Rozprawy Inżynierskie
4, 16 (1968)

NAPRĘŻENIA MOMENTOWE W TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Klasyczna teoria sprężystości opiera się na wyidealizowanym modelu kontinuum sprężystego, w którym przeniesienie obciążeń z jednej części na drugą opisane jest wyłącznie przez wektor główny sił $\mathbf{p}dA$ działających na powierzchni A, rozgraniczającej wymienione części. Założenie to prowadzi do symetrycznego tensora stanu naprężenia i odkształcenia. Model ten dobrze opisuje własności sprężyste w materiałach konstrukcyjnych o strukturze amorficznej (stal, aluminium, beton) przy naprężeniach pozostających w granicach sprężystości materiału. Jednak znaczne różnice między teorią a doświadczeniem występują w miejscach, w których mamy do czynienia ze znacznymi gradientami naprężeń. Chodzi tu o przypadki spiętrzenia naprężeń wokół otworów i nacięć (karbów).

Rozbieżność między doświadczeniem a teorią występuje również w zagadnieniach drgań, przy propagacji fal, wymuszonych wysoką częstotliwością drgań (częstościami występującymi przy zastosowaniu ultradźwięków). Wynika to stąd, że przy wysokich częstotliwościach drgań i nader krótkich długościach fal daje się wyczuwać wpływ mikrostruktury materiału.

Symetryczna teoria sprężystości wreszcie nie opisuje dostatecznie ściśle zjawisk występujących w ośrodkach ziarnistych, przy badaniu fal akustycznych w kryształach, w strukturach polikrystalicznych oraz w wysokich polimerach.

Tym niedostatkom teorii symetrycznej sprężystości starał się zaradzić W. Voigt [1] przez przyjęcie dodatkowego założenia przeniesienia obciążeń przez element powierzchni dA nie tylko przez wektor sił $\mathbf{p}dA$, ale również przez moment wypadkowy $\mathbf{m}dA$. Takie przyjęcie powoduje konieczność działania na elementy objętościowe dV nie tylko naprężeń (force-stresses) σ_{ij}, ale i naprężeń momentowych (couple-stresses) μ_{ij}. Okazuje się, że to dodatkowe założenie prowadzi do powstania niesymetrycznych tensorów stanu naprężenia i odkształcenia.

Pełna teoria takiej niesymetrycznej sprężystości przy założeniu, że deformacja punktu materialnego ciała jest opisana przez niezależne od siebie wektory przemieszczenia $\mathbf{u}$ i obrotu $\boldsymbol{\omega}$, została opracowana przez braci E. i F. Cosseratów [2] w 1910. Teoria ta, nader ogólna, bo geometrycznie nieliniowa — nie została należycie doceniona za życia autorów. Jej renesans przypada na ostatnie dziesięciolecie. Teoria ta została na nowo odkryta i szeroko rozwinięta przez C. Truesdella i R. A. TOUPINA [3]. Dalsze prace R. A. TOUPINA [4] i G. GRIOLI [5] dotyczyły nieliniowej teorii ośrodka Cosseratów. Szczególnie interesująca jest praca R. D. MINDLINA i H. F. TIERSTENA [6], w której autorzy znacznie wzbogacili liniową teorię ośrodka Cosseratów przez wprowadzenie funkcji naprężeń i potencjałów dla ośrodka izotropowego i centrosymetrycznego. Dodać jednak należy, że jest to teoria przybliżona, korzystająca z założenia ograniczającego $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}/2$. Tę szczególną postać teorii ośrodka rozwijali również W. T. KOITER [7] oraz R. MUKI i E. STERNBERG [8].

W szeregu prac z ostatnich lat odstępuje się od ograniczenia $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}/2$ traktując wektory $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\omega}$ jako niezależne od siebie. Wymienić tu należy prace W. GÜNTHERA [9], H. SCHÄFERA [10], prace E. W. KUWSZYŃSKIEGO i E. L. AERO [11], dalej prace N. A. PALMOWA [12] oraz prace A. C. ERINGENA i E. S. SUHUBI [13]. Szereg zagadnień dotyczących koncentracji naprężeń rozwiązał H. NEUBER [14 i 15]. Kilka istotnych twierdzeń zostało podanych w pracy N. SANDRU [16]. Rozwinięcie teorii ośrodka Cosseratów na zagadnienia termosprężystości było przedmiotem kilku prac W. Nowackiego [17–19].

Niniejsze opracowanie jest znacznym rozszerzeniem pracy autora «*Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*», przedstawionej na symposium IUTAM w Wiedniu w 1966 r. [20].

2. Równania ruchu

Rozpatrzmy dowolny obszar ciała V, ograniczony powierzchnią gładką A. Oznaczmy przez $\mathbf{p}dA$ wektor sił, a przez $\mathbf{m}dA$ wektor momentów przenoszonych przez element powierzchniowy A z zewnątrz do wnętrza ciała. Oznaczmy przez $\mathbf{X}dV$ wektor sił masowych, a przez $\mathbf{Y}dV$ wektor momentów masowych. Napiszmy równania równowagi dla dowolnej objętości ciała V:

$$\int_A \mathbf{p}dA + \int_V \mathbf{X}dV = 0\,, \qquad \int_A (\mathbf{r}\times\mathbf{p}+\mathbf{m})\,dA + \int_V (\mathbf{r}\times\mathbf{X}+\mathbf{Y})\,dV = 0\,. \tag{2.1}$$

Tutaj $\mathbf{r}$ jest promieniem wodzącym, liczonym od ustalonego punktu ciała. W układzie prostokątnych współrzędnych kartezjańskich przepiszemy równania (2.1) w następującej postaci:

$$\int_A p_i\, dA + \int_V X_i\, dV = 0\,, \qquad \int_A (\epsilon_{ijk}\, x_j\, p_k + m_i)\, dA + \int_V (\epsilon_{ijk}\, x_j\, X_k + Y_i)\, dV = 0\,, \tag{2.2}$$

$$i, j, k = 1, 2, 3.$$

Zastosujmy równanie (2.2) do nieskończenie małego elementu czworościennego o trzech ścianach prostopadłych do osi układu współrzędnych. Niech n_i oznacza składowe jednostkowego $\mathbf{n}$ normalnej do czwartej ściany. Oznaczymy przez σ_{ji} i μ_{ji} składowe naprężeń sił oraz naprężeń momentowych, a przez $p_i(\mathbf{n})$ i $m_i(\mathbf{n})$ składowe sił i momentów, działających na czwartej ściance czworościanu. Pomijając w równaniach (2.2) całki objętościowe oraz rozciągając całkowanie na powierzchnię czworościanu, otrzymamy

$$p_i(\mathbf{n}) = \sigma_{ji}\, n_j, \qquad m_i(\mathbf{n}) = \mu_{ji}\, n_j\,. \tag{2.3}$$

Uwzględniając pierwszy z tych związków, otrzymamy z $(2.2)_1$

$$\int_V (\sigma_{ji,j}+X_i)\,dV = 0. \tag{2.4}$$

Ze względu na przyjętą dowolność objętości V stwierdzimy, że równanie

$$\sigma_{ji,j}+X_i = 0 \tag{2.5}$$

jest spełnione w każdym punkcie ciała.

Zważywszy na $(2.3)_2$, otrzymamy z równania $(2.2)_2$

$$\int_V [\epsilon_{ijk}\,x_j(\sigma_{lk,l}+X_k)+\epsilon_{ijk}\,\sigma_{jk}+\mu_{ji,j}+Y_i]\,dV = 0. \tag{2.6}$$

Pierwszy wyraz w wyrażeniu podcałkowym jest równy zeru ze względu na równanie (2.5). Ponieważ objętość V obieramy dowolnie, to prawdziwy jest związek

$$\epsilon_{ijk}\,\sigma_{jk}+\mu_{ji,j}+Y_i = 0. \tag{2.7}$$

Tensor naprężenia σ_{ij} jest niesymetryczny. Tensor ten będzie symetrycznym jedynie w przypadku braku momentów masowych Y_i i naprężeń momentowych μ_{ji}. Równanie (2.7) przybiera postać $\epsilon_{ijk}\,\sigma_{jk} = 0$, co prowadzi do teorii symetrycznej sprężystości z symetrią tensora $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Równania (2.5) i (2.7) są równaniami równowagi wewnątrz ciała a równania (2.3) na powierzchni ciała. Związki (2.3) traktować można również jako warunki brzegowe w obciążeniach.

W przypadku zagadnień dynamicznych należy, w myśl zasady d'Alemberta, dodać wyrazy inercyjne. Równania ruchu przyjmą postać

$$\begin{aligned} &\sigma_{ji,j}+X_i = \varrho\ddot{u}_i, \\ &\epsilon_{ijk}\,\sigma_{jk}+\mu_{ji,j}+Y_i = J\ddot{\omega}_i. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Tutaj ϱ oznacza gęstość, a J dynamiczną charakterystyką ośrodka, równą iloczynowi momentu bezwładności cząstek ośrodka względem dowolnej osi, przechodzącej przez jej środek ciężkości, pomnożonemu przez liczbę cząstek w jednostce objętości; symbol ω_i oznacza wektor obrotu.

3. Zasada zachowania energii. Bilans entropii

Zasada zachowania energii zastosowana do objętości ciała V, ograniczonej powierzchnią A, ma postać [20]

$$\frac{d}{dt}\int_V \left[\frac{1}{2}(\varrho v_i\,v_i+J\,w_i\,w_i)+U\right]dV = \int_V (X_i\,v_i+Y_i\,w_i)\,dV + \int_A (p_i\,v_i+m_i\,w_i)\,dA - \int_A q_i\,n_i\,dA, \tag{3.1}$$

gdzie $v_i = \dot{u}_i$, $w_i = \dot{\omega}_i$. Przez U oznaczyliśmy energię wewnętrzną, odniesioną do jednostki objętości, przez q_i — składowe wektora przepływu ciepła. Wyraz po lewej stronie równania (3.1) przedstawia zmianę w czasie energii kinetycznej i energii wewnętrznej. Pierwszy wyraz po prawej stronie przedstawia moc sił i momentów masowych — drugi wyraz moc sił i momentów powierzchniowych. Wreszcie ostatni wyraz wyraża ilość ciepła przekazaną objętości V drogą przewodnictwa cieplnego. Stosując do równania (3.1) twierdzenie o dywergencji oraz biorąc pod uwagę równania ruchu

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \varrho \ddot{u}_i, \qquad \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = J\ddot{\omega}_i, \tag{3.2}$$

otrzymamy równanie

$$\int_V \{\dot{U} - [\sigma_{ji}(v_{i,j} - \epsilon_{kji} w_k) + \mu_{ji} w_{i,j}] + q_{i,i}\} \, dV = 0. \tag{3.3}$$

Równanie to jest spełnione dla dowolnej objętości V. Jeśli wyrażenie podcałkowe jest ciągłe, to związek

$$\dot{U} = \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji}\dot{\varkappa}_{ji} - q_{i,i}, \tag{3.4}$$

gdzie

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \epsilon_{kji}\omega_k, \qquad \varkappa_{ji} = \omega_{i,j}, \tag{3.5}$$

jest spełniony lokalnie. Przez γ_{ji} oznaczyliśmy niesymetryczny tensor odkształcenia, a przez $\varkappa_{ji}$ tensor skręcania.

Równanie bilansu entropii ma postać

$$\int_V \dot{S} dV = -\int_A \frac{q_i n_i}{T} dA + \int_V \Theta dV. \tag{3.6}$$

Lewa strona równania przedstawia wzrost entropii. Pierwszy wyraz po prawej stronie przedstawia wzrost entropii powstały przy wymianie entropii z otoczeniem, drugi wyraz wyraża produkcję entropii, wywołaną przewodnictwem cieplnym.

Stosując twierdzenie o dywergencji mamy

$$\int_V \left[\dot{S} - \Theta - \left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i}\right] dV = 0. \tag{3.7}$$

Dla dowolnego obszaru V i ciągłości wyrażenia podcałkowego spełniony jest lokalnie związek

$$\dot{S} = \Theta - \frac{q_{i,i}}{T} + \frac{q_i T_{,i}}{T^2}. \tag{3.8}$$

Zgodnie z postulatem termodynamiki procesów nieodwracalnych powinno być $\Theta \geqslant 0$.

Eliminując q_i z równań (3.4) i (3.7) i wprowadzając energię swobodną Helmholtza $F = U - ST$, mamy

$$\dot{F} = \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji}\dot{\varkappa}_{ji} - \dot{T}S - T\left(\Theta + \frac{q_i T_{,i}}{T^2}\right). \tag{3.9}$$

Ponieważ energia swobodna jest funkcją zmiennych niezależnych γ_{ji}, $\varkappa_{ji}$, T, to

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ji}}\dot{\gamma}_{ji} + \frac{\partial F}{\partial \varkappa_{ji}}\dot{\varkappa}_{ji} + \frac{\partial F}{\partial T}\dot{T}. \tag{3.10}$$

Założywszy, że funkcje Θ, q_i, ..., σ_{ji}, μ_{ji} nie zależą w sposób jawny od pochodnych czasowych funkcji γ_{ji}, $\varkappa_{ji}$, T i definiując entropię jako $S = -\partial F/\partial T$, otrzymamy z porównania równań (3.9) i (3.10) następujące związki:

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ji}}, \qquad \mu_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \varkappa_{ji}}, \qquad S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \qquad \Theta + \frac{q_i T_{,i}}{T^2} = 0. \tag{3.11}$$

Drugie prawo termodynamiki będzie spełnione, gdy $\Theta \geqslant 0$. Wynika stąd, że

$$-\frac{T_{,i}\,q_i}{T^2} \geqslant 0.$$

Tę nierówność spełnia prawo Fouriera przewodnictwa cieplnego

$$-q_i = k_{ij} T_{,j} \quad \text{lub} \quad -q_i = k_{ij}\,\theta_{,j}, \qquad T = T_0 + \theta. \tag{3.12}$$

Wprowadziliśmy tu temperaturę stanu naturalnego T_0 oraz przyrost temperatury θ.

Z równania (3.8) przy wzięciu pod uwagę związku $(3.11)_4$ oraz (3.12) mamy

$$T\dot{S} = -q_{i,i} = k_{ij}\,\theta_{,ij}. \tag{3.13}$$

Dla ciała jednorodnego i izotropowego związek (3.13) przybiera postać

$$T\dot{S} = k\theta_{,jj}, \tag{3.14}$$

gdzie k jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, wielkością stałą.

4. Równania konstytutywne

Rozwińmy energię swobodną $F(\gamma_{ji}, \varkappa_{ji}, T)$ w otoczeniu stanu naturalnego ($\varkappa_{ji} = 0$, $\gamma_{ji} = 0$, $T = T_0$) w szereg Taylora, pomijając wielkości wyższe od rzędu drugiego.

Dla ciała izotropowego, jednorodnego i centrosymetrycznego (niezmiennego ze względu na obroty) otrzymamy następującą postać rozwinięcia:

$$F = \frac{\mu+\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ji} + \frac{\mu-\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn} + \\ + \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\varkappa_{ji}\varkappa_{ji} + \frac{\gamma-\varepsilon}{2}\varkappa_{ji}\varkappa_{ij} + \frac{\beta}{2}\varkappa_{kk}\varkappa_{nn} - \nu\gamma_{kk}\theta - \chi\varkappa_{kk}\theta - \frac{m}{2}\theta^2. \tag{4.1}$$

Przedstawioną tu postać energii swobodnej uzasadnia się w sposób następujący. Ponieważ energia swobodna jest skalarem, to każdy wyraz po prawej stronie powinien być również skalarem. Otóż ze składowych tensora γ_{ji} można skonstruować trzy niezależne kwadratowe niezmienniki, mianowicie $\gamma_{ji}\gamma_{ji}$, $\gamma_{ji}\gamma_{ij}$ oraz $\gamma_{kk}\gamma_{nn}$. To samo dotyczy tensora $\varkappa_{ij}$. Wyrazy $\gamma_{ji}\varkappa_{ji}$, $\gamma_{ji}\varkappa_{ij}$ oraz $\gamma_{kk}\varkappa_{nn}$ nie pojawiają się w wyrażeniu (4.1), ponieważ byłoby to sprzeczne z postulatem centrosymetryczności. W siódmym i ósmym wyrazie wyrażenia (4.1) występują niezmienniki γ_{kk} i $\varkappa_{kk}$. Wynika to stąd, że z tensorów γ_{ji} i $\varkappa_{ji}$ można uzyskać tylko jeden niezmiennik pierwszego rodzaju, mianowicie γ_{kk} i $\varkappa_{kk}$.

Korzystając ze związków

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ji}}, \quad \mu_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \varkappa_{ji}}, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \tag{4.2}$$

otrzymamy z (4.1) następujące równania konstytutywne:

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu+\alpha)\gamma_{ji}+(\mu-\alpha)\gamma_{ij}+(\lambda\gamma_{kk}-\nu\theta)\delta_{ij}, \\ \mu_{ji} &= (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ji}+(\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ij}+(\beta\varkappa_{kk}-\chi\theta)\delta_{ij}, \\ S &= \nu\gamma_{kk}+\chi\varkappa_{kk}+m\theta. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Związki (4.3) można zapisać w równoważnej postaci

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu\gamma_{(ij)}+2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle}+(\lambda\gamma_{kk}-\nu\theta)\delta_{ij}, \\ \mu_{ij} &= 2\gamma\varkappa_{(ij)}+2\varepsilon\varkappa_{\langle ij\rangle}+(\beta\varkappa_{kk}-\chi\theta)\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Tutaj μ, λ są stałymi Lamégo, $\alpha, \gamma, \varepsilon, \beta$ — nowymi stałymi sprężystości. Wielkości te odnoszą się do stanu izotermicznego. Stałe ν, χ zależą zarówno od własności mechanicznych jak też i termicznych. Symbole ( ) i $\langle\ \rangle$ oznaczają symetryczną i antysymetryczną część tensora.

Rozwiążmy równania (4.4) względem wielkości γ_{ij} i $\varkappa_{ij}$:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \alpha_t\delta_{ij}\theta+2\mu'\sigma_{(ij)}+2\alpha'\sigma_{\langle ij\rangle}+\lambda'\delta_{ij}\sigma_{kk}, \\ \varkappa_{ij} &= \beta_t\delta_{ij}\theta+2\gamma'\mu_{(ij)}+2\varepsilon'\mu_{\langle ij\rangle}+\beta'\delta_{ij}\mu_{kk}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

gdzie

$$\mu' = \frac{1}{4\mu}, \quad \alpha' = \frac{1}{4\alpha}, \quad \gamma' = \frac{1}{4\gamma}, \quad \varepsilon' = \frac{1}{4\varepsilon}, \quad \lambda' = -\frac{\lambda}{6\mu K},$$

$$\beta' = -\frac{\beta}{6\gamma\Omega}, \quad \alpha_t = \frac{\nu}{3K}, \quad \beta_t = \frac{\chi}{3\Omega}, \quad K = \lambda+\frac{2}{3}\mu, \quad \Omega = \beta+\frac{2}{3}\gamma.$$

Rozważmy nieskończenie mały element ciała wolny na swej powierzchni od naprężeń σ_{ij} i μ_{ij}. Wtedy

$$\gamma^0_{ij} = \alpha_t\delta_{ij}\theta, \quad \varkappa^0_{ij} = \beta_t\delta_{ij}\theta. \tag{4.6}$$

Wiemy jednak, że wzrost temperatury wywołać może jedynie odkształcenie bez obrotów. Zatem $\beta_t = 0$ lub $\chi = 0$. Wielkość α_t jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności cieplnej.

Możemy już podać ostateczną postać równań konstytutywnych:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= 2\mu\gamma_{(ij)}+2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle}+(\lambda\gamma_{kk}-\nu\theta)\,\delta_{ij}\,,\\
\mu_{ij} &= 2\gamma\varkappa_{(ij)}+2\varepsilon\varkappa_{\langle ij\rangle}+\beta\varkappa_{kk}\,\delta_{ij}\,,\\
S &= \nu\gamma_{kk}+m\theta\,.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Wielkość m występującą w związku wyznaczymy z następujących rozważań. Rozważmy zależność różniczkową

$$
dU = \sigma_{ji}\,d\gamma_{ji}+\mu_{ji}\,d\varkappa_{ji}+TdS\,. \tag{4.8}
$$

Wstawiając do (4.8) wyrażenie

$$
dS = \left(\frac{\partial S}{\partial\gamma_{ji}}\right)_{\varkappa,T} d\gamma_{ji}+\left(\frac{\partial S}{\partial\varkappa_{ji}}\right)_{\gamma,T} d\varkappa_{ji}+\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\gamma,S} dT \tag{4.9}
$$

i uwzględniając warunki zupełności różniczki dU, dochodzimy do zależności

$$
\left(\frac{\partial S}{\partial\gamma_{ji}}\right)_{\varkappa,T}-\nu\delta_{ij}=0\,,\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial\varkappa_{ji}}\right)_{\gamma,T}=0\,. \tag{4.10}
$$

Wstawiając (4.10) do (4.8) i (4.9) i zważywszy, że $(\partial S/\partial T)_{\gamma,T}=c_\varepsilon/T$, gdzie c_ε oznacza ciepło właściwe przy stałej deformacji, otrzymamy

$$
\begin{aligned}
dU &= \sigma_{ji}\,d\gamma_{ji}+\mu_{ji}\,d\varkappa_{ji}+T\nu d\gamma_{kk}+c_\varepsilon\,dT\,,\\
dS &= \nu d\gamma_{kk}+c_\varepsilon\frac{dT}{T}\,.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Całkując $(4.11)_2$ przy założeniu, że $S=0$ dla stanu naturalnego, otrzymamy

$$
S=\nu\gamma_{kk}+c_\varepsilon\log\frac{T}{T_0}\,. \tag{4.12}
$$

Zakładając, że $|\theta/T_0|\ll 1$ i rozwijając logarytm w szereg oraz zatrzymując tylko pierwszy wyraz rozwinięcia, mamy

$$
S=\gamma_{kk}\,\nu+\frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta\,. \tag{4.13}
$$

Z porównania $(4.7)_3$ i (4.13) stwierdzimy, że $m=c_\varepsilon/T_0$.

5. Równania różniczkowe termosprężystości

Równania konstytutywne $(4.7)_1$ i $(4.7)_2$ pozwalają już na wyrażenie równań ruchu (2.1) za pomocą przemieszczeń $\mathbf{u}$, obrotów $\boldsymbol{\omega}$ i temperatury θ. Wstawiając $(4.7)_1$ i $(4.7)_2$ do (2.1) oraz posługując się związkami (2.5) i (2.7) otrzymamy następujący, w postaci wektorowej zapisany układ równań [20]:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-(\mu+\alpha)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}+2\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{X}=\varrho\ddot{\mathbf{u}}+\nu\operatorname{grad}\theta\,,\\
&(\beta+2\gamma)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}-(\gamma+\varepsilon)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}+2\alpha\operatorname{rot}\mathbf{u}-4\alpha\boldsymbol{\omega}+\mathbf{Y}=I\ddot{\boldsymbol{\omega}}\,.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Otrzymaliśmy układ sześciu równań z siedmioma niewiadomymi: trzema składowymi przemieszczenia $\mathbf{u}$, trzema obrotu $\boldsymbol{\omega}$ i temperaturą θ. Do równań (5.1) dodać należy równanie przewodnictwa cieplnego. Równanie to otrzymamy, biorąc pod uwagę zależności (3.14) i (4.20)

$$T\dot{S} = k\theta_{,jj}, \quad T\dot{S} = \nu T\dot{\gamma}_{kk} + c_\varepsilon \dot{T}. \tag{5.2}$$

Z porównania tych związków znajdujemy, że

$$\theta_{,jj} - \frac{1}{\varkappa}\dot{\theta} - \eta_0\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right)\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}} = 0, \quad \varkappa = \frac{k}{c_\varepsilon}, \quad \eta_0 = \frac{\nu T_0}{k}. \tag{5.3}$$

Jest to równanie nieliniowe, które daje się zlinearyzować, jeśli przyjąć, że $|\theta/T_0| \ll 1$, co też zakładamy. Biorąc pod uwagę działanie źródeł ciepła w ciele i oznaczając przez W ilość ciepła, odniesioną do jednostki objętości i czasu, otrzymamy następujące, uogólnione równanie przewodnictwa cieplnego:

$$\theta_{,jj} - \frac{1}{\varkappa}\dot{\theta} - \eta_0 \operatorname{div}\dot{\mathbf{u}} = -\frac{Q}{\varkappa}, \quad Q = \frac{W}{k}. \tag{5.4}$$

Zanotujmy, że w równaniu tym występuje jedynie wyraz dylatacyjny $\gamma_{kk} = \operatorname{div}\mathbf{u}$, a nie występuje wyrażenie $\varkappa_{kk}$. Równanie (5.4) posiada tę samą postać, co w przypadku symetrycznej termosprężystości. Równania (5.2) i (5.4) tworzą układ sprzężonych równań termosprężystości w ośrodku Cosseratów. Przyczyną powstawania przemieszczeń $\mathbf{u}$, obrotów $\boldsymbol{\omega}$ i temperatury θ mogą być obciążenia, ogrzanie powierzchni ciała, działanie sił i momentów masowych oraz źródeł ciepła.

Równania termosprężystości należy uzupełnić warunkami brzegowymi i warunkami początkowymi. Jeśli na powierzchni A, ograniczającej ciało o objętości V, dane są siły p_i i momenty m_i oraz temperatura θ, to warunki brzegowe przyjmą postać

$$\begin{gathered} p_i(\mathbf{x},t) = \sigma_{ji}(\mathbf{x},t)\,n_j(\mathbf{x}), \quad m_i(\mathbf{x},t) = \mu_{ji}(\mathbf{x},t)\,n_j(\mathbf{x}), \\ \theta(\mathbf{x},t) = h(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in A, \quad t>0. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Jeśli na brzegu ciała dane są przemieszczenia u_i i obroty ω_i oraz temperatura θ, to

$$\begin{gathered} u_i(\mathbf{x},t) = f_i(\mathbf{x},t), \quad \omega_i(\mathbf{x},t) = g_i(\mathbf{x},t), \\ \theta(\mathbf{x},t) = h(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in A, \quad t>0. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Warunki początkowe wyrażają się wzorami

$$\begin{gathered} u_i(\mathbf{x},0) = r_i(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i(\mathbf{x},0) = s_i(\mathbf{x}), \\ \omega_i(\mathbf{x},0) = l_i(\mathbf{x}), \quad \dot{\omega}_i(\mathbf{x},0) = k_i(\mathbf{x}), \\ \theta(\mathbf{x},0) = t(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in V, \quad t=0. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Wróćmy do równań (5.1) i przedstawmy je w nieco odmiennej postaci:

$$\begin{gathered} \Box_2\,\mathbf{u} + (\lambda+\mu-\alpha)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + 2\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{X} = \nu\operatorname{grad}\theta, \\ \Box_4\,\boldsymbol{\omega} + (\beta+\gamma-\varepsilon)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} + 2\alpha\operatorname{rot}\mathbf{u} + \mathbf{Y} = 0, \end{gathered} \tag{5.8}$$

gdzie

$$\Box_2 = (\mu+\alpha)\nabla^2 - \varrho\partial_t^2, \quad \Box_4 = (\gamma+\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha - J\partial_t^2.$$

Wykonajmy na obu równaniach operację dywergencji. Wprowadzając oznaczenia

$$e = \operatorname{div} \mathbf{u} = \gamma_{kk}, \qquad \Gamma = \operatorname{div} \boldsymbol{\omega},$$

otrzymamy równania falowe

$$(5.9) \qquad \Box_1 e + \operatorname{div} \mathbf{X} = \nu \nabla^2 \theta, \qquad \Box_3 \Gamma + \operatorname{div} \mathbf{Y} = 0,$$

gdzie

$$\Box_1 = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 - \varrho \partial_t^2, \qquad \Box_3 = (\beta + 2\gamma) \nabla^2 - 4\alpha - J\partial_t^2.$$

Równanie (5.9) przedstawia propagację fali dylatacyjnej; nie różni się ono od analogicznego równania w teorii symetrycznej sprężystości. Równanie $(5.9)_2$ przedstawia propagację fali skrętnej. Zauważmy, że w nieskończonej przestrzeni sprężystej temperatura może stać się przyczyną propagowania wyłącznie fali dylatacyjnej: równanie $(5.9)_2$ jest niezależne od temperatury.

Wyeliminujmy z równań (5.1) i $(4.7)_1$ najpierw funkcję $\boldsymbol{\omega}$, a następnie funkcję $\mathbf{u}$. W rezultacie otrzymamy układ równań

$$(5.10) \qquad \begin{aligned} &(\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \mathbf{u} + \big((\lambda + \mu - \alpha) \Box_4 - 4\alpha^2\big) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \Box_4 \mathbf{X} - 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{Y} = \\ &\qquad = \nu \operatorname{grad} \Box_4 \theta, \\ &(\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\omega} + \big((\beta + \gamma - \varepsilon) \Box_2 - 4\alpha^2\big) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} + \Box_2 \mathbf{Y} - \\ &\qquad - 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{X} = 0. \end{aligned}$$

Dokonajmy rozkładu wektora $\mathbf{u}$ na część potencjalną i solenoidalną:

$$(5.11) \qquad \mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{\Psi} = 0.$$

Wstawiając powyższe do $(5.10)_1$ oraz rozkładając w analogiczny sposób wielkości $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$:

$$(5.12) \qquad \mathbf{X} = \varrho (\operatorname{grad} \vartheta + \operatorname{rot} \boldsymbol{\chi}), \qquad \mathbf{Y} = J (\operatorname{grad} \sigma + \operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda}),$$

otrzymamy układ dwu równań falowych

$$(5.13) \qquad \Box_1 \varphi + \varrho\vartheta = \nu\theta, \qquad (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\Psi} + \varrho \Box_4 \boldsymbol{\chi} - 2\alpha J \operatorname{rot} \boldsymbol{\lambda} = 0.$$

Wstawiając do równań (5.9)

$$(5.14) \qquad \boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad} \zeta + \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}$$

i uwzględniając (5.12), otrzymujemy dwa dalsze równania falowe:

$$(5.15) \qquad \Box_3 \zeta + J\sigma = 0, \qquad (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\Omega} + J \Box_2 \boldsymbol{\lambda} - 2\alpha\varrho \operatorname{rot} \boldsymbol{\chi} = 0.$$

Do równań tych należy dodać równanie przewodnictwa cieplnego (5.4), które przy uwzględnieniu (5.11) przyjmie postać

$$(5.16) \qquad D\theta - \eta_0 \nabla^2 \dot{\varphi} = -\frac{Q}{\varkappa}, \qquad D = \nabla^2 - \frac{1}{\varkappa} \partial_t.$$

Eliminując z równań $(5.13)_1$ i (5.16) temperaturę θ, otrzymamy ostateczną postać równania falowego dla fali podłużnej:

$$(5.17) \qquad (\Box_1^2 D - \nu\eta_0 \partial_t \nabla^2) \varphi + \varrho D\vartheta + \frac{Y}{\varkappa} Q = 0.$$

Rozpatrzmy propagację fal w nieskończonej przestrzeni sprężystej. Załóżmy najpierw, że wielkości χ, λ, σ oraz warunki początkowe funkcji ζ, Ψ, Ω są równe zeru. W tym przypadku w nieskończonej przestrzeni sprężystej propaguje się jedynie fala podłużna, spowodowana działaniem źródeł ciepła Q, potencjalną częścią siły masowej $\mathbf{X}$ i wreszcie warunkiem początkowym funkcji φ. Równanie (5.1) opisujące tę falę jest identyczne z równaniem uzyskanym dla klasycznego ośrodka sprężystego (bez naprężeń momentowych). Wiadomo [21], że fala ta jest tłumiona i ulega dyspersji.

Ponieważ

$$u_i = \varphi_{,i}, \quad \omega_i = 0, \quad \gamma_{ji} = \varphi_{,ij}, \quad \varkappa_{ji} = 0,$$

to

$$\sigma_{(ij)} = 2\mu(\varphi_{,ij} - \delta_{ij}\varphi_{,kk}) + \varrho\,\delta_{ij}(\ddot{\Phi} - \vartheta), \quad \sigma_{\langle ij\rangle} = 0, \quad \mu_{(ij)} = 0, \quad \mu_{\langle ij\rangle} = 0.$$

Fala podłużna (5.17) wywołuje w nieskończonej przestrzeni sprężystej symetryczny tensor naprężenia.

Jeśli wielkości Q, ϑ, $\mathbf{X}$, λ są równe zeru, a warunki początkowe dla funkcji φ, Ψ, Ω są jednorodne, to w nieskończonym ośrodku sprężystym mamy do czynienia jedynie z falą skrętną ζ, spełniającą równanie $(5.15)_1$. W tym przypadku mamy

$$u_i = 0, \quad \omega_i = \zeta_{,i}, \quad \gamma_{(ji)} = 0, \quad \gamma_{\langle ij\rangle} = -\epsilon_{kji}\,\zeta_{,k}, \quad \varkappa_{ji} = \omega_{i,j} = \zeta_{,ij}.$$

Tensor $\varkappa_{ji}$ jest symetryczny, tak że w ciele wystąpi symetryczny tensor naprężeń momentowych:

$$\mu_{(ij)} = 2\gamma\zeta_{,ij} + \beta\delta_{ij}\nabla^2\zeta, \quad \mu_{\langle ij\rangle} = 0.$$

W ciele wystąpią naprężenia σ_{ij}, przy czym symetryczna część tensora tych naprężeń jest równa zeru:

$$\sigma_{(ij)} = 0, \quad \sigma_{\langle ij\rangle} = 2\alpha\,\epsilon_{kij}\,\zeta_{,k}.$$

Propagacji fali skrętnej nie towarzyszy pole temperatury. Fala ta nie wywołuje bowiem zmian objętości ciała, powoduje jedynie zmianę postaci.

Rozpatrzmy wreszcie przypadek, w którym Q, σ, ϑ są równe zeru, a warunki początkowe funkcji φ, ζ są jednorodne. Pozostają nam równania falowe $(5.13)_2$ i $(5.15)_2$. Widoczne jest, że przyczyną powstania tych fal w obszarze są składowe λ, χ sił masowych. Zauważmy, że falom tym, interpretowanym jako zmodyfikowane fale poprzeczne [20], nie towarzyszy pole temperatury. Fale te wywołują naprężenia niesymetryczne σ_{ji}, μ_{ji}.

U podstaw klasycznej elastokinetyki leży założenie, że wymiana ciepła pomiędzy jedną częścią ciała a drugą przez przewodnictwo cieplne zachodzi nader powoli. Jeśli wymiana ciepła nie zachodzi praktycznie w ciągu odcinków czasu rzędu okresu ruchu drgającego, to każdą część można traktować jako termicznie izolowaną, a ruch uważać jako adiabatyczny.

Zakładamy, że w ciele brak źródeł ciepła, a powierzchnia ciała jest termicznie izolowana. Dla procesu adiabatycznego $\dot{S} = 0$. Z równania (3.14) oraz (4.20) mamy

$$k\theta_{,jj} = 0, \quad \dot{\theta} = -\frac{T_0\,\nu}{c_\varepsilon}\,\dot{\gamma}_{kk}. \tag{5.18}$$

Powyższe zależności (przy $Q = 0$) prowadzą do spełnienia tożsamościowego równania przewodnictwa cieplnego (5.4). Po scałkowaniu równania $(5.18)_2$ względem czasu i uwzględnieniu faktu, że dla $t = 0$ mamy $\gamma_{kk} = 0$ oraz $\theta = 0$, otrzymamy

$$(5.19) \qquad \theta = -\eta_T \varkappa \gamma_{kk}, \qquad \eta_T = \frac{\nu_T T_0}{c_\varepsilon \varkappa}, \qquad \nu_T = (3\lambda_T + 2\mu_T)\,\alpha_t .$$

Równanie to, zastępujące nam równanie przewodnictwa cieplnego, głosi, że dla procesu adiabatycznego temperatura jest proporcjonalna do dylatacji. Wielkości μ_T, λ_T są stałymi Lamégo dla stanu izotermicznego. Wstawiając (5.19) do związku $(4.7)_1$ znajdziemy

$$(5.20) \qquad \sigma_{ij} = 2\mu\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle} + \lambda_s \gamma_{kk}\delta_{ij},$$

gdzie

$$\lambda_s = \lambda_T + \eta_T \nu_T \varkappa .$$

Wstawiając (5.20) do równań ruchu, otrzymamy następujący układ równań elastokinetyki ośrodka Cosseratów:

$$(5.21) \qquad \begin{aligned} &(\lambda_s + 2\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} - (\mu+\alpha)\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{u} + 2\alpha\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} + \mathbf{X} = \varrho\ddot{\mathbf{u}},\\ &(\beta+2\gamma)\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{\omega} - (\gamma+\varepsilon)\,\mathrm{rot\,rot}\,\boldsymbol{\omega} + 2\alpha\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\omega} + \mathbf{Y} = J\ddot{\boldsymbol{\omega}} . \end{aligned}$$

Równania falowe $(5.13)_2$ i (5.15) pozostaną bez zmian. Jedynie ze względu na (5.19) zmieni się rówanie fali podłużnej $(5.13)_1$, które przez eliminację temperatury przyjmie postać

$$(5.22) \qquad \overset{0}{\Box}_1 \varphi + \varrho\vartheta = 0,$$

gdzie

$$\overset{0}{\Box}_1 = (\lambda_s + 2\mu)\nabla^2 - \varrho\,\partial_t^2, \qquad \lambda_s = \lambda_T + \eta_T \nu_T \varkappa .$$

Rozpatrzmy jeszcze układ równań różniczkowych w ramach tak zwanej teorii naprężeń cieplnych. W tej uproszczonej teorii pomija się wyraz dylatacyjny w równaniu przewodnictwa cieplnego. W ten sposób temperaturę wyznacza się z uproszczonego równania przewodnictwa cieplnego

$$(5.23) \qquad \theta_{,jj} - \frac{1}{\varkappa}\dot{\theta} = -\frac{Q}{\varkappa}$$

i wprowadza się ją jako funkcję znaną do równania $(5.1)_1$. W tym przypadku równanie dla fali podłużnej (5.17) upraszcza się do postaci

$$(5.24) \qquad \Box_1 D\varphi + \varrho D\vartheta + \frac{\nu}{\varkappa} Q = 0 .$$

Równanie to jest identyczne z równaniem dla klasycznego ośrodka sprężystego [21]. Fala φ nie ulega tłumieniu, składa się z części czysto sprężystej i z części dyfuzyjnej.

W przypadku zagadnień stacjonarnych odpadają w równaniach (5.1) i (5.4) pochodne względem czasu. Równanie (5.4) staje się równaniem Poissona.

Mamy do czynienia z układem równań (przy $\mathbf{X} = 0$, $\mathbf{Y} = 0$)

$$(5.25)\qquad \begin{aligned} &(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - (\mu+\alpha)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + 2\alpha\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} = \nu\,\mathrm{grad}\,\theta\,,\\ &(\beta+2\gamma)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega} - (\gamma+\varepsilon)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} + 2\alpha\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\omega} = 0\,,\\ &\nabla^2\theta = -\frac{Q}{\varkappa}. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę na dwa nader proste stany deformacji. Załóżmy, że w ciele ograniczonym jednospójnym, na powierzchni A zupełnie utwierdzonym ($\mathbf{u} = 0$, $\boldsymbol{\omega} = 0$) panuje stała temperatura. Wtedy równania $(5.25)_1$ i $(5.25)_2$ stają się jednorodne, co przy założonych jednorodnych warunkach brzegowych prowadzi do wniosku, że $\mathbf{u} = 0$, $\boldsymbol{\omega} = 0$ w każdym punkcie ciała. Zatem $\gamma_{ji} = 0$ oraz $\varkappa_{ji} = 0$. Ze związków $(4.7)_1$ i $(4.7)_2$ wynika, że

$$(5.26)\qquad \sigma_{ij} = \sigma_{(ij)} = -\nu\theta\delta_{ij}\,,\qquad \mu_{ij} = 0\,.$$

Rozpatrzmy dalej ciało jednospójne, w którym istnieje pole temperatury $\theta(\mathbf{x})$. Zapytujemy się, jaki powinien być rozkład temperatury, aby w ciele nie powstały ani naprężenia σ_{ji} ani naprężenia momentowe μ_{ji}. Ze związków (4.5) mamy

$$(5.27)\qquad \gamma_{ij} = \alpha_t\,\delta_{ij}\,\theta\,,\qquad \varkappa_{ij} = 0\,.$$

Pozostaje jeszcze spełnić równania nierozdzielności [16]

$$(5.28)\qquad \varkappa_{ji,l} = \varkappa_{jl,i}\,,\qquad \gamma_{li,k} - \gamma_{ki,l} + \epsilon_{kih}\,\varkappa_{lh} - \epsilon_{kil}\,\varkappa_{hk} = 0\,.$$

Pierwszy układ równań jest od razu spełniony, drugi prowadzi do układu równań

$$(5.29)\qquad \theta_{,ij} = 0\quad (\text{nie sumować, gdy } i \neq j).$$

Równania (5.29) będą spełnione, gdy rozkład temperatury jest liniowy:

$$(5.30)\qquad \theta = a_0 + x_i\,a_i\,.$$

Otrzymaliśmy tu ten sam wynik, co w klasycznej termosprężystości. Rozwiązanie układu równań $(5.25)_1$ i $(5.25)_2$ może nastąpić przez przyjęcie całki szczególnej w postaci

$$(5.31)\qquad u_i' = \varphi_{,i}\,,\qquad \omega_i' = 0\,.$$

Równanie $(5.25)_2$ jest tożsamościowo spełnione, a z równania $(5.25)_1$ otrzymamy

$$(5.32)\qquad \nabla^2\varphi = m\theta\,,\qquad m = \frac{\nu}{\lambda+2\mu}.$$

Za pomocą funkcji φ i rozwiązania równania Poissona (5.32) wyznaczamy naprężenia

$$(5.33)\qquad \sigma_{ij}' = \sigma_{(ij)} = 2\mu\,(\varphi_{,ij} - \delta_{ij}\,\varphi_{,kk})\,,\qquad \mu_{ij}' = 0\,.$$

Wielkości te stanowią ostateczne rozwiązania dla nieskończonego obszaru sprężystego.

Jeśli obszar jest ograniczony, to do naprężeń σ'_{ij}, μ'_{ij} dodać należy naprężenia σ''_{ij}, μ''_{ij} tak dobrane, aby na brzegu obszaru były spełnione wszelkie warunki brzegowe. Z naprężeniami σ''_{ij}, μ''_{ij} związany jest stan przemieszczeń i obrotów u''_i, ω''_i spełniający jednorodny układ równań różniczkowych $(5.25)_1$ i $(5.25)_2$.

Przy rozwiązywaniu zadań niesymetrycznej sprężystości poważne znaczenie posiadają funkcje naprężeń. Uprzednio podaliśmy równania falowe, gdzie funkcje φ, ζ, $\boldsymbol{\psi}$ i $\boldsymbol{\Omega}$ są potencjałami sprężystymi. H. NEUBER [22] i N. SANDRU [16] podali uogólnienie funkcji Papkowicza-Neubera na ośrodek Cosseratów, a N. SANDRU [16] uogólnione funkcje M. Iacovache'a.

Nawiązując do równań teorii naprężeń cieplnych, podamy poniżej inną, naszym zdaniem prostszą, drogę uzyskania funkcji uogólnionych M. Iacovache.

Wyeliminujmy z równań (4.1) i (4.2) najpierw funkcję $\boldsymbol{\omega}$, a następnie funkcję $\mathbf{u}$. Otrzymamy układ równań

$$(5.34)\qquad \begin{aligned} &K\mathbf{u}+G \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}+\Box_4(\mathbf{X}-\nu \operatorname{grad} \theta)-2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{Y}=0\,,\\ &K\boldsymbol{\omega}+F \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}+\Box_2 \mathbf{Y}-2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{X}=0\,, \end{aligned}$$

gdzie

$$K=\Box_2\Box_4+4\alpha^2\nabla^2\,,\qquad G=(\lambda+\mu-\alpha)\Box_4-4\alpha^2\,,\qquad F=(\beta+\gamma-\varepsilon)\Box_2-4\alpha^2\,.$$

Zapiszemy równanie $(5.34)_1$ w postaci operatorowej

$$(5.35)\qquad L_{ij}(u_j)+\Box_4(X_i-\nu\theta_{,i})-2\alpha\epsilon_{ijk}Y_{k,j}=0\,,$$

gdzie

$$L_{ij}=K\delta_{ij}+G\partial_i\partial_j\,.$$

Wprowadzimy funkcję wektorową φ i zwiążmy ją z przemieszczeniem $\mathbf{u}$ w następujący sposób:

$$(5.36)\qquad u_1=\begin{vmatrix}\varphi_1 & L_{12} & L_{13}\\ \varphi_2 & L_{22} & L_{23}\\ \varphi_3 & L_{31} & L_{32}\end{vmatrix},\qquad u_2=\begin{vmatrix}L_{11} & \varphi_1 & L_{13}\\ L_{21} & \varphi_2 & L_{23}\\ L_{31} & \varphi_3 & L_{33}\end{vmatrix},\qquad u_3=\begin{vmatrix}L_{11} & L_{12} & \varphi_1\\ L_{21} & L_{22} & \varphi_2\\ L_{31} & L_{32} & \varphi_3\end{vmatrix}.$$

W wyniku uzyskujemy zależność

$$(5.37)\qquad \mathbf{u}=\Box_1\Box_4\boldsymbol{\varphi}-\operatorname{grad}\operatorname{div} G\boldsymbol{\varphi}\,.$$

Analogicznie przyjmijmy

$$(5.38)\qquad \boldsymbol{\omega}=\Box_2\Box_3\boldsymbol{\psi}-\operatorname{grad}\operatorname{div} F\boldsymbol{\psi}.$$

Podstawiając (5.37) i (5.38) do równań (5.34) otrzymamy

$$(5.39)\qquad \begin{aligned} &K\Box_1\Box_4\boldsymbol{\varphi}+\Box(\mathbf{X}-\nu\operatorname{grad}\theta)-2\alpha\operatorname{rot}\mathbf{Y}=0,\\ &K\Box_2\Box_3\boldsymbol{\psi}+\Box_2\mathbf{Y}-2\alpha\operatorname{rot}\mathbf{X}=0\,. \end{aligned}$$

Uzyskana postać równań różniczkowych dla funkcji $\boldsymbol{\varphi}$ i $\boldsymbol{\psi}$ nie jest dogodna, gdyż w równaniach (5.39) występują pochodne sił i momentów masowych.

Wprowadzimy dwie nowe funkcje wektorowe $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\eta}$ związane z wektorami $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$ następującymi zależnościami:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \Box_1 \Box_4 \boldsymbol{\zeta} - \operatorname{grad} \operatorname{div} G\boldsymbol{\zeta} - 2\alpha \operatorname{rot} \Box_3 \boldsymbol{\eta}, \\
\boldsymbol{\omega} &= \Box_2 \Box_3 \boldsymbol{\eta} - \operatorname{grad} \operatorname{div} F\boldsymbol{\eta} - 2\alpha \operatorname{rot} \Box_1 \boldsymbol{\zeta}.
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

Wstawiając (5.40) do równań (5.34) otrzymamy

$$
\begin{aligned}
&\Box_4 (K\Box_1 \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{X} - \nu \operatorname{grad} \theta) - 2\alpha \operatorname{rot} (K\Box_3 \boldsymbol{\eta} + \mathbf{Y}) = 0, \\
&\Box_2 (K\Box_3 \boldsymbol{\eta} + Y) - 2\alpha \operatorname{rot} (K\Box_1 \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{X} - \nu \operatorname{grad} \theta) = 0;
\end{aligned} \tag{5.41}
$$

skąd otrzymujemy układ równań

$$
\begin{aligned}
&\Box_1 (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{X} - \nu \operatorname{grad} \theta = 0, \\
&\Box_3 (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\eta} + \mathbf{Y} = 0.
\end{aligned} \tag{5.42}
$$

Powyższe równania przechodzą dla klasycznego ośrodka sprężystego na równanie M. Iacovache'a, a w przypadku zagadnienia statycznego na funkcje B. G. Galerkina.

W przypadku szczegółowym elastokinetyki otrzymujemy układ równań

$$
\overset{0}{\Box}_1 (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{X} = 0, \qquad \Box_3 (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\eta} + \mathbf{Y} = 0, \tag{5.43}
$$

gdzie

$$
\overset{0}{\Box}_1 = (\lambda_s + 2\mu) \nabla^2 - \varrho\, \partial_t^2.
$$

Równania powyższe mają istotne znaczenie przy wyznaczeniu rozwiązań osobliwych funkcji $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\omega}$ dla sił i momentów skupionych działających w dowolnym punkcie obszaru nieskończonego.

Powiążmy jeszcze uogólnione funkcje M. Iacovache'a z funkcjami φ, $\boldsymbol{\Psi}$, ζ, $\boldsymbol{\Omega}$ występującymi przy dekompozycji wektorów $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\omega}$ na część potencjalną i solenoidalną (związki (5.11) i (5.14)).

Rozpatrzmy jednorodne równania elastokinetyki $(5.42)_2$ i $(5.43)_1$:

$$
\overset{0}{\Box}_1 (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\zeta} = 0, \qquad \Box_3 (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\eta} = 0.
$$

Zauważmy, że rozwiązanie tych równań można przedstawić w myśl twierdzenia Boggia w następującej postaci:

$$
\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}' + \boldsymbol{\zeta}'', \qquad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}' + \boldsymbol{\eta}''. \tag{5.44}
$$

Przy czym funkcje $\boldsymbol{\zeta}', \boldsymbol{\zeta}'', \boldsymbol{\eta}', \boldsymbol{\eta}''$ powinny spełniać równania

$$
\begin{aligned}
&\overset{0}{\Box}_1 \boldsymbol{\zeta}' = 0, \qquad (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\zeta}'' = 0, \\
&\Box_3 \boldsymbol{\eta}' = 0, \qquad (\Box_2 \Box_4 + 4\alpha^2 \nabla^2) \boldsymbol{\eta}'' = 0.
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

Uwzględniając powyższe równania, przedstawić możemy związki (5.40) w postaci

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \overset{0}{\Box}_1 \Box_4 \boldsymbol{\zeta}'' - \operatorname{grad} \operatorname{div} G(\boldsymbol{\zeta}' + \boldsymbol{\zeta}'') - 2\alpha \operatorname{rot} \Box_3 \boldsymbol{\eta}'', \\
\boldsymbol{\omega} &= \Box_2 \Box_3 \boldsymbol{\eta}'' - \operatorname{grad} \operatorname{div} F(\boldsymbol{\eta}' + \boldsymbol{\eta}'') - 2\alpha \operatorname{rot} \overset{0}{\Box}_1 \boldsymbol{\zeta}''.
\end{aligned} \tag{5.46}
$$

Wykorzystując zależność

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{U} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U} - \nabla^2\mathbf{U}$$

oraz związki

$$\overset{0}{\square}_1\square_4 - \nabla^2 G = \square_4\square_2 + 4\alpha^2\nabla^2, \qquad \square_2\square_3 - \nabla^2 F = \square_4\square_2 + 4\alpha^2\nabla^2,$$

doprowadzimy przedstawienie (5.46) do postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\operatorname{grad}\operatorname{div} G\boldsymbol{\zeta}' - 2\alpha\operatorname{rot}\square_3\boldsymbol{\eta}'', \\ \boldsymbol{\omega} &= -\operatorname{grad}\operatorname{div} F\boldsymbol{\eta}' - 2\alpha\operatorname{rot}\overset{0}{\square}_1\boldsymbol{\zeta}''. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Z porównania przedstawienia (5.11) i $(5.47)_1$ otrzymamy

$$\varphi = -\operatorname{div} G\boldsymbol{\zeta}', \qquad \boldsymbol{\Psi} = -2\alpha\square_3\boldsymbol{\eta}''. \tag{5.48}$$

Podobnie rzut oka na związki (5.14) i (5.47) prowadzi do wniosku, że

$$\zeta = -\operatorname{div}\Gamma\boldsymbol{\eta}', \qquad \boldsymbol{\Omega} = -2\alpha\overset{0}{\square}_1\boldsymbol{\zeta}''. \tag{5.49}$$

Należy jeszcze sprawdzić, czy funkcje $\varphi, \boldsymbol{\Psi}, \zeta, \boldsymbol{\Omega}$ wyrażone związkami (5.48) i (5.49) spełniają równania jednorodne (5.22), (5.13) i (5.15). Łatwo sprawdzimy, zważywszy na (5.45), że równania te są spełnione.

Wróćmy jeszcze do równań różniczkowych niesymetrycznej termosprężystości (5.1) i (5.4). I dla tych równań można uzyskać przedstawienie wektorów $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$ i skalara θ przez funkcje wektorowe $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ oraz funkcję skalarną ϑ.

Przedstawienie to podajemy bez dowodu. Ma ono postać

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \square_2 M\boldsymbol{\varphi} - \operatorname{grad}\operatorname{div} N\boldsymbol{\varphi} - 2\alpha\operatorname{rot}\square_3\boldsymbol{\psi} + \nu\operatorname{grad}\vartheta, \\ \boldsymbol{\omega} &= \square_2\square_3\boldsymbol{\psi} - \operatorname{grad}\operatorname{div} F\boldsymbol{\psi} - 2\alpha\operatorname{rot} M\boldsymbol{\varphi}, \\ \theta &= \eta_0\partial_t\operatorname{div} K\boldsymbol{\varphi} + \square_1\vartheta. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Wprowadzono tutaj oznaczenia

$$M = D\square_1 - \nu\eta_0\partial_t\nabla^2, \qquad N = GD - \nu\eta_0\partial_t\square_4, \qquad D = \nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t.$$

Wstawiając (5.50) do równań różniczkowych termosprężystości (5.1) oraz (5.4), otrzymamy następujący układ równań falowych:

$$\begin{aligned} M(\square_2\square_4 + 4\alpha^2\nabla^2)\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{X} &= 0, \\ \square_3(\square_2\square_4 + 4\alpha^2\nabla^2)\boldsymbol{\psi} + \mathbf{Y} &= 0, \\ M\vartheta + \frac{Q}{\varkappa} &= 0. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Równania te mają szczególne znaczenie dla wyznaczenia rozwiązań fundamentalnych, tj. dla wyznaczenia funkcji $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$, θ odnoszących się do nieskończonej przestrzeni sprężystej oraz działania chwilowej siły skupionej, chwilowego momentu skupionego oraz chwilowego i skupionego źródła ciepła.

6. Twierdzenia wariacyjne

Łatwo się przekonać, że prawdziwy jest następujący związek

$$\int_V [(X_i - \varrho\ddot{u}_i)\,\delta u_i + (Y_i - J\ddot{\omega}_i)\,\delta\omega_i]\,dV + \int_A (p_i\,\delta u_i + m_i\,\delta\omega_i)\,dA = \int_V (\sigma_{ji}\,\delta\gamma_{ji} + \mu_{ji}\,\delta\varkappa_{ji})\,dV. \tag{6.1}$$

Przez δu_i i $\delta\omega_i$ oznaczono dowolne, wirtualne przyrosty składowych wektora u_i i wektora ω_i. Lewa strona równania (6.1) przedstawia pracę wirtualną sił zewnętrznych. Stosując do tej części twierdzenie o dywergencji, wykorzystując równania ruchu (2.5) i (2.7) oraz związki (3.5), otrzymujemy po szeregu przekształceniach prawą stronę równania (6.1), która wyraża pracę wirtualną sił wewnętrznych. Wprowadzając do prawej strony równania (6.1) związki konstytutywne $(4.7)_1$ i $(4.7)_2$, otrzymamy

$$[(X_i - \varrho\ddot{u}_i)\,\delta u_i + (Y_i - J\ddot{\omega}_i)\,\delta\omega_i]\,dV + \int_A (p_i\,\delta u_i + m_i\,\delta\omega_i)\,dA = \delta W_\varepsilon - \nu\int_V \theta\delta\gamma_{kk}\,dV. \tag{6.2}$$

Przyjęliśmy tutaj następujące oznaczenia:

$$\delta W_\varepsilon = \int_V [2\mu\gamma_{(ij)}\,\delta\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle}\,\delta\gamma_{\langle ij\rangle} + 2\gamma\varkappa_{(ij)}\,\delta\varkappa_{(ij)} + 2\varepsilon\varkappa_{\langle ij\rangle}\,\delta\varkappa_{\langle ij\rangle} + \lambda\gamma_{kk}\,\delta\gamma_{nn} + \beta\varkappa_{kk}\,\delta\varkappa_{nn}]\,dV.$$

Równanie $(6.2)_2$ należy uzupełnić równaniem dodatkowym, bowiem wyprowawadząjąc je uwzględniliśmy tylko część zjawiska. Uzupełnieniem jet tu równanie M. A. Biota, związane z przewodnictwem cieplnym [23],

$$-\nu\int_V \theta\gamma_{kk}\,dV = \int_A \theta n_i\,\delta H_i\,dA + \frac{c_\varepsilon}{T_0}\int_V \theta\delta\theta\,dV + \frac{T_0}{k}\int_V \dot{H}_i\,\delta H_i\,dV. \tag{6.3}$$

Równanie to zostało wzięte ze sprzężonej termosprężystości klasycznego ośrodka sprężystego. Jest ono spełnione również dla ośrodka Cosseratów, gdyż równanie przewodnictwa cieplnego ma taką samą postać w obu ośrodkach.

Wektor $\mathbf{H}$ związany jest z wektorem przepływu ciepła $\mathbf{q}$ i entropią S następującymi zależnościami:

$$\mathbf{q} = T_0\dot{\mathbf{H}}, \qquad S = -\operatorname{div}(\mathbf{H}), \qquad \dot{H}_i = -\frac{k}{T_0}\theta_{,i}. \tag{6.4}$$

Wprowadzając (6.3) do równania (6.2) otrzymamy ostateczną postać zasady prac wirtualnych dla niesymetrycznej termosprężystości:

$$\delta(W_\varepsilon + P + D) = \int_V [(X_i - \varrho\ddot{u}_i)\,\delta u_i + (Y_i - J\ddot{\omega}_i)\,\delta\omega_i]\,dV + \int_A (p_i\,\delta u_i + m_i\,\delta\omega_i)\,dA - \int_A \theta n_i\,\delta H_i\,dA. \tag{6.5}$$

Tutaj $P = \frac{c_\varepsilon}{2T_0} \int\limits_V \theta^2 \, dV$ oznacza potencjał cieplny, a D jest funkcją dysypacji, przy czym

$$\delta D = \frac{T_0}{k} \int\limits_V \dot{H}_i \, \delta H_i \, dV .$$

Zasada prac wirtualnych może posłużyć do wyprowadzenia ogólnego twierdzenia energetycznego. Porównując funkcje u_i, ω_i, θ w punkcie $\mathbf{x}$ i chwili t z aktualnie występującymi funkcjami $u_i + du_i$, $\omega_i + d\omega_i$, $\theta + d\theta$ w tym samym punkcie, ale w chwili $t+dt$, mamy

$$(6.6) \quad \delta u_i = v_i \, dt, \quad \delta\omega_i = w_i \, dt, \quad \delta\theta = \dot{\theta} dt, \quad \delta H_i = \dot{H}_i \, dt = -\frac{k}{T_0} \theta_{,i} \, dt \text{ itd.}$$

Wstawiając (6.6) do (6.5) otrzymamy

$$(6.7) \quad \frac{d}{dt}(K + W_\varepsilon + P) + \chi_\theta = \int\limits_V (X_i v_i + Y_i w_i) \, dV + \int\limits_A (p_i v_i + m_i w_i) \, dA + \frac{k}{T_0} \int\limits_A \theta n_i \theta_{,i} \, dA ,$$

gdzie

$$K = \frac{\varrho}{2} \int\limits_V v_i v_i \, dV + \frac{J}{2} \int\limits_V w_i w_i \, dV, \qquad \chi_\theta = \frac{dD}{dt} = \frac{k}{T_0} \int\limits_V (\theta_{,i})^2 \, dV > 0 .$$

Tutaj K jest energią kinetyczną, a χ_θ jest wielkością proporcjonalną do źródła entropii, wielkością dodatnią.

Twierdzenie energetyczne może posłużyć do wykazania jednoznaczności rozwiązania równań różniczkowych termosprężystości dla ciała jednospójnego.

Postępując podobnie jak dla symetrycznej termosprężystości, zakładamy że rozwiązania u_i, ω_i, θ nie są jednoznaczne, że układ równań różniczkowych jest spełniony przez dwa różne układy funkcji u_i', ω_i', θ' oraz u_i'', ω_i'', θ''. Okazuje się, że różnica tych rozwiązań $u_i = u_i' - u_i''$, $\omega_i = \omega_i' - \omega_i''$, $\theta = \theta' - \theta''$ spełnia jednorodne równania różniczkowe, z jednorodnymi warunkami brzegowymi i początkowymi. Prawa strona równania (6.7) staje się zerem. Przyrównanie do zera lewej strony równania (6.7) prowadzi do związków $K = 0$, $W_\varepsilon = 0$, $P = 0$, $\chi_\theta = 0$. Stąd wynika już, że $u_i' = u_i''$, $\omega_i' = \omega_i''$, $\theta' = \theta''$, czyli że rozwiązanie równań różniczkowych niesymetrycznej termosprężystości jest jednoznaczne.

Rozpatrzmy jeszcze przypadki szczególne zasady prac wirtualnych (6.2) i (6.3). Jeśli mamy do czynienia z uproszczoną teorią, teorią naprężeń cieplnych, to w równaniu przewodnictwa cieplnego pomijamy wyraz $\eta_0 \, \partial_t \operatorname{div} \mathbf{u}$. W tym przypadku otrzymamy równania

$$(6.8) \quad \begin{aligned} &\int\limits_V [(X_i - \varrho \ddot{u}_i) \delta u_i + (Y_i - J\ddot{\omega}_i) \delta\omega_i] \, dV + \int\limits_A (p_i \, \delta u_i + m_i \, \delta\omega_i) \, dA = \\ &\qquad = \delta W_\varepsilon - \nu \int\limits_V \theta \delta\gamma_{kk} \, dV , \\ &\int\limits_A \theta n_i \, \delta H_i \, dA + \frac{c_\varepsilon}{T_0} \int\limits_V \theta \delta\theta dV + \frac{T_0}{k} \int\limits_V \dot{H}_i \, \delta H_i \, dV = 0 . \end{aligned}$$

Równania te są od siebie niezależne. Funkcję θ wyznacza się z równania przewodnictwa cieplnego $D\theta = -Q/\varkappa$. Temperatura występująca pod znakiem całki objętościowej w równaniu $(6.8)_1$ jest funkcją znaną.

W przypadku zagadnienia stacjonarnego zasada prac wirtualnych przyjmuje postać

$$\int_V (X_i\, \delta u_i + Y_i\, \delta\omega_i)\, dV + \int_A (p_i\, \delta u_i + m_i\, \delta\omega_i)\, dA = \delta W_\varepsilon - \nu \int_V \theta\delta\gamma_{kk}\, dV. \tag{6.9}$$

Równanie to możemy przedstawić również w postaci

$$\int_V [(X_i - \nu\theta_{,i})\, \delta u_i + Y_i\, \delta u_i]\, dV + \int_A [(p_i + \nu n_i\, \theta)\, \delta u_i + m_i\, \delta\omega_i]\, dA = \delta W_\varepsilon. \tag{6.10}$$

Rozpatrzmy teraz to samo ciało (o tym samym kształcie i z tego samego materiału), ale znajdujące się w stanie izotermicznym. Niech na ciało to działają siły masowe X_i^* i momenty masowe Y_i^*. Na powierzchni A_σ niech dane będą obciążenia p_i^* i momenty m_i^*, a na powierzchni A_u przemieszczenia u_i^* i obroty ω_i^*. Postawmy następujące pytanie: jakie należy przyłożyć siły i momenty masowe, jakie obciążenia i momenty powierzchniowe, jakie przemieszczenia i obroty na powierzchni A, aby wewnątrz ciała uzyskać takie samo pole przemieszczeń u_i i obrotów ω_i, jak dla zagadnienia termosprężystego? Odpowiedź na to pytanie otrzymamy porównując pracę (6.10) z pracą wirtualną

$$\int_V (X_i^*\, \delta u_i + Y_i^*\, \delta\omega_i)\, dV + \int_A (p_i^*\, \delta u_i + m_i^*\, \delta\omega_i)\, dA = \delta W_\varepsilon. \tag{6.11}$$

Ze względu na identyczność prawych stron równań (6.10) i (6.11) (W_ε jest bowiem funkcją ω_i i u_i), otrzymamy następującą zależność:

$$\begin{aligned} X_i^* &= X_i - \nu\theta_{,i}, & Y_i^* &= Y_i, & \mathbf{x} &\in V, \\ p_i^* &= p_i + n_i\,\theta\nu, & m_i^* &= m_i, & \mathbf{x} &\in A_\sigma, \\ u_i^* &= u_i, & \omega_i^* &= \omega_i, & \mathbf{x} &\in A_u. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Związki (6.12) przedstawiają analogię sił i momentów masowych. Za pomocą tej analogii można każdy problem stacjonarny termosprężysty doprowadzić do izotermicznego zagadnienia niesymetrycznej sprężystości.

Zważywszy, że nie dokonaliśmy wariacji ani siły X_i, ani momentu masowego Y_i, ani też siły p_i i momentu m_i na powierzchni A oraz że $\delta u_i = 0$ na A_u, doprowadzimy równanie (6.9) do postaci

$$\delta\Gamma = 0,$$

$$\Gamma = W_\varepsilon - \int_V (X_i\, u_i + Y_i\, \omega_i)\, dV - \int_{A_\sigma} (p_i\, u_i + m_i\, \omega_i)\, dA - \nu \int_V \theta\, \gamma_{kk}\, dV. \tag{6.13}$$

Energia potencjalna Γ przyjmuje wartość ekstremalną. Postępując w sposób podobny jak dla symetrycznej termosprężystości, dochodzimy do wniosku, że jest to minimum.

Rozpatrzmy następny przypadek szczególny, odnoszący się do elastokinetyki. Postulując proces adiabatyczny, wykorzystamy zależność

$$\theta = -\eta_T \varkappa \gamma_{kk}. \tag{6.14}$$

Wstawiając powyższe do równania (6.2) otrzymamy

$$\int_V [(X_i - \varrho \ddot{u}_i)\,\delta u_i + (Y_i - J\ddot{\omega}_i)\,\delta\omega_i]\,dV + \int_A (p_i\,\delta u_i + m_i\,\delta\,\omega_i)\,dA = \delta \mathring{W}_\varepsilon, \tag{6.15}$$

gdzie

$$\delta \mathring{W}_\varepsilon = \int_V [2\mu\gamma_{(ij)}\,\delta\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle}\,\delta\gamma_{\langle ij\rangle} + 2\gamma\varkappa_{(ij)}\,\delta\varkappa_{(ij)} + 2\varepsilon\varkappa_{\langle ij\rangle}\,\delta\varkappa_{\langle ij\rangle} +$$
$$+ \lambda_s\,\gamma_{kk}\,\delta\gamma_{nn} + \beta\varkappa_{kk}\,\delta\varkappa_{nn}]\,dV, \qquad \lambda_s = \lambda_T + \eta_T\,\nu_T\,\varkappa.$$

Scałkujmy równanie (6.15) względem czasu w przedziale $t_0 < t < t_1$. Deformacja ciała zmienia się w sposób ciągły między dwiema chwilami $t = t_0$ i $t = t_1$. Porównajmy w rzeczywistości występujące przemieszczenia $u_i(\mathbf{x}, t)$ i obroty $\omega_i(\mathbf{x}, t)$ z przemieszczeniami $u_i + \delta u_i$ i obrotami $\omega_i + \delta\omega_i$. Wariacje δu_i i $\delta\omega_i$ przyjmiemy w ten sposób, że

$$\delta u_i(\mathbf{x}, t_0) = \delta u_i(\mathbf{x}, t_1) = 0, \qquad \delta\omega_i(\mathbf{x}, t_0) = \delta\omega_i(\mathbf{x}, t_1) = 0. \tag{6.16}$$

Po prostych przekształceniach dochodzimy do związku

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W_\varepsilon - K)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L\,dt, \tag{6.17}$$

gdzie

$$\delta L = \int_V (X_i\,\delta u_i + Y_i\,\delta\omega_i)\,dV + \int_A (p_i\,\delta u_i + m_i\,\delta\omega_i)\,dA,$$

Równanie (5.17) można traktować jako rozszerzenie zasady Hamiltona na niesymetryczną elastokinetykę.

W elastostatyce poważne znaczenie praktyczne ma twierdzenie o minimum energii komplementarnej. Bez większego trudu twierdzenie to daje się rozszerzyć na zagadnienie stacjonarne niesymetrycznej termosprężystości.

Rozpatrzmy wyrażenie

$$W_\sigma = \mu'\,\sigma_{(ij)}\,\sigma_{(ij)} + \alpha'\,\sigma_{\langle ij\rangle}\,\sigma_{\langle ij\rangle} + \gamma'\,\mu_{(ij)}\,\mu_{(ij)} + \varepsilon'\,\mu_{\langle ij\rangle}\,\mu_{\langle ij\rangle} +$$
$$+ \frac{\lambda'}{2}\,\sigma_{kk}\,\sigma_{nn} + \frac{\beta'}{2}\,\mu_{nn}\,\mu_{kk}. \tag{6.18}$$

Zważywszy na zależność (4.5), mamy

$$\frac{\partial W_\sigma}{\partial \sigma_{ji}} = \gamma_{ji} - \alpha_t\,\theta\delta_{ij}, \qquad \frac{\partial W_\sigma}{\partial \mu_{ji}} = \varkappa_{ji}. \tag{6.19}$$

Rozpatrzmy całkę

$$I = \int_V (\gamma_{ji}\,\delta\sigma_{ji} + \varkappa_{ji}\,\delta\mu_{ji})\,dV. \tag{6.20}$$

Symbole $\delta\sigma_{ji}$ i $\delta\mu_{ji}$ oznaczają wirtualne przyrosty naprężeń. Traktujemy je jako funkcje klasy $C^{(2)}$, jako wielkości bardzo małe i dowolne. Biorąc pod uwagę (6.19), mamy

$$\int_V (\gamma_{ji}\,\delta\sigma_{ji}+\varkappa_{ji}\,\delta\mu_{ji})\,dV = \delta W_\sigma + \alpha_t \int_V \theta\delta\sigma_{kk}\,dV, \tag{6.21}$$

gdzie

$$\delta W_\sigma = \int_V \left(\frac{\partial W_\sigma}{\partial\sigma_{ji}}\,\delta\sigma_{ji} + \frac{\partial W_\sigma}{\partial\mu_{ji}}\,\delta\mu_{ji}\right) dV.$$

Przekształcając lewą stronę równania (6.21), biorąc pod uwagę związki (3.5) i wprowadzając oznaczenia $\delta p_i = \delta\sigma_{ji}\,n_j$, $\delta m_i = \delta\mu_{ji}\,n_j$, otrzymamy

$$\int_A (u_i\,\delta p_i+\omega_i\,\delta m_i)\,dA - \int_V [u_i\,\delta\sigma_{ji,j}+\omega_i\,(\epsilon_{ijk}\,\delta\sigma_{jk}+\delta\mu_{ji,j})]\,dV = \delta W_\sigma + \alpha_t \int_V \theta\delta\sigma_{kk}\,dV. \tag{6.22}$$

Naprężenia $\sigma_{ji}+\delta\sigma_{ji}$, $\mu_{ji}+\delta\mu_{ji}$ dobieramy w ten sposób, aby były statycznie możliwe. Żądamy, aby spełnione były równania równowagi

$$\delta\sigma_{ji,j} = 0, \quad \epsilon_{ijk}\,\sigma_{jk}+\delta\mu_{ji,j} = 0 \tag{6.23}$$

oraz aby $\delta p_i = 0$, $\delta m_i = 0$ na A_σ. Przy tych ograniczeniach równanie (6.22) przyjmie postać

$$\int_{A_u} (u_i\,\delta p_i+\omega_i\,\delta m_i)\,dA = \delta W_s + \alpha_t \int_V \theta\,\delta\sigma_{kk}\,dV.$$

Ponieważ przemieszczenia u_i, obroty ω_i i temperatura θ nie zmieniają się, to

$$\delta\Gamma^* = 0, \tag{6.24}$$

gdzie

$$\Gamma^* = W_\sigma + \alpha_t \int_V \theta\sigma_{kk}\,dV - \int_{A_u} (p_i\,u_i+m_i\,\omega_i)\,dA.$$

Symbol Γ^* oznacza pracę komplementarną. Analogicznie do symetrycznej sprężystości można i tu udowodnić, że Γ^* osiąga minimum.

7. Twierdzenie o wzajemności

Rozważmy dwa układy «sił uogólnionych» (przyczyn) działających na ciało sprężyste zawarte w objętości V, ograniczone powierzchnią A oraz odpowiadających im «przemieszczeń uogólnionych» (1). Do pierwszej grupy zaliczamy siły masowe X_i, momenty masowe Y_i, źródła ciepła Q, obciążenia p_i i momenty m_i na powierzchni A,

(1) W termosprężystości wygodnie jest objąć umownie terminem «siła uogólniona», stosowanym w mechanice, również i źródło ciepła oraz wprowadzić termin «przemieszczenie uogólnione», obejmujący zwykłe przemieszczenia i temperaturę.

oraz ogrzanie powierzchni A (dana jest temperatura lub przepływ ciepła). Przemieszczeniami uogólnionymi są tu: przemieszczenie $\mathbf{u}$, obrót $\boldsymbol{\omega}$ i temperatura θ.

Drugi układ sił i przemieszczeń uogólnionych odróżniać będziemy przez dodanie «primów».

Załóżmy, że warunki początkowe dla funkcji $\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}$ i θ są jednorodne. Zastosujmy do równań konstytutywnych jednostronną transformację Laplace'a. W ten sposób otrzymamy związki

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{ji} &= (\mu+\alpha)\bar{\gamma}_{ji}+(\mu-\alpha)\bar{\gamma}_{ij}+(\lambda\bar{\gamma}_{kk}-\nu\bar{\theta})\delta_{ij}, \\
\bar{\mu}_{ji} &= (\gamma+\varepsilon)\bar{\varkappa}_{ji}+(\gamma-\varepsilon)\bar{\varkappa}_{ij}+\beta\bar{\varkappa}_{kk}\delta_{ij},
\end{aligned} \tag{7.1}
$$

gdzie

$$\bar{\sigma}_{ji}(\mathbf{x},p) = \mathcal{L}[\sigma_{ji}(\mathbf{x},t)] = \int_0^\infty \sigma_{ji}(\mathbf{x},t)\, e^{-pt}\, dt \quad \text{itd.}$$

Analogiczne związki otrzymamy dla $\bar{\sigma}'_{ji}$ i $\bar{\mu}'_{ji}$.

Łatwo się przekonać, że słuszna jest następująca tożsamość:

$$\bar{\sigma}_{ji}\bar{\gamma}'_{ji}+\bar{\mu}_{ji}\bar{\varkappa}'_{ji}-\bar{\sigma}'_{ji}\bar{\gamma}_{ji}-\bar{\mu}'_{ji}\bar{\varkappa}_{ji} = \nu(\bar{\theta}'\bar{\gamma}_{kk}-\bar{\theta}\bar{\gamma}'_{kk}). \tag{7.2}$$

Całkując związek (7.2) po obszarze V otrzymamy

$$\int_V (\bar{\sigma}_{ji}\bar{\gamma}'_{ji}-\bar{\sigma}'_{ji}\bar{\gamma}_{ji}+\bar{\mu}_{ji}\bar{\varkappa}'_{ji}-\bar{\mu}'_{ji}\bar{\varkappa}_{ji})\,dV = \nu\int_V (\bar{\theta}'\bar{\gamma}_{kk}-\bar{\theta}\bar{\gamma}'_{kk})\,dV. \tag{7.3}$$

Wykonajmy transformację Laplace'a na równaniach ruchu. Zważywszy na przyjęte założenie jednorodności warunków początkowych, mamy

$$\bar{\sigma}_{ji,j}+\bar{X}_i = \varrho p^2\bar{u}_i, \qquad \epsilon_{ijk}\bar{\sigma}_{jk}+\bar{\mu}_{ji,j}+\bar{Y}_i = Jp^2\bar{\omega}_i. \tag{7.4}$$

Analogiczny układ równań otrzymamy dla układu sił i przemieszczeń uogólnionych oznaczonych «primami».

Przekształcając równanie (7.3) przy uwzględnieniu związków (7.4) i analogicznych dla wielkości oznaczonych primami, dojdziemy do równania

$$
\begin{aligned}
&\int_V (\bar{X}_i\bar{u}'_i+\bar{Y}_i\bar{\omega}'_i)\,dV+\int_A (\bar{p}_i\bar{u}'_i+\bar{m}_i\bar{\omega}'_i)\,dA = \\
&\quad = \int_V (\bar{X}'_i\bar{u}_i+\bar{Y}'_i\bar{\omega}_i)\,dV+\int_A (\bar{p}'_i\bar{u}_i+\bar{m}'_i\bar{\omega}_i)\,dA+\nu\int_V (\bar{\theta}'\bar{\gamma}_{kk}-\bar{\theta}\bar{\gamma}'_{kk})\,dV.
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

Jest to pierwsza część twierdzenia o wzajemności. Drugą część tego twierdzenia uzyskamy przez wzięcie pod uwagę równań przewodnictwa cieplnego dla obu układów sił i przemieszczeń uogólnionych

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}_{,jj}-\frac{p}{\varkappa}\bar{\theta}-\eta_0 p\bar{\gamma}_{kk} &= -\frac{\bar{Q}}{\varkappa}, \\
\bar{\theta}'_{,jj}-\frac{p}{\varkappa}\bar{\theta}'-\eta_0 p\bar{\gamma}'_{kk} &= -\frac{\bar{Q}'}{\varkappa}.
\end{aligned} \tag{7.6}
$$

Mnożąc pierwsze równanie (7.6) przez $\bar{\theta}'$, drugie przez $\bar{\theta}$, odejmując jedno od drugiego, całkując po obszarze V i wykorzystując przekształcenie Greena, otrzymamy

$$(7.7)\qquad p\eta_0 \int_V (\bar{\gamma}_{kk}\bar{\theta}' - \bar{\gamma}'_{kk}\bar{\theta})\,dV + \frac{1}{\varkappa}\int_V (\bar{Q}'\bar{\theta} - \bar{Q}\bar{\theta}')\,dV = \int_A (\bar{\theta}'\bar{\theta}_{,n} - \bar{\theta}'_{,n}\bar{\theta})\,dA\,.$$

Eliminując z równań (7.5) i (7.7) wspólny wyraz otrzymamy układ, w którym występują wszelkie siły i przemieszczenia uogólnione

$$(7.8)\qquad \frac{\eta_0\varkappa p}{\nu}\left[\int_V (\bar{X}_i\bar{u}'_i - \bar{X}'_i\bar{u}_i + \bar{Y}_i\bar{\omega}'_i - \bar{Y}'_i\bar{\omega}_i)\,dV + \int_A (\bar{p}_i\bar{u}'_i - \bar{p}'_i\bar{u}_i + \bar{m}_i\bar{\omega}'_i - \bar{m}'_i\bar{\omega}_i)\,dA\right] + \varkappa\int_A (\bar{\theta}\bar{\theta}'_{,n} - \bar{\theta}'\bar{\theta}_{,n})\,dA + \int_V (\bar{Q}'\bar{\theta} - \bar{Q}\bar{\theta}')\,dV = 0\,.$$

Stosując do tego równania odwrotną transformację Laplace'a, dochodzimy do związku

$$(7.9)\qquad \frac{\eta_0\varkappa}{\nu}\left\{\int_V dV(\mathbf{x})\int_0^t \left[X_i(\mathbf{x},\tau)\frac{\partial u'_i(\mathbf{x},t-\tau)}{\partial\tau} - X'_i(\mathbf{x},t-\tau)\frac{\partial u_i(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} + Y_i(\mathbf{x},\tau)\frac{\partial\omega'_i(\mathbf{x},t-\tau)}{\partial\tau} - Y'_i(\mathbf{x},t-\tau)\frac{\partial\omega_i(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}\right]d\tau + \int_A dA(\mathbf{x})\int_0^t \left[p_i(\mathbf{x},\tau)\frac{\partial u'_i(\mathbf{x},t-\tau)}{\partial\tau} - p'_i(\mathbf{x},t-\tau)\frac{\partial u_i(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} + m_i(\mathbf{x},\tau)\frac{\partial\omega'_i(\mathbf{x},t-\tau)}{\partial\tau} - m'_i(\mathbf{x},t-\tau)\frac{\partial\omega_i(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}\right]d\tau\right\} + \varkappa\int_A dA(\mathbf{x})\int_0^t [\theta(\mathbf{x},\tau)\,\theta'_{,n}(\mathbf{x},t-\tau) - \theta'(\mathbf{x},t-\tau)\,\theta_{,n}(\mathbf{x},\tau)]\,d\tau + \int_V dV(\mathbf{x})\int_0^t [\theta(\mathbf{x},\tau)\,Q'(\mathbf{x},t-\tau) - \theta'(\mathbf{x},t-\tau)\,Q(\mathbf{x},\tau)]\,d\tau = 0\,.$$

Twierdzenie o wzajemności (7.9) dla $Y_i = Y'_i = 0$, $m_i = m'_i = 0$ przechodzi w twierdzenie o wzajemności dla klasycznej termosprężystości [21].

Rozpatrzmy przypadki szczególne twierdzenia o wzajemności. Łatwo wykazać, że w przypadku zagadnienia stacjonarnego (w którym wszelkie siły i przemieszczenia uogólnione są funkcjami położenia, niezależnymi od czasu) twierdzenie o wzajemności rozpada się na układ dwu równań

$$(7.10)\quad \begin{aligned} &\int_V (X_i u_i' - X_i' u_i + Y_i \omega_i' - Y_i' \omega_i)\, dV + \\ &\qquad + \int_V (p_i u_i' - p_i' u_i + m_i \omega_i' - m_i' \omega_i)\, dA + \nu \int_V (\theta \gamma_{kk}' - \theta' \gamma_{kk})\, dV = 0\,, \\ &\int_V (Q'\theta - Q\theta')\, dV + \varkappa \int_A (\theta \theta_{,n}' - \theta' \theta_{,n})\, dA = 0\,. \end{aligned}$$

W równaniach $(7.10)_1$ traktujemy temperatury θ i θ' jako funkcje znane, uzyskane z rozwiązania równań przewodnictwa cieplnego.

Rozpatrzmy dalszy przypadek szczególny, odnoszący się do elastokinetyki. Postulując proces adiabatyczny, zastępujemy równania przewodnictwa cieplnego związkami

$$(7.11)\qquad \theta = -\eta_T \varkappa \gamma_{kk}\,, \qquad \theta' = -\eta_T \varkappa \gamma_{kk}'\,.$$

Wstawiając (7.11) do równania (7.5) otrzymamy związek

$$(7.12)\quad \begin{aligned} &\int_V (\overline{X}_i \overline{u}_i' + \overline{Y}_i \overline{\omega}_i')\, dV + \int_A (\overline{p}_i \overline{u}_i' + \overline{m}_i \overline{\omega}_i')\, dA = \\ &\qquad = \int_V (\overline{X}_i' \overline{u}_i + \overline{Y}_i' \overline{\omega}_i)\, dV + \int_A (\overline{p}_i' \overline{u}_i + \overline{m}_i' \overline{\omega}_i)\, dA\,. \end{aligned}$$

Po wykonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a otrzymamy ostateczną postać twierdzenia o wzajemności dla elastokinetyki

$$(7.13)\quad \begin{aligned} &\int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t [X_i(\mathbf{x},\tau)\, u_i'(\mathbf{x}, t-\tau) + Y_i(\mathbf{x},\tau)\, \omega_i'(\mathbf{x}, t-\tau)]\, d\tau + \\ &\quad + \int_A dA(\mathbf{x}) \int_0^t [p_i(\mathbf{x},\tau)\, u_i'(\mathbf{x}, t-\tau) + m_i(\mathbf{x},\tau)\, \omega_i'(\mathbf{x}, t-\tau)]\, d\tau = \\ &\quad = \int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t [X_i'(\mathbf{x},\tau)\, u_i(\mathbf{x}, t-\tau) + Y_i'(\mathbf{x},\tau)\, \omega_i(\mathbf{x}, t-\tau)]\, d\tau + \\ &\quad + \int_A dA(\mathbf{x}) \int_0^t [p_i'(\mathbf{x},\tau)\, u_i(\mathbf{x}, t-\tau) + m_i'(\mathbf{x},\tau)\, \omega_i(\mathbf{x}, t-\tau)]\, d\tau\,. \end{aligned}$$

Ta postać twierdzenia została podana przez N. SANDRRU [16].

8. Wnioski wypływające z twierdzenia o wzajemności

Rozpatrzmy najpierw nieskończony obszar sprężysty. Niech w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ tego ośrodka działa chwilowa i skupiona siła $X_i = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\, \delta(t)\, \delta_{ik}$ skierowana równolegle do osi x_k. Oznaczmy przez $U_i^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ przemieszczenia wywołane działaniem tej siły. Niech w punkcie $\boldsymbol{\eta}$ działa inna, chwilowa i skupiona siła $X_i' = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta})\, \delta(t)\, \delta_{ij}$, skierowana równolegle do osi x_j. Pole przemieszczeń, wywołane działaniem tej siły oznaczmy przez $U_i^{(j)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t)$. Z twierdzenia (7.9) wypisanego dla obszaru nieskończonego uzyskamy

$$\int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t d\tau \Bigg[\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,\delta(\tau)\,\delta_{ik} \frac{\partial U_i^{(j)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t-\tau)}{\partial \tau} - \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta})\,\delta(t-\tau)\,\delta_{ij} \frac{\partial U_i^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \tau} \Bigg] = 0. \tag{8.1}$$

Stąd wynika związek

$$\dot{U}_k^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) = \dot{U}_j^{(k)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, t),$$

a po scałkowaniu względem czasu

$$U_k^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) = U_j^{(k)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, t). \tag{8.2}$$

Niech teraz w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ działa siła $X_i = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,\delta(t)\,\delta_{ik}$, a w punkcie $\boldsymbol{\eta}$ chwilowe i skupione źródło ciepła: $Q' = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta})\,\delta(t)$. Oznaczmy przez $\Theta^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ temperaturę wywołaną działaniem siły X_i, a przez $U_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t)$ pole przemieszczeń wywołane działaniem źródła ciepła Q'. Z równania (7.9) otrzymamy

$$\int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t d\tau \Bigg[\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta})\,\delta(t-\tau)\,\Theta^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \tau) + \frac{\eta_0 \varkappa}{\nu}\,\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,\delta(\tau)\,\delta_{ik} \frac{\partial U_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t-\tau)}{\partial \tau} \Bigg] = 0. \tag{8.3}$$

Stąd wynika zależność

$$\Theta^{(k)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, t) = -\frac{\eta_0 \varkappa}{\nu} \frac{\partial U_k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t)}{\partial t}. \tag{8.4}$$

Niech w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ działa siła $X_i = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,\delta(t)\,\delta_{ik}$, a w punkcie $\boldsymbol{\eta}$ chwilowy i skupiony moment $Y_i' = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta})\,\delta(t)\,\delta_{ij}$, skierowany równolegle do osi x_j. Oznaczmy przez $\Omega_i^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ wektor obrotu wywołany działaniem siły X_i, a przez $V_i^{(j)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t)$ wektor przemieszczenia jako skutek działania momentu Y_i'. Stosując do obszaru nieskończonego twierdzenie o wzajemności (7.10) mamy

$$V_k^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) = \Omega_j^{(k)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, t). \tag{8.5}$$

Niech w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ działa źródło ciepła $Q = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,\delta(t)$, a w punkcie $\boldsymbol{\eta}$ również chwilowe i skupione źródło ciepła $Q' = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta})\,\delta(t)$. Oznaczmy przez $\theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ temperaturę wywołaną działaniem źródła Q, przez $\vartheta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t)$ temperaturę powstałą wskutek istnienia źródła Q'. Z twierdzenia o wzajemności (7.9) wynika, że

$$\theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, t) = \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t). \tag{8.6}$$

Wreszcie niech w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ działa chwilowy i skupiony moment $Y_i = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,\delta(t)\,\delta_{ik}$, a w punkcie $\boldsymbol{\eta}$ chwilowe i skupione źródło ciepła $Q' = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta})\,\delta(t)$.

Przez $\vartheta^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ oznaczmy temperaturę wywołaną działaniem momentu Y_i, a przez $\Omega_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t)$ wektor obrotu, który powstał w punkcie $\mathbf{x}$ pod wpływem źródła ciepła Q'. Z zastosowania twierdzenia o wzajemności (7.9) wynika zależność

$$\vartheta^{(k)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, t) = -\frac{\eta_0 \varkappa}{\nu} \frac{\partial \Omega_k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t)}{\partial t}. \tag{8.7}$$

W klasycznej termosprężystości wyprowadza się jedynie związki (8.2) (8.4) oraz (8.6) [21]; w ośrodku Cosseratów związki te są liczniejsze. Zauważmy, że przedstawione powyżej zależności są słuszne dla ciała ograniczonego, które na części powierzchni A_u jest zupełnie utwierdzone ($u_i = 0, \omega_i = 0$), a na pozostałej części A_σ jest wolne od obciążeń ($p_i = m_i = 0$). Przy jednorodnych warunkach bowiem na A_u i A_σ znikają w równaniu (7.9) całki powierzchniowe i w wyniku otrzymuje się związki (8.2)-(8.7).

Rozpatrzmy jeszcze jeden typ efektów mechanicznych i cieplnych, odnoszący się do przesuwania sił, momentów i źródeł ciepła w nieograniczonym ośrodku Cosseratów. Punktem wyjścia będzie i tu równanie o wzajemności (7.9).

Załóżmy, że źródło ciepła Q przesuwa się ze stałą prędkością v wzdłuż osi x_3, zatem że $Q = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3 - vt)$. Przyjmijmy drugi układ przyczyn w postaci chwilowego źródła ciepła $Q' = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\,\delta(t)$ działającego w punkcie $\mathbf{x}'$. Z równania (7.9) otrzymamy

$$\int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3 - v\tau)\,\theta'(x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3', t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t \delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2')\,\delta(x_3 - x_3')\,\delta(\tau)\,\theta(x_1, x_2, x_3, t-\tau)\,d\tau,$$

skąd

$$\theta(x_1', x_2', x_3', t) = \int_0^t \theta'(0, 0, v\tau; x_1', x_2', x_3', t-\tau)\,d\tau. \tag{8.8}$$

Powyższy wzór pozwala na wyznaczenie temperatury, spowodowanej posuwającym się źródłem ciepła przy wykorzystaniu wzoru dla temperatury, wywołanej działaniem skupionego i chwilowego, ale nie poruszającego się źródła ciepła.

Z kolei wyznaczymy przemieszczenia wywołane działaniem ruchomego źródła ciepła $Q = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3 - vt)$ w nieograniczonym ośrodku termosprężystym. Przemieszczenia te oznaczmy przez $u_i(\mathbf{x}, t)$. Jako układ z «primami» przyjmijmy siłę $X_i' = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\,\delta(t)\,\delta_{ij}$, a więc siłę skupioną i chwilową, umieszczoną w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ i skierowaną w kierunku osi x_j. Oznaczmy przez $\Theta^{(j)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ temperaturę w punkcie $\mathbf{x}$ wywołaną działaniem siły X_i', umieszczonej w punkcie $\boldsymbol{\xi}$. Wstawiając Q i X_i' do równania (7.10) otrzymamy związek

$$-\frac{\eta_0 \varkappa}{v} \int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t \delta(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}\,\delta(\tau)\,\delta_{ij} \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t-\tau)}{\partial \tau}\,d\tau =$$

$$= \int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3 - v\tau)\,\Theta^{(j)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t-\tau)\,d\tau,$$

skąd

$$\frac{\partial u_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t} = -\frac{v}{\eta_0 \varkappa} \int_0^t \Theta^{(j)}(0, 0, v\tau; \xi_1, \xi_2, \xi_3, t-\tau)\,d\tau. \tag{8.9}$$

Wyznaczmy dalej obroty $\omega_i(\mathbf{x}, t)$ wywołane działaniem źródła ciepła $Q = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3 - vt)$ w nieskończonym ośrodku termosprężystym. Jako układ z «primami» przyjmijmy moment $Y_i' = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\,\delta(t)\,\delta_{ij}$, a więc moment o wektorze skierowanym w kierunku osi x_j. Oznaczmy przez $\vartheta^{(j)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ temperaturę wywołaną działaniem momentu Y_i'. Wstawiając Q i Y_i' do równania (7.9) otrzymamy związek

$$-\frac{\eta_0 \varkappa}{v} \int\limits_V dV(\mathbf{x}) \int\limits_0^t \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\,\delta(\tau)\,\delta_{ij}\,\frac{\partial \omega_i(\underline{x}, t-\tau)}{\partial \tau}\,d\tau =$$

$$= \int\limits_V dV(\mathbf{x}) \int\limits_0^t \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3 - v\tau)\,\vartheta^{(j)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t-\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{\partial \omega_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t} = -\frac{v}{\eta_0 \varkappa} \int\limits_0^t \vartheta^{(j)}(0, 0, v\tau; \xi_1, \xi_2, \xi_3, t-\tau)\,d\tau, \tag{8.10}$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Symbol $U_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ oznacza składową przemieszczenia w punkcie $\mathbf{x}$ wywołaną przez skupione i chwilowe źródło ciepła Q', a $\theta(\mathbf{x}, t)$ temperaturę spowodowaną działaniem siły X_i.

Dla wyznaczenia obrotów ω_i, spowodowanych przez siłę X_i należy w równaniu (7.9) przyjąć następujący układ sił uogólnionych:

$$X_i = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3 - vt)\,\delta_{ij}, \qquad Y_i' = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\,\delta(t)\,\delta_{ik}. \tag{8.11}$$

Wstawiając powyższe do równania (7.9) otrzymamy

$$\int\limits_V dV(\mathbf{x}) \int\limits_0^t \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\,\delta(\tau)\frac{\partial \omega_i(\mathbf{x}, t-\tau)}{\partial \tau} =$$

$$= \int\limits_V dV(\mathbf{x}) \int\limits_0^t \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3 - v\tau)\,\delta_{ij}\,\frac{\partial V_i^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t-\tau)}{\partial \tau}\,d\tau,$$

albo

$$\frac{\partial \omega_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t} = \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}\,[V_j^{(k)}(0, 0, v\tau; \xi_1, \xi_2, \xi_3, t-\tau)]\,d\tau. \tag{8.12}$$

Przez $V_j^{(k)}(\mathbf{x}, \xi, t)$ oznaczono składową przemieszczenia o kierunku równoległym do osi x_j, a wywołaną działaniem momentu skupionego Y_i' umieszczonego w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ i zwróconego w kierunku osi x_k.

W elastostatyce klasycznej wyprowadza się związki wiążące przemieszczenia u_i we wnętrzu ciała z przemieszczeniami u_i i obciążeniami p_i na jego powierzchni. Twierdzenia te noszą nazwę Somigliana i Greena [24]. Poniżej wykorzystując twierdzenie o wzajemności (7.6) dla ośrodka Cosseratów, wyprowadzimy analogiczne związki, wiążące przemieszczenie u_i, obroty ω_i i temperaturę θ wewnątrz ciała z przemieszczeniami u_i, obrotami ω_i, obciążeniami p_i, m_i temperaturą θ i jej gradientem $\theta_{,n}$ na powierzchni ciała.

Niech działaniu siły skupionej $X_i' = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,\delta(t)\,\delta_{ik}$ przyłożonej w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ i skierowanej w kierunku równoległym do osi x_k odpowiada pole przemieszczeń $u_i' = U_i^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$, pole obrotów $\omega_i' = \Omega_i^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ i pole temperatury $\theta' = \Theta^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ (2). Załóżmy dalej, że w ciele nie działają pozostałe siły ($X_i = 0$) i momenty masowe ($Y_i = Y_i' = 0$) oraz źródła ciepła ($Q = Q' = 0$). Dla ciała ograniczonego powierzchnią A możemy w myśl wzoru (7.9) wypisać następującą zależność przy założeniu, że punkt $\mathbf{x}$ należy do rozpatrywanego obszaru:

$$(8.13)\quad \dot{u}_k(\mathbf{x}, t) = \int_A dA(\boldsymbol{\xi}) \int_0^t d\tau \Big\{ p_i(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial U_i^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)}{\partial \tau} - p_i^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \tau} + m_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) \frac{\partial \Omega_i^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)}{\partial \tau} - m_i^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial \omega_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\nu}{\eta_0} [\theta(\boldsymbol{\xi}, \tau)\, \Theta_{,n}^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) - \Theta^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)\, \theta_{,n}(\boldsymbol{\xi}, \tau)] \Big\}, \qquad \mathbf{x} \in V, \quad \boldsymbol{\xi} \in A.$$

Wprowadziliśmy tu następujące oznaczenia:

$$p_i^{(k)} = \sigma_{ji}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\, n_j(\mathbf{x}), \qquad m_i^{(k)}(\mathbf{x}, t) = \mu_{ji}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\, n_j(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in A,$$

gdzie $\sigma_{ji}^{(k)}$, $\mu_{ji}^{(k)}$ są naprężeniami wywołanymi działaniem siły skupionej $X_i' = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,\delta(t)\,\delta_{ik}$. Wzór (8.13) daje nam zależność między prędkością przemieszczenia $u_k(\mathbf{x}, t)$ wewnątrz ciała ($\mathbf{x} \in V$, $t > 0$) a funkcjami $u_i, \omega_i, \theta, p_i, m_i, \theta_{,n}$ na powierzchni ciała.

Załóżmy teraz, że w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ ciała nieskończonego działa skupiony i chwilowy moment $Y_i' = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,\delta(t)\,\delta_{ik}$, który wywołuje pole przemieszczeń $u_i' = V_i^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$, obroty $\omega_i' = \Lambda_i^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ oraz temperaturę $\theta' = \vartheta^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$. Z równania (7.9), przy założeniu że $X_i = X_i' = 0$, $Y_i = 0$, $Q = Q' = 0$, otrzymamy następujący wzór:

$$(8.14)\quad \dot{\omega}_k(\mathbf{x}, t) = \int_A dA(\boldsymbol{\xi}) \int_0^t d\tau \Big\{ p_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) \frac{\partial V_i^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)}{\partial \tau} - \hat{p}_i^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \tau} + m_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) \frac{\partial \Lambda_i^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)}{\partial \tau} - \hat{m}_i^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial \omega_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\nu}{\eta_0} [\theta(\boldsymbol{\xi}, \tau)\, \vartheta_{,n}^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) - \vartheta_i^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)\, \theta_{,n}(\boldsymbol{\xi}, \tau)] \Big\}, \qquad \mathbf{x} \in V, \quad \boldsymbol{\xi} \in A,$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\hat{p}_i(\underline{x}, t) = \hat{\sigma}_{ji}^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\, n_j(\mathbf{x}), \qquad \hat{m}_i(\mathbf{x}, t) = \hat{\mu}_{ji}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\, n_j(\mathbf{x}).$$

(2) Układ sił i przemieszczeń uogólnionych oznaczonych primami odnosi się do ośrodka nieskończonego.

Przez $\hat{\sigma}_{ji}$, $\hat{\mu}_{ji}$ oznaczyliśmy naprężenia związane z działaniem momentu skupionego i chwilowego Y_i'. I tu funkcja $\omega_k'(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in V$, $t > 0$ związana jest z funkcjami u_i', ω_i, θ, p_i, m_i, $\theta_{,n}$ określonymi na powierzchni A.

Niech w nieskończonym ciele sprężystym działa chwilowe i skupione źródło ciepła $Q' = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\,\delta(t)$, które powoduje powstanie następujących przemieszczeń: $u_i' = U_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$, $\omega_i' = \Omega_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ oraz $\theta' = \Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$. Wstawiając do równania (7.9) $X_i = X_i' = 0$, $Y_i = Y_i' = 0$, $Q = 0$ otrzymamy dla temperatury $\theta(\mathbf{x}, t)$ następujący wzór:

$$
(8.15)\qquad \theta(\mathbf{x}, t) = \varkappa \int_A dA(\mathbf{x}) \int_0^t d\tau \Big\{ \theta_{,n}(\boldsymbol{\xi}, \tau)\,\Theta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) - \theta(\boldsymbol{\xi}, \tau)\,\Theta_{,n}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) - \frac{\eta_0}{\nu}\Big[p_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)\frac{\partial U_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)}{\partial\tau} - p_i^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)\frac{\partial u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial\tau} + m_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)\frac{\partial \Omega_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)}{\partial\tau} - m_i^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)\frac{\partial \omega_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial\tau}\Big]\Big\},
$$

gdzie

$$
p_i^*(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ji}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\,n_j(\mathbf{x}), \qquad m_i^*(\mathbf{x}, t) = \mu_{ji}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)\,n_j(\mathbf{x}).
$$

Przez σ_{ji}^* i μ_{ji}^* oznaczono naprężenie związane z działaniem źródła ciepła Q'. Wzory (8.13)-(8.15) należy traktować jako uogólnienie wzorów Somigliana na zagadnienie termosprężystości w ośrodku Cosseratów. Pewne uproszczenie tych wzorów otrzymamy przez uwzględnienie związków (8.2), (8.4) i (8.5)-(8.7).

Pamiętajmy, że siły X_i', Y_i', Q' działały w nieskończonym ośrodku sprężystym; to samo odnosi się do przemieszczeń, funkcji $U_i^{(k)}$, $\Omega_i^{(k)}$, $\Theta^{(k)}$, ... itd. Jeśli teraz rozpatrzymy przypadek, w którym układ sił i przemieszczeń oznaczony «primami» odnosi się do ciała ograniczonego powierzchnią A i na brzegu zupełnie utwierdzonego ($u_i' = 0$, $\omega_i' = 0$, $\theta' = 0$), to równania (8.13)-(8.15) przedstawiają nam rozwiązanie pierwszego zagadnienia brzegowego, w którym na powierzchni dane są funkcje u_i, ω_i i temperatura θ. I tak ze wzoru (8.13) mamy

$$
(8.16)\qquad \dot{u}_k(\mathbf{x}, t) = -\int_A dA(\mathbf{x}) \int_0^t d\tau \Big[p_i^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)\frac{\partial u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial\tau} + m_i^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)\frac{\partial \omega_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial\tau} - \frac{\nu}{\eta_0}\,\theta(\boldsymbol{\xi}, \tau)\,\Theta_{,n}^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau)\Big].
$$

Jeśli teraz dobrać funkcje Greena $U_i^{(k)}$, $\Omega_i^{(k)}$, $\Theta^{(k)}$, ... itd. w ten sposób, aby powierzchnia ciała była wolna od obciążeń p_i', m_i' i $\theta' = 0$, to równania (8.13)-(8.15) prowadzą do rozwiązania drugiego problemu brzegowego, w którym na brzegu dane są obciążenia p_i, m_i i temperatura θ.

Na zakończenie rozpatrzymy zagadnienie stacjonarne. Niech na powierzchni A ciała dane będą mieszane warunki brzegowe. Niech na części A_u tej powierzchni dane będą jednorodne warunki kinematyczne $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{u} = 0$, i cieplne $\theta = 0$, a na części A_σ niech brak będzie obciążeń p_i i m_i. Niech również $X_i = 0$, $Y_i = 0$.

Dla wyznaczenia przemieszczeń $u_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V$ w tym ciele rozpatrzmy ciało o tym samym kształcie i warunkach brzegowych, ale znajdujące się w stanie izotermicznym. Niech w punkcie $\boldsymbol{\xi} \in V$ działa siła skupiona $X_i' = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\,\delta_{ik}$, która wywoła pole przemieszczeń $U_i^{(k)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ i jest tak dobrana, że spełnia jednorodne warunki brzegowe ($u_i' = 0$, $\omega_i' = 0$ na A_u, $p_i' = 0$, $m_i' = 0$ na A_σ). Z równania $(7.10)_1$ przy uwzględnieniu, że $Y_i' = 0$, $Q' = 0$ otrzymamy

$$-\int_V \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\,\delta_{ik}\,u_i(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}) + \nu \int_V \theta(\mathbf{x})\,\gamma_{kk}'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\,dV(\mathbf{x}) = 0\,,$$

skąd

$$u_k(\boldsymbol{\xi}) = \nu \int_V \theta(\boldsymbol{\xi})\,U_{i,i}^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\,dV(\boldsymbol{\xi})\,, \qquad \mathbf{x} \in V, \qquad k = 1, 2, 3\,. \tag{8.17}$$

Symbolem $U_{i,i}^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ oznaczono dylatację w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ pod wpływem działania siły skupionej X_i' umieszczonej w punkcie $\mathbf{x}$.

Umieśćmy w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ moment skupiony $Y_i' = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\,\delta_{ik}$, który wywoła w ciele pole przemieszczeń $V_i^{(j)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$. Pole to powinno spełniać jednorodne warunki brzegowe na A_u i A_σ. Przyjmując, że $X_i' = 0$, $Q' = 0$ otrzymamy z równania $(7.10)_1$

$$-\int_V \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\,\delta_{ik}\,\omega_i(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}) + \nu \int_V \theta(\mathbf{x})\,\gamma_{kk}'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\,dV(\mathbf{x}) = 0\,,$$

skąd

$$\omega_k(\mathbf{x}) = \nu \int_V \theta(\boldsymbol{\xi}) V_{i,i}^{(k)}(\boldsymbol{\xi}, x)\,dV(\boldsymbol{\xi})\,, \qquad \mathbf{x} \in V, \qquad k = 1, 2, 3\,. \tag{8.18}$$

Wzory (8.17) i (8.18) można traktować jako uogólnione wzory Maysela [25] z termosprężystości klasycznej. Jak wiadomo w klasycznej termosprężystości mamy do czynienia jedynie z polem przemieszczeń, tak że w rachubę wchodzi jedynie wzór (8.17). Zauważmy, że uogólnione wzory Maysela odznaczają się wielką prostotą; do wyznaczenia pola przemieszczeń $\mathbf{u}$ i obrotów $\boldsymbol{\omega}$ wystarczy wykonać całkowania wyrażone wzorami (8.17) i (8.18) oczywiście pod warunkiem, że funkcje $U_{i,i}^{(k)}$, $V_{i,i}^{(k)}$ zostały uprzednio określone w ramach teorii sprężystości.

W niniejszej pracy przedstawiono szereg ogólnych twierdzeń niesymetrycznej termosprężystości. Pozostaje cały szereg zadań szczegółowych, odnoszących się przede wszystkim do zagadnień stacjonarnych i niestacjonarnych, jedno i dwuwymiarowych oraz najprostszych przestrzennych. Badanie tych zagadnień będzie przedmiotem dalszych prac.

Literatura cytowana w tekście

1. W. Voigt, *Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle*, Abh. Ges. Wiss. Göttingen, **43** (1887).

2. E. et F. Cosserat, *Theorie des corps deformables*, A. Hermann, Paris 1910.

3. C. Truesdell, R. A. Toupin, *The classical field theories, Encyclopedia of Physics*, Vol. 3/1, Springer, Berlin 1960.

4. R. A. Toupin, *Elastic materials with couple stresses*, Arch. Rat. Mech. Anal., **11** (1962).

5. G. Grioli, *Elasticita asimetrica*, Ann. di Mat. pura ed appl. Ser. IV, **50** (1960).

6. R. D. Mindlin, H. F. Tiersten, *Effects of couple-srtesses in linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **11** (1962).

7. W. T. Koiter, *Couple-stresses in the theory of elasticity* (I) and (II), Proc. Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam. Series B, 1, **67** (1964).

8. R. Muki, E. Sternberg, *The influence of couple-stresses in singular stress concentrations in elastic solids*, ZAMP, 3, **16** (1965).

9. W. Günther, *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Continuum*, Abhdlg. d. Baunschiegischen wissenschaftlichen Gesellschaft, **10** (1958).

10. H. Schäfer, *Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen Cosserat-Kontinuums*, Miszellaneen der Angewandten Mechanik, 1962 Berlin.

11. E. W. Kuwczyński, E. L. Aero, *Kontynualna teoria niesymetrycznej sprężystości* [w jęz. rosyjskim], Fizyka Twierdowo Tieła, **5** (1963).

12. N. A. Palmow, *Podstawowe równania niesymterycznej sprężystości* [w jęz. rosyjskim], Prikł. Matem. Mech., **28** (1964).

13. A. C. Eringen, E. S. Suhubi, *Nonlinear theory of micro-elastic solids*, Part. I, Int. J. Eng. Sci., **2** (1964), 189, part. II — Int. J. Eng. Sci., **2** (1964), 389.

14. H. Neuber, *Über Probleme der Spannungskonzentration in Cosserat-Körper*, Acta Mech., 1, **2** (1966).

15. H. Neuber, *Die Schubbeanspruchte Kerbe in Cosserat Körper*, ZAMM, 5, **47** (1967).

16. N. Sandru, *On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity*, Int. J. Eng. Sci., 1, **4** (1966).

17. W. Nowacki, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*, I, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. techn., **14** (1966), 97.

18. W. Nowacki, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*, II, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. techn. 3, **14** (1966).

19. W. Nowacki, *Couple stresses in the theory of thermoelasticity*, III, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. techn., **14** (1966).

20. W. Nowacki, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*, Proc. of IUTAM-Symposium on Irreversible Aspects in Continuum Mechanics, Vienna 1966 (w druku).

21. W. Nowacki, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1966.

22. H. Neuber, *On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua*, Proc. Intern. Congr. Appl. Mechanics, München 1964, Editor H. Görtler, Berlin (Heidelberg) — New York 1966.

23. M. A. Biot, *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*, J. Appl. Phys., **27** (1956).

24. E. Trefftz, *Mathematische Elastizitätstheorie*, Handbuch der Physik, **6**, *Berlin* 1926.

25. V. M. Maysel, *Температурная задача теории упругости*, Киев 1951.

Резюме

МОМЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТЕРМОУПРУГОСТИ

В работе обобщаются некоторые теоремы теории сопряженной термоупругости на среду, характеризующуюся двумя не зависящими друг от друга векторами: вектор перемещения **u** и вектор оборота **ω**.

На основе термодинамики необратимых процессов, выводится определяющее уравнение и полное уравнение теплопроводности для изотропной среды. Автору, удалось получить основную систему дифференциальных уравнений сопряженной термоупругости. Обсуждается распространение термоупругих волн в бесконечной среде. Кроме того, обобщается принцип виртуальных работ на динамическую задачу сопряженной термоупругости.

В заключение выводится теорема о взаимности и обсуждаются все заключения, вытекающие из этой теоремы.

Summary

COUPLE STRESSES IN THERMOELASTICITY

The aim of the present paper is to generalize some theorems on the coupled thermoelasticity on a medium characterised by two vectors independent from each other: the displacement vector **u** and the rotation vector **ω**.

Basing on the thermodynamics of irreversible processes the constitutive equations and the expanded equation of heat conductivity for an isotropic medium are derived. The author succeeded in obtaining a basic system of differential equations of coupled thermoelasticity. The propagation of thermoelastic waves in an unbounded medium is discussed.

Moreover, a generalization of the virtual work principle on dynamic problem of coupled thermoelasticity is advanced.

Finally, the reciprocity theorem is derived and some conclusions resulting from this theorem are discussed.

POLSKA AKADEMIA NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 kwietnia 1968 r.