ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 15 (1967)

PERIODYCZNE DRGANIA SWOBODNE BELKI PRZY SŁABO-NIELINIOWYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH

WANDA SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA (WARSZAWA)

Temaetm pracy jest obliczanie częstości i postaci własnych belki w przypadku, gdy dwa spośród czterech warunków brzegowych sprężystego podparcia mają charakterystykę nieliniową typu Duffinga przy założeniu, że wyrazy nieliniowe są małe i związane z tzw. małym parametrem ε.

Zagadnieniem drgań belek przy słabo-nieliniowych warunkach brzegowych zajmowało się wielu autorów, np. [4–8].

Podstawą analitycznego ujęcia drgań układów słabo-nieliniowych są przybliżone metody znane pod nazwą metody perturbacji, metody małego parametru, metody Kryłowa-Bogolubowa, metody uśrednienia lub metody Ritza. Metody te są szeroko omawiane w literaturze dla układu o jednym stopniu swobody i uogólnione na układy o wielu stopniach swobody [1, 3, 11 i 12] i z powodzeniem stosowane również dla układów ciągłych, np. [9 i 10]. Zastosowanie metod wariacyjnych do rozwiązania belek omawiane jest np. w [12]. Szczegółowa analiza drgań swobodnych periodycznych i prawie-periodycznych oraz drgań wymuszonych siłą harmoniczną belki z jednym warunkiem brzegowym nieliniowym przeprowadzona jest w [5 i 6] pod kątem zbadania wpływu nieliniowości na częstości i postacie drgań. W pracy tej zastosowano metodę małego parametru z pewną modyfikacją, dzięki której w rozwiązaniu pierwszego przybliżenia nie tylko częstości, lecz i postacie własne określone są z dokładnością do ε (z błędem rzędu ε^2).

Metodę tę zastosowano obecnie do belki, gdy w dwóch warunkach brzegowych występują wyrazy nieliniowe. Ten sam temat poruszany był w pracy [7]. Celem łatwiejszego porównania metody i wyników zastosowano te same oznaczenia.

1. Rozwiązanie ogólne zagadnienia

Drgania swobodne jednorodnej belki podpartej sprężyście na końcach mogą być opisane za pomocą równania ruchu belki

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{1.1}$$

oraz czterech warunków brzegowych (1.2), z których dwa zgodnie z założeniem niniejszej pracy zawierają wyrazy nieliniowe związane z małym parametrem ε:

oraz

$$
\begin{aligned}
& EI\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} - h_1\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \\
& EI\frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^3} + c_1 u(0,t) = 0\,, \\
& EI\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2} + h_2\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \varepsilon\gamma_1\left[\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}\right]^3 = 0, \\
& EI\frac{\partial^3 u(l,t)}{\partial x^3} - c_2 u(l,t) - \varepsilon\gamma_2[u(l,t)]^3 = 0\,,
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

gdzie EI oznacza sztywność giętną belki, m masę jednostki długości belki, $u(x, t)$ ugięcie poprzeczne linii środkowej belki, w punkcie o współrzędnej x w chwili t, l długość belki, $\gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2, c_1, c_2$ współczynniki sprężystego zamocowania oraz ε bezwymiarowy współczynnik («mały parametr»). O współczynniku ε zakładamy, że jest znacznie mniejszy od $\varepsilon \ll 1$.

Jak wiadomo, dla układu liniowego, tj. dla $\varepsilon = 0$, rozwiązanie szczególne równania belki jest następujące:

$$u(x,t) = X_0(x)T(t)\,, \tag{1.3}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
& X_0(x) = C_1\sin\lambda x + C_2\cos\lambda x + C_3\,\mathrm{sh}\,\lambda x + C_4\,\mathrm{ch}\,\lambda x\,, \\
& T(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\,,
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

a między λ i ω zachodzi związek

$$\omega^2 = \frac{\lambda^4 EI}{m}\,. \tag{1.5}$$

Stałe A i φ zależą od warunków początkowych. Jeżeli przyjmiemy, że w chwili początkowej prędkość była równa zeru:

$$t = 0\,, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} = 0\,, \tag{1.6}$$

to $\varphi = 0$.

Warunki brzegowe pozwalają określić trzy z czterech stałych C_1, C_2, C_3 i C_4 jako funkcję jednej z nich, np. C_1, a wartości parametru $\lambda = \lambda_n$, a zatem i częstości własnych $\omega = \omega_n$, otrzymujemy z równania charakterystycznego wyprowadzonego z warunku niezerowego rozwiązania:

$$F(\lambda_n) = 0\,. \tag{1.7}$$

Ostatecznie rozwiązaniem periodycznym układu (1.1) i (1.2) przy $\varepsilon = 0$ i (1.6) jest funkcja

$$u(x,t) = A\,C_1 f(\lambda_n, x)\cos\omega_n t, \tag{1.8}$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$X_0(\lambda_n, x) = C_1 f(\lambda_n, x) = \tag{1.9}$$
$$= C_1 \left[\sin \lambda_n x + \frac{C_2(\lambda_n)}{C_1}\cos \lambda_n x + \frac{C_3(\lambda_n)}{C_1}\operatorname{sh} \lambda_n x + \frac{C_4}{C_1}\operatorname{ch} \lambda_n x\right].$$

Współczynniki C_2/C_1, C_3/C_1 i C_4/C_1 jako funkcje parametru λ są różne w zależności od tego, z którego warunku brzegowego są wyznaczone, ale dla $\lambda = \lambda_n$ mają te same wartości.

Chcąc nadać amplitudzie A określone znaczenie fizyczne normalizujemy postacie własne $X_0(\lambda_n, x)$ przyjmując, że przybierają one wartość 1 w wybranym punkcie belki, np dla $x = l$. Stąd wyznaczamy stałą dowolną w (1.4):

$$C_1 = \frac{1}{f(l, \lambda_n)}. \tag{1.10}$$

Stała A oznacza więc amplitudę drgań periodycznych punktu belki o współrzędnej $x = l$.

Rozwiązania periodycznego dla układu nieliniowego ($\varepsilon > 0$) przy warunku początkowym (1.6) szukać będziemy w postaci szeregu potęgowego względem małego parametru ε:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \cos \omega t\,[X_0(x, \lambda_n) + \varepsilon \Delta X_1(x) + \varepsilon^2 \Delta X_2(x) + \ldots] + \\ &\quad + \varepsilon u_1(x, t) + \varepsilon^2 u_2(x, t) + \varepsilon^3 \ldots, \\ \omega &= \omega_n + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^3 \ldots, \end{aligned} \tag{1.11}$$

gdzie $X_0(x)$ i ω_n są odpowiednio postacią i częstością własną układu zlinearyzowanego,

$$a_1, a_2, \ldots, \Delta X_1(x), \Delta X_2(x), \ldots, u_1(x, t), u_2(x, s), \ldots \tag{1.12}$$

nieznanymi współczynnikami i funkcjami.

Z założenia, że szukane rozwiązanie ma być periodyczne o okresie $2\pi/\omega$ wynika, że funkcje $u_1(x, t)$, $u_2(x, t), \ldots$ muszą być również periodyczne o tym samym okresie. Ponadto, zgodnie z modyfikacją pracy [5], dzięki wprowadzeniu poprawkowych funkcji postaci własnych $\Delta X_1(x)$, $\Delta X_2(x), \ldots$ na funkcje $u_1(x, t)$ i $u_2(x, t) \ldots$ nakładamy warunek, aby nie zawierały wyrazów z pierwszą harmoniczną $\cos \omega t$. Na funkcje ΔX_1 i $\Delta X_2 \ldots$ nałożymy również warunek normalizujący:

$$\Delta X_1(l) = \Delta X_2(l) = \ldots = 0. \tag{1.13}$$

Dzięki temu warunkowi stała A i w układzie nieliniowym przedstawia amplitudę drgań pierwszej harmonicznej punktu belki o współrzędnej $x = l$.

Współczynniki $a_1, a_2, \ldots$ są poszukiwanymi współczynnikami poprawkowymi częstości własnych.

W poszukiwaniu współczynników szeregu (1.11) założone rozwiązanie podstawimy do równań (1.1) i (1.2) i przyrównamy wyrazy przy jednakowych potęgach ε. Z przyrównania wyrazów przy ε^1 otrzymamy:

$$
(1.14)\quad
\begin{aligned}
&EI\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=-A\cos\omega t\left[EI\frac{d^4\Delta X_1}{dx^4}-m\omega_n^2\Delta X_1-2m\omega_n a_1 X_0(x)\right],\\
&EI\frac{\partial^2 u_1(0,t)}{\partial x^2}-h_1\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}+A\cos\omega t\left[EI\frac{d^2\Delta X_1(0)}{dx^2}-h_1\frac{d\Delta X_1(0)}{dx}\right]=0,\\
&EI\frac{\partial^3 u_1(0,t)}{\partial x^3}+c_1 u_1(0,t)+A\cos\omega t\left[EI\frac{d^3\Delta X_1(0)}{dx^3}+c_1\Delta X_1(0)\right]=0,\\
&EI\frac{\partial^2 u_1(l,t)}{\partial x^2}+h_2\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x}+A\cos\omega t\left\{EI\frac{p^2\Delta X_1(l)}{dx^2}+h_2\frac{d\Delta X_1(l)}{dx}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3}{4}\gamma_1 A^2\left[\frac{dX_0(l)}{dx}\right]^3\right\}+\frac{1}{4}\gamma_1 A^3\left[\frac{dX_0(l)}{dx}\right]^3\cos 3\omega t=0,\\
&EI\frac{\partial^3 u_1(l,t)}{\partial x^3}-c_2 u_1(l,t)+A\cos\omega t\left\{EI\frac{d^3\Delta X_1(l)}{dx^3}-c_2\Delta X_1(l)-\frac{3}{4}\gamma_2 A^2\right\}+\\
&\qquad-\frac{1}{4}\gamma_2 A^3\cos 3\omega t=0.
\end{aligned}
$$

Z warunku, że $u_1(x,t)$ ma być periodyczna i nie zawierać wyrazów $\cos\omega t$ wynika, że współczynniki przy $\cos\omega t$ w (1.14) muszą być równe zeru:

$$
(1.15)\quad
\begin{aligned}
&EI\frac{d^4\Delta X_1}{dx^4}-m\omega_n^2\Delta X_1=2m\omega_n a_1 X_0(x),\\
&\left[EI\frac{d^2\Delta X_1}{dx^2}-h_1\frac{d\Delta X_1}{dx}\right]_{x=0}=0,\\
&\left[EI\frac{d^3\Delta X_1}{dx^3}+c_1\Delta X_1\right]_{x=0}=0,\\
&EI\frac{d^2\Delta X_1(l)}{dx^2}+h_2\frac{d\Delta X_1(l)}{dx^2}+\frac{3}{4}\gamma_1 A^2\left[\frac{dX_0(l)}{dx}\right]^3=0,\\
&EI\frac{d^3\Delta X_1(l)}{dx^3}-c_2\Delta X_1(l)-\frac{3}{4}\gamma_2 A^2=0.
\end{aligned}
$$

Tak więc, aby równanie (1.1) i warunki brzegowe (1.2) były spełnione z dokładnością do ε^1 (z błędem rzędu ε^2) współczynniki szeregu przy ε^1 w (1.12), ΔX_1, a_1 muszą spełniać (1.15), a funkcja $u_1(x,t)$ równanie (1.14) przy uwzględnieniu (1.15). Rozwiązanie układu (1.15) jako układu równań liniowych podlega prawu superpozycji. Stąd wypływa wniosek, że współczynnik poprawkowy częstości a_1 i postaci własnej ΔX_1 przy dwóch warunkach brzegowych nieliniowych $\gamma_1 \neq 0$ i $\gamma_2 \neq 0$ będzie sumą współczynników poprawkowych obliczonych dla jednego warunku brzegowego nieliniowego ($\gamma_1 \neq 0$ lub $\gamma_2 \neq 0$).

Jeżeli współczynniki poprawkowe dla jednego warunku nieliniowego oznaczymy odpowiednio:

$$(1.16)\qquad \begin{array}{llll} a_1^{(1)},\ \Delta X_1^{(1)} & \text{dla} & \gamma_1 \neq 0\,, & \gamma_2 = 0; \\ a_1^{(2)},\ \Delta X_1^{(2)} & \text{dla} & \gamma_1 = 0\,, & \gamma_2 \neq 0, \end{array}$$

to dla warunków brzegowych nieliniowych, tj. dla $\gamma_1 \neq 0$ i $\gamma_2 \neq 0$, mamy

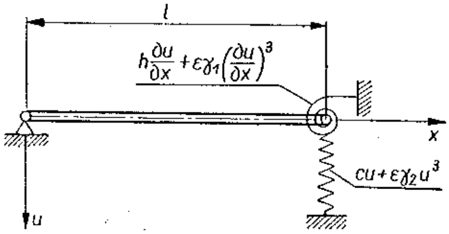
$$(1.17)\qquad a_1 = a_1^{(1)} + a_1^{(2)}, \qquad \Delta X_1 = \Delta X_1^{(1)} + \Delta X_1^{(2)}.$$

2. Przykład w ujęciu ogólnym

Szczegółowe rozwiązanie i analizę wyników przedstawimy dla uproszczonego układu, w którym dwa warunki brzegowe są jednorodne:

$$(2.1)\qquad \begin{gathered} u(0,t) = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0\,, \\ EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) + h\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + \varepsilon\gamma_1\left[\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)\right]^3 = 0\,, \\ EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(l,t) - cu(l,t) - \varepsilon\gamma_2\,[u(l,t)]^3 = 0\,. \end{gathered}$$

Modelem tego układu jest belka zamocowana przegubowo na jednym końcu (dla $x = 0$), a na drugim końcu (dla $x = l$) podparta sprężyście tak, że i siła sprężysta i moment zawierają wyrazy nieliniowe (rys. 1).



Rys. 1

Dla układu zlinearyzowanego postacie własne $X_0(x)$ (1.9) oraz częstości własne ω_n wyznaczymy z (2.2) powstałych z podstawienia (1.4)-(2.1) przy założeniu $\varepsilon = 0$:

$$(2.2)\qquad \begin{gathered} C_2 + C_4 = 0\,, \qquad -C_2\lambda^2 + C_4\lambda^2 = 0\,, \\ EI(-C_1\lambda^2 \sin\lambda l + C_3\lambda^2 \operatorname{sh}\lambda l) + h(C_1\lambda\cos\lambda l + C_3\lambda\operatorname{ch}\lambda l) = 0\,, \\ EI(-C_1\lambda^3\cos\lambda l + C_3\lambda^3\operatorname{ch}\lambda l) - c(C_1\sin\lambda l + C_3\operatorname{sh}\lambda l) = 0\,. \end{gathered}$$

Stąd

$$(2.3)\qquad \begin{gathered} C_2 = C_4 = 0\,, \\ g_{11}(\lambda) = \left[\frac{C_3}{C_1}\right]_1 = \frac{EI\lambda^3\cos\lambda l + c\sin\lambda l}{EI\lambda^3\operatorname{ch}\lambda l - c\operatorname{sh}\lambda l} \end{gathered}$$

lub

$$g_{12}(\lambda) = \left[\frac{C_3}{C_1}\right]_2 = \frac{EI\lambda\sin\lambda l - h\cos\lambda l}{EI\lambda\operatorname{sh}\lambda l + h\operatorname{ch}\lambda l}.$$

Równanie charakterystyczne jest następujące:

$$F(\lambda_n) = \left[\frac{C_3}{C_1}\right]_1 - \left[\frac{C_3}{C_1}\right]_2 = 0. \tag{2.4}$$

Dla $\lambda = \lambda_n$ zachodzi więc oczywiście równość

$$g_{11}(\lambda_n) = g_{12}(\lambda_n) = g_1(\lambda_n). \tag{2.5}$$

Zatem postać własną układu zlinearyzowanego $X_0(x, \lambda_n)$ jako funkcję parametru λ można przedstawić w dwóch różnych formach:

$$\begin{aligned} X_{01}(x, \lambda) &= C_{11}\,[\sin \lambda x + g_{11}\,\mathrm{sh}\,\lambda x] = C_{11} f_1(x, \lambda), \\ X_{02}(x, \lambda) &= C_{12}\,[\sin \lambda x + g_{12}\,\mathrm{sh}\,\lambda x] = C_{12} f_2(x, \lambda), \end{aligned} \tag{2.6$_1$}$$

lub inaczej, jako kombinację liniową $X_{01}(x, \lambda)$ i $X_{02}(x, \lambda)$:

$$X_{03}(x, \lambda) = \delta_1 C_{11} f_1(x, \lambda) + \delta_2 C_{12} f_2(x, \lambda), \qquad \delta_1 + \delta_2 = 1. \tag{2.6$_2$}$$

Zgodnie z założeniem, że $X_0(l) = 1$, stałe C_{11} i C_{12} są następujące:

$$C_{11} = \frac{1}{f_1(l, \lambda)}, \qquad C_{12} = \frac{1}{f_2(l, \lambda)}. \tag{2.6$_3$}$$

Szukając rozwiązania periodycznego układu nieliniowego (1.1), (2.1) w postaci szeregu (1.12) rozwiążmy układ (1.15) w celu znalezienia współczynników pierwszego przybliżenia ΔX_1, a_1. Dla warunków brzegowych (2.1) układ (1.15) przybierze postać

$$\begin{aligned} & EI\frac{d^4 \Delta X_1}{dx^4} - m\omega_n^2 \Delta X_1 = 2m\omega_n a_1 X_0(x, \lambda_n), \\ & \Delta X_1(0) = 0, \qquad \frac{d^2 \Delta X_1(0)}{dx^2} = 0, \\ & EI\frac{d^2 \Delta X_1(l)}{dx^2} + h\frac{d\Delta X_1(l)}{dx} = -\frac{3}{4}\gamma_1 A^2 \left[\frac{dX_0(l)}{dx}\right]^3, \\ & EI\frac{d^3 \Delta X_1(l)}{dx^3} - c\Delta X_1(l) = \frac{3}{4}\gamma_2 A^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Rozwiązanie (2.7) składa się, jak wiadomo, z sumy rozwiązania równania uproszczonego jednorodnego oraz rozwiązania szczególnego równania pełnego:

$$\Delta X_1 = \Delta C_1 \sin \lambda_n x + \Delta C_2 \cos \lambda_n x + \Delta C_3\,\mathrm{sh}\,\lambda_n x + \Delta C_4\,\mathrm{ch}\,\lambda_n x + \Delta X_{1\,\text{szczeg.}} \tag{2.8}$$

Całkę szczególną można znaleźć w postaci

$$\Delta X_{1\,\text{szczeg.}} = \frac{a_1 \lambda_n}{2\omega_n}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x}\,x\right)\frac{1}{\lambda_n} = \beta_{1n}\frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x}\,x\right). \tag{2.9}$$

Podstawiając (2.8) i (2.9) do (2.7) oraz do (1.13) otrzymamy:

$$\Delta C_2 = \Delta C_4 = 0\,,$$

$$\Delta C_1(-EI\lambda^2 \sin\lambda l + h\lambda\cos\lambda l) + \Delta C_3(EI\lambda^2 \operatorname{sh}\lambda l + h\lambda \operatorname{ch}\lambda l) =$$
$$= -\frac{a_1}{2\omega_n}\left[EI\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dX_0}{dx}x\right) + h\frac{d}{dx}\left(\frac{dX_0}{dx}x\right)\right]_{x=l} - \frac{3}{4}A^2\gamma_1\left[\frac{dX_0(l)}{dx}\right]^3,$$

$$\Delta C_1(-EI\lambda^3\cos\lambda l - c\sin\lambda l) + \Delta C_3(\lambda^3 EI \operatorname{ch}\lambda l - c\operatorname{sh}\lambda l) = \tag{2.10}$$
$$= -\frac{a_1}{2\omega_n}\left[EI\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dX_0}{dx}x\right) - c\left(\frac{dX_0}{dx}x\right)\right]_{x=l} + \frac{3}{4}A^2\gamma_2\,,$$

$$\Delta C_1 \sin\lambda l + \Delta C_3 \sin h\lambda l + \frac{a_1}{2\omega_n}\left[\frac{dX_0}{dx}x\right]_{x=l} = 0\,.$$

Z (2.10) otrzymamy

$$a_1 = \frac{\frac{3}{2}A^2\gamma_1\left[\frac{dX_0(l)}{dx}\right]\omega_n}{\left[EI\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dX_0}{dx}x\right) - c\left(\frac{dX_0}{dx}\right)\right]_{x=l}\frac{EI\lambda^2\operatorname{sh}\lambda l + h\lambda\operatorname{ch}\lambda l}{\lambda^3 EI\operatorname{ch}\lambda l - c\operatorname{sh}\lambda l} - \left[EI\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dX_0}{dx}x\right) + h\frac{d}{dx}\left(\frac{dX_0}{dx}x\right)\right]_{x=l}} + \tag{2.11}$$
$$+ \frac{-\frac{3}{2}A^2\omega_n\gamma_2}{\left[EI\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dX_0}{dx}x\right) - c\left(\frac{dX_0}{dx}x\right)\right]_{x=l} - \left[EI\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dX_0}{dx}x\right) + h\frac{d}{dx}\left(\frac{dX_0}{dx}x\right)\right]_{x=l}\frac{\lambda^3 EI\operatorname{ch}\lambda l - c\operatorname{sh}\lambda l}{\lambda^2 EI\operatorname{sh}\lambda l + h\lambda\operatorname{ch}\lambda l}}.$$

Przeanalizujmy najpierw przypadki, gdy tylko jeden warunek brzegowy jest nieliniowy, tzn. albo 1) $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$ albo 2) $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$. Rozwiązania układu (2.7) można po pewnych przekształceniach przedstawić w postaci następującej:

1) dla $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$

$$\Delta X_1^{(1)} = \beta_1^{(1)}\frac{d}{d\lambda}[C_{11}f_1(x,\lambda)]_{\lambda=\lambda_n}\,,$$

$$a_1^{(1)} = \frac{2\omega_n}{\lambda_n}\beta_1^{(1)} = \frac{2\omega_n}{\lambda_n}\,\frac{\frac{3}{4}A^2\gamma_1\left[\frac{dX_0(l)}{dx}\right]^3}{\left\{\frac{d}{d\lambda}\left[EI\frac{d^2}{dx}(C_{11}f_1) + h\frac{d}{dx}(C_{11}f_1)\right]_{x=l}\right\}_{\lambda=\lambda_n}}\,; \tag{2.12}$$

$C_{11} f_1(x, \lambda)$ określamy wg $(2.6)_1$ i (2.3);

2) dla $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$

$$\Delta X_1^{(2)} = \beta_1^{(2)} \left[\frac{d}{d\lambda} C_{12} f_2(x, \lambda) \right]_{\lambda=\lambda_n},$$

$$a_1^{(2)} = \frac{2\omega_n}{\lambda_n} \beta_1^{(2)} = \frac{2\omega_n}{\lambda_n} \frac{-\frac{3}{4}\gamma_2 A^2}{\frac{d}{d\lambda}\left[EI \frac{d^3}{dx^3}(C_{12} f_2) - c C_{12} f_2 \right]_{x=l}}; \tag{2.13}$$

$C_{12} f_2(x, \lambda)$ podobnie określamy wg $(2.6)_1$ i (2.3). Przy dwóch warunkach brzegowych nieliniowych otrzymamy:

3) $\gamma_1 \neq 0$ i $\gamma_2 \neq 0$

$$\begin{gathered} \Delta X_1 = \Delta X_1^{(1)} + \Delta X_1^{(2)} = \beta_1^{(1)} \frac{d}{d\lambda} [C_{11} f_1(\lambda, x)]_{\lambda=\lambda_n} + \beta_1^{(2)} \frac{d}{d\lambda} [C_{12} f_2(\lambda, x)]_{\lambda=\lambda_n}, \\ a_1 = a_1^{(1)} + a_1^{(2)} \end{gathered} \tag{2.14}$$

lub inaczej

$$\Delta X_1 = \beta_1 \frac{d}{d\lambda} [\delta_1 C_{11} f_1(\lambda, x) + \delta_2 C_{12} f_2(\lambda, x)]_{\lambda=\lambda_n}, \tag{2.15}$$

gdzie

$$\beta_1 = \beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)}, \qquad \delta_1 = \frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_1}, \qquad \delta_2 = \frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_1}.$$

Współczynniki δ_1, δ_2 w (2.15) spełniają warunek $\delta_1 + \delta_2 = 1$. Łatwo zauważyć, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym w (2.15) jest również postacią własną $X_0(x)$ przedstawioną tylko w nieco innej formie jako funkcji parametru λ, $(2.6)_3$.

Ostatecznie rozwiązanie periodyczne w pierwszym przybliżeniu rozważanego układu (1.1) z warunkami brzegowymi (2.1) przy warunkach początkowych (1.6) jest następujące:

$$\begin{gathered} u(x, t) = A \cos \omega t \left\{ X_0(x) + \varepsilon \beta_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [X_{01}(x, \lambda)] \lambda = \lambda_n + \varepsilon \beta_1^{(2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [X_{02}(x, \lambda)]_{\lambda=\lambda_n} \right\}, \\ \omega = \omega_n + \varepsilon a_1, \\ a_1 = a_1^{(1)} + a_1^{(2)} = \frac{2\omega_n}{\lambda_n} (\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)}), \end{gathered} \tag{2.16}$$

gdzie A jest amplitudą końca belki dla $x = l$, $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$ — określone są za pomocą (2.12) i (2.13), a $X_{01}(x, \lambda)$, $X_{02}(x, \lambda)$ jest to postać własna układu zlinearyzowanego przedstawiona w różnej formie jako funkcja parametru λ (wg (2.6) i (2.3)).

Dodając do (2.16) funkcję dodatkową $u_1(x, t)$ otrzymamy tzw. «ulepszone pierwsze przybliżenie». Funkcję tę wyznaczymy z (1.14) przy uwzględnieniu (1.15) i (2.1):

$$u_1(x, t) = X_1(x) \cos 3\omega t, \tag{2.17}$$

gdzie $X_1(x)$ jest postacią drgań belki pod wpływem skupionej siły i momentu o częstości 3ω przyłożonych do końca belki:

$$X_1(x) = \bar{C}_1 \sin \bar{\lambda}x + \bar{C}_2 \cos \bar{\lambda}x + \bar{C}_3 \operatorname{sh} \bar{\lambda}x + \bar{C}_4 \operatorname{ch} \bar{\lambda}x, \quad \bar{\lambda}^4 = 9\omega_n^2 \frac{m}{EI}, \tag{2.18}$$

a współczynniki $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$, $\bar{C}_4$ spełniają równania:

$$\bar{C}_2 + \bar{C}_4 = 0, \quad \lambda^2[-\bar{C}_2 + \bar{C}_4] = 0,$$

$$\begin{aligned} &\bar{C}_1(EI\bar{\lambda}^2 \sin \bar{\lambda}l + h\bar{\lambda} \cos \bar{\lambda}l) + \bar{C}_3(EI\bar{\lambda}^2 \operatorname{sh} \bar{\lambda}l + h\bar{\lambda} \operatorname{ch} \bar{\lambda}l) = -\frac{1}{4}\gamma_1 A^3 \left[\frac{dX_0(l)}{dx}\right]^3, \\ &\bar{C}_1(-EI\bar{\lambda}^3 \cos \bar{\lambda}l - c \sin \bar{\lambda}l) + \bar{C}_3(\bar{\lambda}^3 EI \operatorname{ch} \bar{\lambda}l - c \operatorname{sh} \bar{\lambda}l) = \frac{1}{4}\gamma_2 A^3. \end{aligned} \tag{2.19}$$

I tu również stosuje się prawo superpozycji i funkcja $u_1(x, t)$ reprezentująca tzw. trzecią harmoniczną rozwiązania przy dwóch warunkach brzegowych nieliniowych można przedstawić jako sumę funkcji $u_1^{(1)}$ i $u_1^{(2)}$ występujących przy jednym warunku nieliniowym

$$u_1(x, t) = u_1^{(1)} + u_1^{(2)}, \tag{2.20}$$

gdzie

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= u_1 \quad \text{dla} \quad \gamma_1 \neq 0, \ \gamma_2 = 0, \\ u_1^{(2)} &= u_1 \quad \text{dla} \quad \gamma_1 = 0, \ \gamma_2 \neq 0. \end{aligned}$$

3. Analiza wyników

Otrzymany wynik wskazuje, że efekty dwóch nieliniowych warunków brzegowych sumują się w rozwiązaniu pierwszego przybliżenia. Zarówno współczynnik poprawkowy częstości własnej a_1 jak i współczynnik poprawkowy postaci własnej ΔX_1 otrzymano jako sumę odpowiednich współczynników $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$ i $\Delta X_1^{(1)}$, $\Delta X_1^{(2)}$ dla przypadku, gdy tylko jeden z warunków brzegowych jest nieliniowy. Własność ta wynika z ogólnej teorii rozwiązania pierwszego przybliżenia. Współczynniki ΔX_1 i a_1 otrzymuje się ostatecznie z równań liniowych (1.15) i (2.7), w których ma zastosowanie zasada superpozycji. Wynika stąd, że zasada ta stosuje się również w przypadku większej liczby warunków nieliniowych. Otrzymane wyniki różnią się zasadniczo od wyników w pracy [7]. Na uwagę zasługują następujące różnice w ujęciu zagadnienia:

1. Rozwiązanie zagadnienia opisanego równaniami (1.1) i (1.2) przedstawione jest również w postaci szeregu potęgowego względem ε (1.12) lecz od razu z góry ustalona jest część współczynników tego szeregu i założone jest rozdzielenie zmiennych w dowolnie wysokim stopniu przybliżenia. Dla $\gamma_1 \neq 0$ i $\gamma_2 \neq 0$ założono

$$\Delta X_1 = \beta_1 \frac{d}{d\lambda}[f_1(x, \lambda) + f_2(x, \lambda)], \quad u_1(x, t) = q_1(t) X_0(x, \lambda_n). \tag{3.1}$$

Założone w tej formie rozwiązanie nie zostaje podstawione do równań (1.1) i (1.2), lecz do sformułowanego dodatkowo równania wyprowadzonego z zasady wariacyjnej Hamiltona, z którego obliczony zostaje współczynnik a_1. Jest rzeczą niewątpliwą, że otrzymane w ten sposób rozwiązanie w pierwszym przybliżeniu, tzn. z dokładnością do ε^1, jest rozwiązaniem układu opisanego równaniem belki (1.1) i równaniami brzegowymi, o ile współczynniki szeregu zostały tak dobrane, że jednocześnie warunki brzegowe są spełnione z taką samą dokładnością. Warunkiem spełnienia warunków brzegowych z dokładnością do ε^1 (z błędem rzędu ε^2) jest, aby współczynniki ΔX_1 i a_1 spełniały układ (1.15) lub (2.7). Założone w pracy [7] ΔX_1 przy jednym warunku nieliniowym spełnia ten warunek, lecz przy dwóch warunkach nieliniowych ΔX_1 założone w postaci (3.1) tego warunku nie spełnia.

Stąd również obliczony współczynnik poprawkowy częstości własnej a_1 jest zasadniczo różny, a ponadto nie podlega prawu superpozycji i nie został podany w formie zamkniętego wzoru.

2. W pracy [7] postać własna nie została znormalizowana i przyjęto $C_{11} = C_{12} = 1$. W rezultacie przy jednym warunku nieliniowym stała A oznacza amplitudę tego punktu belki $x = \bar{x}$, w którym $f_1(\bar{x}, \lambda) = 1$, natomiast przy dwóch warunkach nieliniowych — amplitudę tego punktu belki $x = \bar{\bar{x}}$, w którym $f_1(\bar{\bar{x}}, \lambda) + f_2(\bar{\bar{x}}, \lambda) = 1$. Współczynnik poprawkowy a_1 wyrażający wpływ nieliniowości na częstość własną jest w ostatecznej formie funkcją amplitudy A. Porównywany jest wpływ amplitudy na a_1 przy jednym i przy dwóch warunkach nieliniowych, mimo że w tych dwóch przypadkach stała A oznacza co innego.

3. W pracy [7] zapowiedziane jest, że zagadnienie zostanie rozwiązane dla dowolnych warunków początkowych, np.

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = 0,$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza dowolne początkowe wychylenie belki, a następnie poszukiwane jest rozwiązanie szczególne, periodyczne

$$u(x, t) = T(t)\, X(x).$$

Dla $t = 0$ mamy więc

$$\varphi(x) = T(0)\, X(x), \qquad T(0) = A.$$

Nie zostaje postawiony warunek, aby równanie to było spełnione w każdym punkcie belki, z czego od razu wypływa wniosek, że $\varphi(x)$ jako funkcja x musi być identyczna z postacią własną $X(x)$ lecz tylko w jednym, wybranym punkcie belki o współrzędnej $x = x_0$.

Literatura cytowana w tekście

1. Н. Боголюбов, Н. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Москва 1961.

2. S. Ziemba, *Analiza drgań*, tom II, PWN, Warszawa 1959.

3. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, ГИТТЛ, Москва 1956.

4. B. Porter, R. A. Billet, *Harmonic and subharmonic vibration of a continuous system having nonlinear constraint*, Int. J. of Mech. Sci., 6, 7 (1965).

5. W. Szemplińska-Stupnicka, *The principal modes of a certain continuous nonlinear system and their properties*, Sprawozdanie z Trzeciej Konferencji Drgań Nieliniowych, Berlin 1964.

6. W. Szemplińska-Stupnicka, *Almost-periodic vibration of certain autonomous weakly-nonlinear multi-degree-of-freedom systems*, Arch. Budowy Maszyn, 2, **12** (1965).

7. K. Piszczek, I. Sobejko, *Drgania swobodne belki przy słabonieliniowych warunkach brzegowych*, Rozpr. Inżyn., 2, **12** (1965).

8. Григорьев, *Нелинейные колебания элементов машин и сооружений*, ГИТИМЛ, Москва 1961.

9. Г. С. Писаренко, *Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале*, Изд. АН УССР, 1955.

10. P. R. Sethna, *Free vibrations of beams with nonlinear viscoelastic material properties*, Proc. of the IVth US National Congress of Applied Mechanics, 1962.

11. P. R. Sethna, *Transients in certain autonomous multiple-degree-of-freedom nonlinear vibrating systems*, J. of Appl. Mech., 1, 1963.

12. H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin 1958.

Резюме

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ ПРИ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В работе обсуждаются свободные, периодические колебания однородной балки в случае когда в двух краевых условиях существуют малые нелинейные выражения. Периодические решения в первом приближении получаются с помощью модифицированного метода „малого параметра”. Доказывается, что поправочные коэффициенты частоты и собственной формы при двух нелинейных краевых условиях являются суммой соответствующих коэффициентов при одном краевом условии. Показано, что принцип суперпозиции имеет применение также и при большем количестве нелинейных условий.

Summary

NATURAL PERIODIC VIBRATION OF A BEAM WITH WEAKLY NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

Natural periodic vibration of a homogeneous beam is considered in the case of the presence of small nonlinear terms in two boundary conditions. In the first approximation periodic solution is obtained by means of the modified perturbation method. It is shown that the correction coefficients of natural frequencies and modes are, for two nonlinear boundary conditions, sums of the corresponding coefficients for a single nonlinear condition. It is also shown that the principle of superposition remains valid for a larger number of nonlinear conditions.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
KATEDRA MECHANIKI OGÓLNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 marca 1966 r.