} \alpha_2 - \operatorname{cth} \alpha_1), \quad a = \frac{1}{2e} \sqrt{(e^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2}.$$

Wzory na naprężenia promieniowe  $\sigma_\alpha$  i obwodowe  $\sigma_\beta$  napiszemy w postaci zaczerpniętej z monografii JA. S. UFLANDA [4]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} a\sigma_\alpha &= \left[ (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] (g\Phi), \\ a\sigma_\beta &= \left[ (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] (g\Phi). \end{aligned}$$



Rys. 2

Występująca tu funkcja naprężeń  $g\Phi$  posiada postać

$$(2.4) \quad g\Phi = H\alpha(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + (A \operatorname{ch} 2\alpha + B + C \operatorname{sh} 2\alpha) \cos \beta,$$

gdzie stałe  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $H$  w przypadku ciśnienia wewnętrznego,  $p_w = p$ , i braku ciśnienia zewnętrznego,  $p_z = 0$ , wynoszą

$$(2.5) \quad \begin{aligned} A &= -\frac{a \operatorname{sh}(\alpha_1 + \alpha_2)}{2 \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2)} p, \\ B &= \frac{a [\operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sh} 2\alpha_2 + \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2)]}{2 \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2)} p, \\ C &= \frac{a \operatorname{ch}(\alpha_1 + \alpha_2)}{2 \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2)} p, \\ H &= \frac{a \operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2)} p. \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu funkcji  $g\Phi$  we wzorach (2.3) otrzymamy

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{1}{a} [-H \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + A \operatorname{ch} 2\alpha + C \operatorname{sh} 2\alpha - \\ &\quad - 2 \operatorname{sh} \alpha \cos \beta (A \operatorname{sh} 2\alpha + C \operatorname{ch} 2\alpha) + B], \\ \sigma_\beta &= \frac{1}{a} [H \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + A \operatorname{ch} 2\alpha + C \operatorname{sh} 2\alpha - 2 \operatorname{sh} \alpha \cos \beta (A \operatorname{sh} 2\alpha + \\ &\quad + C \operatorname{ch} 2\alpha) + 4 \cos \beta (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) (A \operatorname{ch} 2\alpha + C \operatorname{sh} 2\alpha) + B]. \end{aligned}$$

Naprężenia  $\sigma_z$  są przy tym określone prawem Hooke'a w przypadku płaskiego stanu odkształcenia:

$$(2.7) \quad \sigma_z = \nu (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) = \frac{\nu}{a} [2A \operatorname{ch} 2\alpha + 2C \operatorname{sh} 2\alpha - 4 \cos \beta \operatorname{sh} \alpha (A \operatorname{sh} 2\alpha + C \operatorname{ch} 2\alpha) + \\ + 4 \cos \beta (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) (A \operatorname{ch} 2\alpha + C \operatorname{sh} 2\alpha) + 2B].$$

### 3. Określenie momentu zginającego w przypadku płaskiego stanu odkształcenia

Wyrażenie na moment zginający otrzymamy ze wzoru

$$(3.1) \quad M = - \int \int_{(F)} \sigma_z (y - y_c) dF,$$

gdzie współrzędna  $y_c$  pokazana na rys. 2 określa położenie środka ciężkości przekroju poprzecznego cylindra mimośrodowego i wynosi

$$(3.2) \quad y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{(e - r_2)^2 - r_1^2}{2e} + \frac{er_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} + r_2$$

lub po wykorzystaniu zależności (2.2)

$$(3.3) \quad y_c = a \left[ \frac{\operatorname{ch} \alpha_2 - 1}{\operatorname{sh} \alpha_2} + \frac{\operatorname{sh} \alpha_2 \operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{sh} \alpha_1 (\operatorname{sh}_2 \alpha_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_2)} + \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_2} \right].$$

Znak «minus» we wzorze (3.1) wynika z przyjęcia ogólnie stosowanej umowy o znaku momentu zginającego (rys. 2). Do całkowania zastosujemy współrzędne bipolarne, ponieważ obszar całkowania jest wtedy określony w sposób wyjątkowo prosty:

$$(3.4) \quad \alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1, \quad -\pi \leq \beta \leq +\pi.$$

Podstawimy zatem

$$dF = |J| d\alpha d\beta,$$

gdzie jacobian  $|J|$  wynosi

$$(3.5) \quad |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2}.$$

Wobec powyższego i wobec wzoru (2.7) wyrażenie na moment zginający przybierze postać

$$M = - \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \frac{va}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^3} [(4Aa \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + 4Ca \operatorname{sh}^2 \alpha - 4Ay_c \operatorname{ch}^3 \alpha + \right. \\ - 4Cy_c \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + 2Ay_c \operatorname{ch} 2\alpha + 2Cy_c \operatorname{sh} 2\alpha + 2By_c) \cos \beta + (4Ay_c \operatorname{ch} \alpha + \\ + 4Cy_c \operatorname{sh} \alpha - 4Aa \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} 2\alpha - 4Ca \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} 2\alpha + \\ + 4Ay_c \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} 2\alpha + 4Cy_c \operatorname{sh} 2\alpha \operatorname{ch} \alpha) \cos^2 \beta - (4Ay_c \operatorname{ch} 2\alpha + 4Cy_c \operatorname{sh} 2\alpha) \cos^3 \beta + \\ \left. + (2Aa \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} 2\alpha + 2Ca \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} 2\alpha + 2Ba \operatorname{sh} \alpha - 2Ay_c \operatorname{ch} 2\alpha + \right. \\ \left. - 2Cy_c \operatorname{sh} 2\alpha \operatorname{ch} \alpha - 2By_c \operatorname{ch} \alpha) \right\} d\beta d\alpha.$$

Całkowanie przeprowadzimy w kolejności względem zmiennej  $\beta$ , a następnie — zmiennej  $\alpha$ . Przy całkowaniu względem  $\beta$  otrzymamy cztery całki typu

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos^n \beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^3} d\beta, \quad n=0, 1, 2, 3,$$

które przez rozkład na ułamki proste sprowadzają się do trzech całek

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^m}, \quad m=1, 2, 3.$$

Wartości tych ostatnich zaczerpnięto z tablic J. S. GRADSZTEINA i J. M. RYŻIKA [2] w formie bezpośredniej bądź po wykorzystaniu odpowiednich wzorów rekurencyjnych

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} = \frac{2\pi}{\operatorname{sh} \alpha},$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} = \frac{2\pi \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{sh}^3 \alpha},$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\beta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^3} = \frac{\pi}{\operatorname{sh}^5 \alpha} (2\operatorname{ch}^2 \alpha + 1),$$

tak że do całkowania względem zmiennej  $\alpha$  otrzymamy wzór

$$M = - \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \left\{ \frac{2\pi va}{\operatorname{sh}^5 \alpha} [3Aa \operatorname{sh} \alpha + 2Ay_c (4 \operatorname{sh}^7 \alpha - 4 \operatorname{sh}^6 \alpha \operatorname{ch} \alpha + 2 \operatorname{sh}^5 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha \operatorname{ch} \alpha) + \right. \\ \left. - 4Cy_c (2 \operatorname{sh}^7 \alpha - 2 \operatorname{sh}^6 \alpha \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh}^5 \alpha) \right] d\alpha.$$

Po wykonaniu całkowania względem  $a$  oraz po podstawieniu  $y_c$  ze wzoru (3.3) i stałych  $A$  i  $C$  z p. 2 i przeprowadzeniu licznych redukcji otrzymamy ostateczny wzór na moment zginający w formie następującej:

$$(3.6) \quad M = \frac{2\pi v a^3 \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_2)} P.$$

Po wprowadzeniu parametrów  $r_1$ ,  $r_2$  i  $e$  wzór (3.6) można napisać w formie

$$(3.7) \quad M = \frac{2\pi v r_1^2 r_2^2 e}{r_2^2 - r_1^2} P.$$

#### 4. Określenie siły podłużnej w przypadku płaskiego stanu odkształcenia

Wartość siły podłużnej można wyznaczyć ze wzoru

$$(4.1) \quad N = \int \int_{(F)} \sigma_z dF.$$

Po wykorzystaniu wyrażeń na  $\sigma_z$  i  $dF$  z p. 2 i 3 oraz odpowiednim scałkowaniu otrzymamy

$$(4.2) \quad N = \frac{\pi v a^2 p}{\operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2)} \left\{ (\operatorname{cth}^2 \alpha_2 - \operatorname{cth}^2 \alpha_1) \times \right. \\ \left. \times [\operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) - \operatorname{sh}(\alpha_1 + \alpha_2) + \operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sh} 2\alpha_2] + 4\operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) \right\},$$

a po zastosowaniu prostych przekształceń wzór na siłę podłużną przybierze ostatecznie postać:

$$(4.3) \quad N = \frac{2\pi v a^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha_1} p$$

lub

$$(4.4) \quad N = 2\pi v e r_1^2 p.$$

#### 5. Przypadek czystego ciśnienia wewnętrznego i przypadki złożone

W przypadku cylindra mimośrodowego, poddanego tylko działaniu ciśnienia wewnętrznego  $p_w = p$ , krzywizna  $\kappa$  oraz wydłużenie  $\varepsilon_0$  osi rozpatrywanego cylindra, po wykorzystaniu wzorów (3.6) i (4.3) na moment zginający i siłę podłużną, wyrażają się przez parametry  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i  $a$  oraz  $r_1$ ,  $r_2$  i  $e$  w sposób następujący:

$$(5.1) \quad \kappa = - \frac{2\pi a^3 v \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_2)} \frac{P}{EJ_\xi}$$

lub

$$\kappa = - \frac{2\pi v r_1^2 r_2^2 e}{r_2^2 - r_1^2} \frac{P}{EJ_\xi}$$

oraz

$$(5.2) \quad \varepsilon_0 = -\frac{2\pi a^2 \nu}{\text{sh}^2 \alpha_1} \frac{p}{EF} \quad \text{lub} \quad \varepsilon_0 = -2\pi \nu r_1^2 \frac{P}{EF}.$$

Jeżeli natomiast ten sam cylinder poddany zostanie dodatkowo działaniu momentu zginającego i siły podłużnej, to zgodnie z zasadą superpozycji otrzymujemy

$$(5.3) \quad \kappa = -\frac{2\pi \nu r_1^2 r_2^2 e}{r_2^2 - r_1^2} \frac{p}{EJ_\xi} + \frac{M}{EJ_\xi}$$

oraz

$$(5.4) \quad \varepsilon_0 = -2\pi \nu r_1^2 \frac{p}{EF} + \frac{N}{EF}.$$

Naprężenia  $\sigma_\alpha$  i  $\sigma_\beta$  są określone w przypadku złożonym wzorami (2.6), natomiast naprężenia  $\sigma_z$  określa wtedy wzór

$$(5.5) \quad \sigma_z = \sigma_z^{(0)} - \frac{y-y_c}{J_\xi} \left( M - \frac{2\pi \nu r_1^2 r_2^2 e}{r_2^2 - r_1^2} p \right) + \frac{1}{F} (N - 2\pi \nu r_1^2 p),$$

gdzie  $\sigma_z^{(0)}$  oznacza naprężenia w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, określone wzorem (2.11).

## 6. Przykład liczbowy

Podamy obecnie przykład liczbowy wyznaczenia krzywizny i wydłużenia osi cylindra mimośrodowego, poddanego działaniu jedynie ciśnienia wewnętrznego, wykonanego z materiału o stałych materiałowych:  $E=2,1 \times 10^6$  kG/cm<sup>2</sup> oraz  $\nu=0,3$ . Dane liczbowe:  $\alpha_1=2$ ,  $\alpha_2=1$ ,  $a=1$ .

Dla powyższych danych podstawowe wielkości geometryczne będą posiadać następujące wartości:

$$r_1 = \frac{1}{\text{sh} \alpha_1} = 0,2757, \quad r_2 = \frac{1}{\text{sh} \alpha_2} = 0,8509,$$

$$e = a (\text{cth} \alpha_2 - \text{cth} \alpha_1) = 0,2757, \quad F = r_2^2 - r_1^2 = 2,0354$$

oraz moment bezwładności względem osi  $\xi$ :

$$J_\xi = \pi \left[ \frac{r_2^4 - r_1^4}{4} + \frac{(r_2^2 - 2r_1^2) r_1^2 e^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] = 0,4232.$$

Przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia moment zginający oraz siła podłużna, opierając się na wzorach (3.6) i (4.3), przyjęłyby wartości

$$M = \frac{2\pi a^3 \nu \text{sh} (\alpha_1 - \alpha_2)}{\text{sh} \alpha_1 \text{sh} \alpha_2 (\text{sh}^2 \alpha_1 - \text{sh}^2 \alpha_2)} p = +0,04414 p,$$

$$N = \frac{2\pi a^2 \nu}{\text{sh}^2 \alpha_1} p = 0,1433 p.$$

Wobec tego krzywizna i wydłużenie osi cylindra określone wzorami (1.1) wyniosą w rozpatrywanym przypadku czystego ciśnienia wewnętrznego:

$$\kappa = -\frac{M}{EJ_{\xi}} = -0,4952 \times 10^{-7}$$

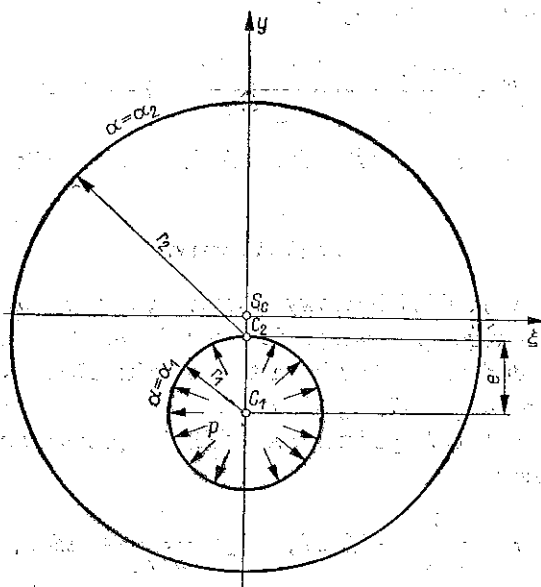
oraz

$$\varepsilon_0 = -\frac{N}{EF} = -0,3352 \times 10^{-7}$$

a stałe  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $H$ , występujące we wzorach na naprężenie  $\sigma_{\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta}$  i  $\sigma_z$ , określone są wzorami (2.5), (2.6) i (2.7); po podstawieniu danych liczbowych wyniosą:

$$A = -0,2932 p, \quad B = 0,1982 p,$$

$$C = 0,2946 p, \quad H = 0,0903 p.$$



Rys. 3

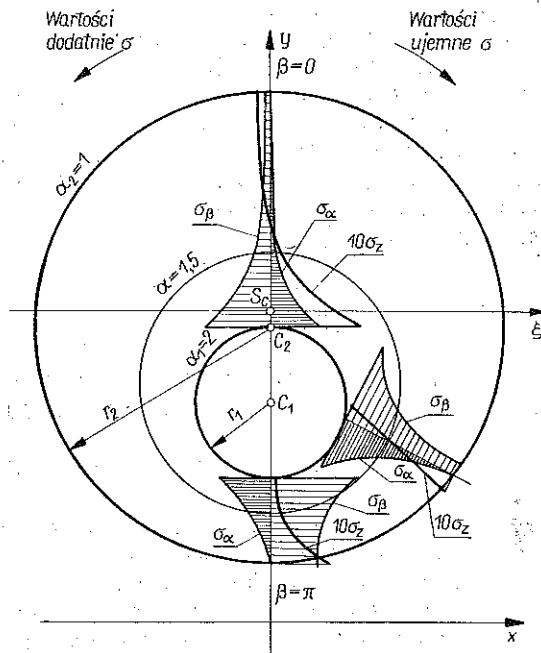
Po uwzględnieniu tych stałych oraz odpowiednich danych liczbowych wyrażenia na naprężenia przyjmą ostatecznie następującą postać:

$$\sigma_{\alpha} = [-0,0903 \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) - 0,2932 \operatorname{ch} 2\alpha + 0,2946 \operatorname{sh} 2\alpha + \\ + \operatorname{sh} \alpha \cos \beta (0,5864 \operatorname{sh} 2\alpha - 0,5892 \operatorname{ch} 2\alpha) + 0,1982] p,$$

$$\sigma_{\beta} = [0,0903 \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) - 0,2932 \operatorname{ch} 2\alpha + 0,2946 \operatorname{sh} 2\alpha + \\ + \operatorname{sh} \alpha \cos \beta (0,5864 \operatorname{sh} 2\alpha - 0,5892 \operatorname{ch} 2\alpha) - \\ - \cos \beta (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) (1,1728 \operatorname{ch} 2\alpha - 1,1784 \operatorname{sh} 2\alpha) + 0,1982] p,$$

$$\sigma_z^{(0)} = [-0,1759 \operatorname{ch} 2\alpha + 0,1768 \operatorname{sh} 2\alpha + \operatorname{sh} \alpha (0,3518 \operatorname{sh} 2\alpha - 0,3535 \operatorname{ch} 2\alpha) \cos \beta - \\ - (0,3518 \operatorname{ch} 2\alpha - 0,3535 \operatorname{sh} 2\alpha) \cos \beta (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + 0,1189] p.$$





Rys. 4

Na rys. 4 pokazano wykresy funkcji  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  i  $\sigma_z$ ; ta ostatnia jest określona wzorem (5.5) przy podstawieniu  $M=N=0$ . Rozkład naprężeń dla  $\beta=\pi/2$  naniesiono na odcinek linii prostej, zamiast na odcinek łuku koła  $\beta=\text{const}$ , aby uniknąć zniekształcenia obrazu.

#### Literatura cytowana w tekście

1. С. А. Чаплыгин, Н. С. Аржаняков, *К вопросу о деформации трубы, ограниченной двумя эксцентрическими цилиндрами и сжатой постоянным давлением*, Труды ЦАГИ, вып. 123, 1933.
2. Я. С. Градштейн, Я. М. Рыжик, *Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений*, 1962, 107–143.
3. G. V. JEFFERY, *Plane stress and plane strain in bipolar coordinates*, Phil. Trans. Roy. Soc., London, ser. A, 221 (1921), 265.
4. Я. С. Уфланд, *Биполярные координаты в теории упругости*, 1960.

#### Резюме

#### КРИВИЗНА И УДЛИНЕНИЕ ОСИ УПРУГИХ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ДЕЙСТВИЮ РАВНОМЕРНОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

В работе рассматривается толстостенный упругий эксцентрический цилиндр, под влиянием равномерного внутреннего давления  $p$ .

Для этой цели, использовано известное решение для цилиндра, находящегося в условиях плоского деформированного состояния, когда он находится под влиянием известного изги-

бающего момента  $M$  и продольной силы  $N$ . Чтобы решить случай чистого внутреннего давления следует, согласно способу сложения действия сил, приложить добавочно изгибающий момент ( $-M$ ) и продольную силу ( $-N$ ).

Для определения этих величин выводятся формулы, проводя соответствующее интегрирование в биполярных координатах. Затем определяется кривизна  $\kappa$  и удлинение  $\varepsilon_0$  оси рассматриваемого цилиндра, для случая чистого внутреннего давления, что на основе способа сложения действия сил, позволит также, решить произвольный сложный случай. Численный пример показывает распределение напряжений в эксцентрическом цилиндре под влиянием чистого внутреннего давления.

### Summary

#### THE CURVATURE AND ELONGATION OF ELASTIC AXES OF ECCENTRIC CYLINDERS UNDER THE INFLUENCE OF INTERNAL PRESSURE

A thick-walled elastic eccentric cylinder is here considered, subjected to the action of a uniform internal pressure  $p$ .

For this purpose known solutions were utilized for a cylinder under the conditions of a plane state of deformation when a certain bending moment  $M$  and a longitudinal force  $N$  are acting upon it. To solve the problem of pure internal pressure, it is necessary, in accordance with the principle of superposition, to apply additionally a bending moment ( $M$ ) and a longitudinal force ( $-N$ ).

In the paper, formulae are derived for these quantities by performing corresponding integration in bipolar coordinates. Further, the curvature  $\kappa$  and elongation  $\varepsilon_0$ , are determined for the axis of the cylinder under consideration in the case of pure internal pressure, which on the basis of the principle of superposition makes it possible to solve also any complex case. A numerical example gives the distribution of stresses in the eccentric cylinder under the action of pure internal pressure.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji 30 października 1969 r.*