ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, **16** (1968)

ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ W NIESKOŃCZONEJ PŁYCIE ZŁOŻONEJ

SANJIB KUMAR CHAKRABARTI (WEST-BENGAL, INDIA)

W pracy otrzymano wzory dla naprężeń i przemieszczeń w dwu złączonych z sobą półnieskończonych płytach izotropowych o różnych własnościach sprężystych, poddanych działaniu momentu skupionego w dowolnym ich punkcie wewnętrznym.

Zagadnienie wyznaczania naprężeń w półnieskończonej płycie, poddanej działaniu siły lub momentu przyłożonego wewnątrz płyty, było rozwiązane przez GHOSHA (1937), STEVENSONA (1945) i SENA (1946). Zagadnienia tego rodzaju można rozwiązać stosując teorię funkcji zmiennej zespolonej (MUSCHELISZWILI, 1953). Jednak metoda półodwrotna, stosowana przez Sena, pozwala niekiedy szybciej otrzymać rozwiązania. W pracy uogólniono metodę Sena na przypadek ośrodka złożonego. Autor przypuszcza, że nie była ona wcześniej stosowana przez innych. Należy nadmienić, że podobne zagadnienia dla płyt złożonych, poddanych działaniu sił wewnętrznych, były rozwiązane przez FRASIERA i RONGUEDA (1957), SUCHARA (1963) oraz IYENGARA i ALWARA (1964).

Rozwiązanie zagadnienia

Skierujmy oś X wzdłuż linii złączenia dwóch płyt. Niech R_1 ($y \geqslant 0$) i R_2 ($y \leqslant 0$) będą obszarami, w których są położone te dwie płyty. Przyjmijmy oznaczenia:

$$\lambda_r, \mu_r, \sigma_r \text{ stałe sprężyste w } R_r \ (r=1,2),$$
$$u, v \text{ przemieszczenia w } R_r,$$
$$\widehat{XX}_r, \ \widehat{YY}_r, \ \widehat{XY}_r \text{ naprężenia w } R_r.$$

Przemieszczenia i naprężenia, wywołane przyłożeniem momentu Q w punkcie (O, k), gdzie k jest dodatnie, określone są wzorami:

$$u_0 = \operatorname{Re}\left[-\frac{Qi}{4\pi\mu_1(z-ik)}\right] = -\frac{Q(y-k)}{4\pi\mu_1\{x^2+(y-k)^2\}},$$

$$(1) \qquad v_0 = \operatorname{Re}\left[\frac{Q}{4\pi\mu_1(z-ik)}\right] = \frac{Qx}{4\pi\mu_1\{x^2+(y-k)^2\}},$$

$$\widehat{XX}_0 = \lambda_1\Delta + 2\mu_1\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{Q}{\pi}\frac{x(y-k)}{\{x^2+(y-k)^2\}^2},$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{YY}_0 &= \lambda_1 \Delta + 2\mu_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{Q}{\pi} \frac{x(y-k)}{\{x^2+(y-k)^2\}^2}, \\
\widehat{XY}_0 &= \mu_1 \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = -\frac{Q}{2\pi} \frac{\{x^2-(y-k)^2\}}{\{x^2-(y-k)^2\}^2},
\end{aligned} \tag{1}
$$

gdzie $z = x+iy$ oraz $i = \sqrt{-1}$.

Podobnie jak to zrobił Sen, naprężenia i przemieszczenia w płycie izotropowej przedstawimy w postaci:

$$
\begin{aligned}
\widehat{XX} &= \mathrm{Re}\,[iy\varphi_1''(z) - y\varphi_2''(z) + \varphi_1'(z) + 2i\varphi_2'(z)], \\
\widehat{XY} &= \mathrm{Re}\,[-y\varphi_1''(z) - iy\varphi_2''(z) - \varphi_2'(z)], \\
\widehat{YY} &= \mathrm{Re}\,[-iy\varphi_1''(z) + y\varphi_2''(z) + \varphi_1'(z)], \\
u &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{E}\left\{i(1+\sigma)\, y\varphi_1'(z) - (1+\sigma)\, y\varphi_2'(z) + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + (1-\sigma)\,\varphi_1(z) + 2i\varphi_2(z)\right\}\right], \\
v &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{E}\left\{-(1+\sigma)\, y\varphi_1'(z) - i(1+\sigma)\, y\varphi_2'(z) - \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. 2i\varphi_1(z) + (1-\sigma)\,\varphi_2(z)\right\}\right].
\end{aligned} \tag{2}
$$

Przyjmijmy, że w obszarze R_1

$$
\varphi_1(z) = \frac{Ai}{z+ik}, \qquad \varphi_2(z) = \frac{B}{z+ik}, \tag{3}
$$

wówczas możemy naprężenia i przemieszczenia wyrazić wzorami:

$$
\begin{aligned}
\widehat{XX}_1 &= -\frac{2(A+B)\, xy\,\{x^2-3(y+k)^2\}}{\{x^2+(y+k)^2\}^3} - \frac{2(A+2B)\, x(y+k)}{\{x^2+(y+k)^2\}^2}, \\
\widehat{YY}_1 &= \frac{2(A+B)\, xy\,\{x^2-3(y+k)^2\}}{\{x^2+(y+k)^2\}^3} - \frac{2Ax(y+k)}{\{x^2+(y+k)^2\}^2}, \\
\widehat{XY}_1 &= -\frac{2(A+B)\, y(y+k)\,\{3x^2-(y+k)^2\}}{\{x^2+(y+k)^2\}^3} + \frac{B\{x^2-(y+k)^2\}}{\{x^2+(y+k)^2\}^2}, \\
u_1 &= \frac{(1+\sigma_1)}{E_1} \frac{(A+B)\, y\,\{x^2-(y+k)^2\}}{\{x^2+(y+k)^2\}^2} + \frac{\{(1-\sigma_1)A+2B\}(y+k)}{E_1\{x^2+(y+k)^2\}}, \\
v_1 &= \frac{(1+\sigma_1)}{E_1} \frac{2(A+B)\, xy(y+k)}{\{x^2+(y+k)^2\}^2} + \frac{\{2A+(1-\sigma_1)B\}\, x}{E_1\{x^2+(y+k)^2\}}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Dla obszaru R_2 przyjmujemy, że

$$
\varphi_1(z) = \frac{Ci}{z-ik}, \qquad \varphi_2(z) = \frac{D}{z-ik}. \tag{5}
$$

Naprężenia i przemieszczenia w obszarze R_2 określają wtedy wzory:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{XX}_2 = -\frac{2(C+D)\,xy\{x^2-3(y-k)^2\}}{\{x^2+(y-k)^2\}^3} - \frac{2(C+2D)\,x(y-k)}{\{x^2+(y-k)^2\}^2},\\
&\widehat{YY}_2 = \frac{2(C+D)\,xy\{x^2-3(y-k)^2\}}{\{x^2+(y-k)^2\}^3} - \frac{2Cx(y-k)}{\{x^2+(y-k)^2\}^2},\\
(6)\qquad &\widehat{XY}_2 = -\frac{2(C+D)\,y(y-k)\{3x^2-(y-k)^2\}}{\{x^2+(y-k)^2\}^3} + \frac{D\{x^2-(y-k)^2\}}{\{x^2+(y-k)^2\}^2},\\
&u_2 = \frac{(1+\sigma_2)}{E_2}\,\frac{(C+D)\,y\{x^2-(y-k)^2\}}{\{x^2+(y-k)^2\}^2} + \frac{\{(1-\sigma_2)C+2D\}(y-k)}{E_2\{x^2+(y-k)^2\}},\\
&v_2 = \frac{(1+\sigma_2)}{E_2}\,\frac{2(C+D)\,xy(y-k)}{\{x^2+(y-k)^2\}^2} + \frac{\{2C+(1-\sigma_2)D\}\,x}{E_2\{x^2+(y-k)^2\}}.
\end{aligned}
$$

Warunki brzegowe dla $y = 0$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{YY}_1+\widehat{YY}_0 &= \widehat{YY}_2,\\
\widehat{XY}_1+\widehat{XY}_0 &= \widehat{XY}_2,\\
u_1+u_0 &= u_2,\\
v_1+v_0 &= v_2.
\end{aligned}
$$

Stąd wynika, że

$$
C+A = \frac{Q}{2\pi}, \qquad D-B = -\frac{Q}{2\pi},
$$

$$
\frac{(1-\sigma_1)}{E_1}A + \frac{2}{E_1}B + \frac{(1-\sigma_2)}{E_2}C + \frac{2}{E_2}D = -\frac{Q}{4\pi\mu_1},
$$

$$
\frac{2}{E_1}A + \frac{(1-\sigma_1)}{E_1}B - \frac{2}{E_2}C - \frac{(1-\sigma_2)}{E_2}D = -\frac{Q}{4\pi\mu_1}.
$$

Rozwiązując powyższy układ równości, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad &A = B = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{\{E_1(1+\sigma_2)-E_2(1+\sigma_1)\}}{\{E_1(1+\sigma_2)+E_2(3-\sigma_1)\}},\\
&C = -D = \frac{2Q}{\pi}\,\frac{E_2}{\{E_1(1+\sigma_2)+E_2(3-\sigma_1)\}}.
\end{aligned}
$$

W rezultacie wzory dla naprężeń i przemieszczeń w R_1 otrzymuje się przez dodanie wyników (1) i (4), a dla obszaru R_2 wielkości te określają wzory (6). Przyjmując $E_2 = 0$ widzimy, że naprężenia znikają w obszarze R_2, a w obszarze R_1 wyrażenia dla naprężeń pokrywają się z wynikami uzyskanymi przez GHOSHA (por. wstęp, jeśli zamienimy między sobą osie X i Y).

Rozkład naprężeń na ściance złączenia $y = 0$ układu, złożonego z płyt półnieskończonych: miedzianej R_1 i mosiężnej R_2, poddanego działaniu pary o momencie Q w punkcie (O, k), jest podany w tablicy 1 z dokładnością do «trzech miejsc po przecinku». Dla stałych sprężystych miedzi i mosiądzu przyjęto następujące wartości:

	E	μ	σ
miedź	15,0	5,6	0,339
mosiądz	13,0	4,9	0,327

gdzie E i μ są podane w milionach funtów na cal kwadratowy.

Tablica 1

x	0	$\pm k$	$\pm 2k$	$\pm 3k$	$\pm 4k$
$\frac{\pi k^2}{Q}(\widehat{YY})_{y=0}$	0	$\mp 0{,}239$	$\mp 0{,}076$	$\mp 0{,}029$	$\mp 0{,}007$
$\frac{\pi k^2}{Q}(\widehat{XY})_{y=0}$	—0,477	0	0,057	0,038	0,025

Na zakończenie autor wyraża serdeczne podziękowanie dr A. CHAKRABARTI z Uniwersytetu w Jadavpur za jego życzliwą pomoc w przygotowaniu pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. LOVE, *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (4th. ed.), Dover Publications, (1927), page 214.
2. GHOSH, Bull. Cal. Math. Soc., **29** (1937), 177–184.
3. STEVENSON, Proc. Roy. Soc., Lond., Ser. A, **184** (1945), page 129.
4. SEN, Proc. Roy. Soc., Lond., Ser. A, **187** (1946), 87–101.
5. FRASIER and RONGUED, J. Appl. Mech., Trans, ASME, Ser. E, **24** (1957), 582–584.
6. M. SUCHAR, Arch. Mech. Stos., **15** (1963), 645–657.
7. IYENGAR and ALWAR, J. Franklin Inst., **278** (1964), page 267.
8. N. I. MUSHKHELISHVILI, *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity* (Translated from the third edition by J.R.M. Radok), P. Nordhoff, Ltd., Groningen Holland, 1953.

Резюме

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СИСТЕМЕ СОЕДИНЕННЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИНОК

В работе выводятся формулы, определяющие напряжения и перемещения в двух полубесконечных соединенных изотропных пластинках, обладающих разными свойствами, подверженных действию момента, приложенного в произвольной точке, внутри одной из пластинок.

Summary

STRESS DISTRIBUTION IN A COMPOSITE INFINITE PLATE

The expressions for stresses and displacements in two semi-infinite isotropic plates connected together, having different elastic properties and acted on by a ouple at any point inside one of them, have been obtained in this paper.

WEST-BENGAL,
CHANDERNAGORE COLLEGE, HOOGHLY
INDIA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 października 1967 r.