ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
4, 15 (1967)

SKOŃCZONE ODKSZTAŁCENIA NIESPRĘŻYSTYCH, WIOTKICH, OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH POWŁOK ORTOTROPOWYCH

JANUSZ ORKISZ (KRAKÓW)

1 Uwagi wstępne

W kilku poprzednich pracach [31—34] autor rozważał problem skończonych odkształceń osiowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy przyjęciu izotropii materiału. Jednakże w rzeczywistych powłokach założenie to często nie jest spełnione, co ogranicza zasięg poprzednio uzyskanych rezultatów. Tak np. w konstrukcjach pneumatycznych stosowanych w budownictwie powszechnie używa się tworzyw sztucznych zbrojonych ortotropową osnową [17, 35 i 38], przy obróbce plastycznej metali anizotropia materiału powstaje [3, 20 i 21] już w wyniku samego procesu technologicznego. Stąd powłoki anizotropowe od dawna stanowią przedmiot zainteresowania wielu autorów, przy czym ze względu na liczne trudności najczęściej rozpatrywano jedynie małe odkształcenia [2 i 28]. O ile jednak związki fizyczne wykorzystywane w tym celu w zakresie sprężystym materiału mają odpowiednie uzasadnienie doświadczalne i teoretyczne, o tyle w zakresie plastycznym, zwłaszcza przy dużych odkształceniach, sytuacja przedstawia się inaczej. Już bowiem przy małych odkształceniach, mimo blisko czterdziestoletniej historii [29], teoria ośrodka anizotropowego ciągle jeszcze jest przedmiotem teoretycznych dociekań [13] i eksperymentalnej weryfikacji. Począwszy od podstawowej pracy R. HILLA [19] powstało szereg różnych, na ogół popartych pewnymi doświadczeniami, koncepcji nawiązujących bądź to do modelu ciała idealnie plastycznego (por. np. [12, 39 i 40]) bądź też ciała podlegającego wzmocnieniu (por. np. [22 i 23]).

Jeden z głównych problemów takich teorii i związanych z nimi eksperymentów stanowi zagadnienie stałości (lub raczej zmienności w procesie odkształceń) kierunków anizotropii w ciele. Z uwagi na liczne związane z tym trudności tylko w niektórych pracach [13] przyjmowano, że osie anizotropii mogą zmieniać swoje położenie. Najczęściej rozpatrywano przypadek ortotropii materiału, gdzie ponadto stałe kierunki anizotropii pokrywały się na ogół z niezmiennymi kierunkami naprężeń głównych. Takie właśnie założenia przyjęli L. R. JACKSON, K. F. SMITH, W. T. LANKFORD w pracy [24] poświęconej doświadczalnemu uzasadnieniu proponowanej postaci związków fizycznych zachodzących przy skończonych odkształceniach ortotropowego ośrodka plastycznego. Związki te mają formalnie podobną postać do równań podanych przez R. HILLA [19 i 20], lecz dotyczą rzeczywistych naprężeń i logarytmicznych odkształceń. Doświadczenia przeprowadzane przez autorów pracy [24] przy jednoosiowym rozciąganiu oraz na membranach poddanych działaniu stałego ciśnienia potwierdziły słuszność proponowanych równań w przypadku, gdy osie ortotropii i kierunki główne naprężeń pokrywają się i nie zmieniają swego położenia w procesie obciążania. Podobne równania proponowali również J. E. DORN [7] i J.C. FISHER [11]. Przytoczymy je w zapisie podanym przez L.W. HU [22]:

$$
\begin{aligned}
d\varepsilon_1 &= [a_1\sigma_1 - (a_{12}\sigma_2 + a_{31}\sigma_3)]\, d\Phi,\\
d\varepsilon_2 &= [a_2\sigma_2 - (a_{23}\sigma_3 + a_{12}\sigma_1)]\, d\Phi,\\
d\varepsilon_3 &= [a_3\sigma_3 - (a_{31}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2)]\, d\Phi,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

gdzie

$$
a_1 = a_{12} + a_{31}, \qquad a_2 = a_{23} + a_{12}, \qquad a_3 = a_{31} + a_{23}
\tag{1.2}
$$

są współczynnikami anizotropii. Wartości ich określa się doświadczalnie [18]. Przez σ_1, σ_2, σ_3 oznaczamy tu rzeczywiste naprężenia główne, a przez $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ przyrosty odkształceń w danej cząstce ciała, wywołane przyrostem obciążenia. Związki (1.1) mają czysto fenomenologiczny charakter i są uogólnieniem znanych równań NÁDAI'A [30] na przypadek ciała ortotropowego.

Jeśli przez

$$
\bar{\sigma} = \sqrt{a_{12}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + a_{23}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + a_{31}(\sigma_3 - \sigma_1)^2}
\tag{1.3}
$$

oznaczymy wielkość, którą w dalszym ciągu nazywać będziemy intensywnością rzeczywistych naprężeń, a przez

$$
\bar{\varepsilon} = \frac{1}{G}\sqrt{a_{12}(a_{23}\varepsilon_1 - a_{31}\varepsilon_2)^2 + a_{23}(a_{31}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_3)^2 + a_{31}(a_{12}\varepsilon_3 - a_{23}\varepsilon_1)^2}\,,
\tag{1.4}
$$

$$
d\bar{\varepsilon} = \frac{1}{G}\sqrt{a_{12}(a_{23}\,d\varepsilon_1 - a_{31}\,d\varepsilon_2)^2 + a_{23}(a_{31}\,d\varepsilon_2 - a_{12}\,d\varepsilon_3)^2 + a_{31}(a_{12}\,d\varepsilon_3 - a_{23}\,d\varepsilon_1)^2}
\tag{1.5}
$$

wielkości zwane dalej odpowiednio intensywnościami logarytmicznych odkształceń i przyrostów deformacji, gdzie

$$
G = a_{12}a_{23} + a_{23}a_{31} + a_{31}a_{12},
\tag{1.6}
$$

to jak widać z (1.1)

$$
d\Phi = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}.
\tag{1.7}
$$

W celu określenia funkcji Φ potrzebna jest znajomość charakterystyki materiału ustalonej na podstawie doświadczeń. Dla materiałów wykazujących wzmocnienie przyjmuje się ją w postaci

$$
\bar{\sigma} = 2GK\Psi(\bar{\varepsilon})\,\bar{\varepsilon}\,.
\tag{1.8}
$$

Gdy naprężenia główne w procesie obciążenia wzrastają proporcjonalnie do siebie, to podobnie jak w ciele izotropowym [30] układ (1.1) staje się równoważny równaniom wiążącym skończone wielkości naprężeń i odkształceń:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= [a_1\sigma_1 - (a_{12}\sigma_2 + a_{31}\sigma_3)]\,\Phi,\\
\varepsilon_2 &= [a_2\sigma_2 - (a_{23}\sigma_3 + a_{12}\sigma_1)]\,\Phi,\\
\varepsilon_3 &= [a_3\sigma_3 - (a_{31}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2)]\,\Phi.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Jeśli w równaniach tych przyjmiemy $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 1/2$, to otrzymamy związki fizyczne dla ciała izotropowego znane jako równania NÁDAI'A-DAVISA [6 i 30].

Równania (1.9) wykorzystane zostały przez A. E. DAPPRICHA, J. MARINA i TU-LUNG WENGA [5] do rozwiązania problemu skończonych deformacji grubościennej ortotropowej powłoki kulistej. Jeśli chodzi natomiast o duże odkształcenia wiotkich powłok cienkościennych, to rozwiązanych zostało kilka przypadków opartych na czysto hipotetycznie przyjętych związkach fizycznych

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_3,\\
\varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1 + \frac{1}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_3,\\
\varepsilon_3 &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2 + \frac{1}{E_3}\sigma_3
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

zaproponowanych przez A. S. GRIGORIEWA [16] dla materiałów ortotropowych. We wzorach tych σ_j i ε_j są rzeczywistymi naprężeniami i odkształceniami, a E_j oraz ν_{jk} są to stałe materiałowe, przy czym

$$
E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}, \quad E_2\nu_{32} = E_3\nu_{23} \quad \text{i} \quad E_3\nu_{13} = E_1\nu_{31}; \tag{1.11}
$$

jeśli materiał jest nieściśliwy, to ponadto mamy

$$
1 - \nu_{12} - \nu_{13} = 0, \quad 1 - \nu_{21} - \nu_{23} = 0, \quad 1 - \nu_{31} - \nu_{32} = 0. \tag{1.12}
$$

W przypadku małych odkształceń związki (1.10) przechodzą w znane równania dla sprężystego ciała ortotropowego [2].

Na podstawie związków (1.10) I. I. FIEDIK, podobnie jak to poprzednio uczynił A. S. GRIGORIEW [14, 15 i 16] dla izotropowych materiałów niesprężystych, rozważył powłokę walcową [9] oraz dowolną powłokę osiowo-symetryczną [8] poddaną stałemu ciśnieniu wewnętrznemu, przyjmując następnie dodatkowe obciążenie w postaci sił inercji [10]. Również przy obciążeniu stałym ciśnieniem I. S. MAMIEDOW rozpatrywał skończone odkształcenia kołowej ortotropowej membrany [25 i 26] oraz powłoki o kształcie elipsoidy obrotowej [27].

Skończonymi odkształceniami wiotkiej powłoki stożkowej zajął się N. P. Striekozow [37]. Związki fizyczne opisujące ortotropię materiału przyjął on przy tym w postaci:

$$\sigma_1 = E_1\,\varepsilon_1 + E_1'\,\varepsilon_1^2 + \nu_{21}\,\sigma_2, \qquad \sigma_2 = E_2\,\varepsilon_2 + E_2'\,\varepsilon_2^2 + \nu_{12}\,\sigma_1, \tag{1.13}$$

gdzie $E_1, E_1', E_2, E_2', \nu_{12}$ i ν_{21} są to stałe materiałowe, a ε_1 i ε_2 odkształcenia główne w mierze Cauchy'ego. Wyprowadzony w pracy układ równań różniczkowych określających stan powłoki po odkształceniu rozwiązany został numerycznie w przypadku powłoki cylindrycznej, a rezultaty porównano z doświadczeniami, przy czym błąd w ocenie ugięć nie przekraczał 15%.

Przy małych odkształceniach i dużych przemieszczeniach rozmaite problemy wiotkich cienkościennych osiowo-symetrycznych powłok ortotropowych wykonanych z materiałów, których własności opisane są za pomocą związków typu (1.10), rozpatrują R. Trostel [35], C. R. Steel [36], S. A. Aleksiejew [1].

Natomiast niniejsza praca jest poświęcona wyprowadzeniu podstawowych układów równań, które przy przyjęciu związków fizycznych (1.1) lub (1.9) opisują stan równowagi wiotkich osiowo-symetrycznych powłok w procesie obciążania wywołującego skończone odkształcenia plastyczne. Zakłada się przy tym, że ze względu na osiową symetrię i charakter obciążenia (brak sił skręcających) oraz stałość kierunków ortotropii materiału (południkowy, równoleżnikowy i normalny do powłoki) spełnione są warunki, przy których mają zastosowanie związki (1.1) i (1.9) [24] i wobec tego mogą one zadawalająco opisać stan fizyczny rozważanych powłok. Ponadto przyjmujemy, że materiał powłoki jest nieściśliwy, a odkształcenia sprężyste pomija się w porównaniu z odkształceniami plastycznymi. Ponieważ powłoka jest wiotka i przenosi tylko rozciąganie, to mogą zajść [15, 33 i 34] dwa przypadki: a) oba naprężenia główne są dodatnie ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$); b) naprężenie pierścieniowe zeruje się i powstają fałdy ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$).

Przedstawiona praca stanowi więc uogólnienie problematyki zawartej w pracach [33 i 34] autora na przypadek ortotropii materiału.

2. Przypadek $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$

2.1. Teoria płynięcia plastycznego. Rozpatrujemy stan równowagi powłoki przedstawionej na rys. 1. Wprowadzamy w tym celu ustalony układ współrzędnych X, Y (typu Eulera), który związany jest z nieruchomymi punktami w przestrzeni i opisuje formę powłoki odkształconej, oraz drugi układ r, ζ (typu Lagrange'a), gdzie współrzędne są sztywno związane z określonymi cząstkami powłoki i podają ich położenie w stanie nieodkształconym. Dla uproszczenia w dalszych rozważaniach posługiwać się będziemy wielkościami bezwymiarowymi:

$$x = \frac{X}{R_1}, \qquad y = \frac{Y}{R_1}, \qquad h = \frac{H}{H_{10}},$$

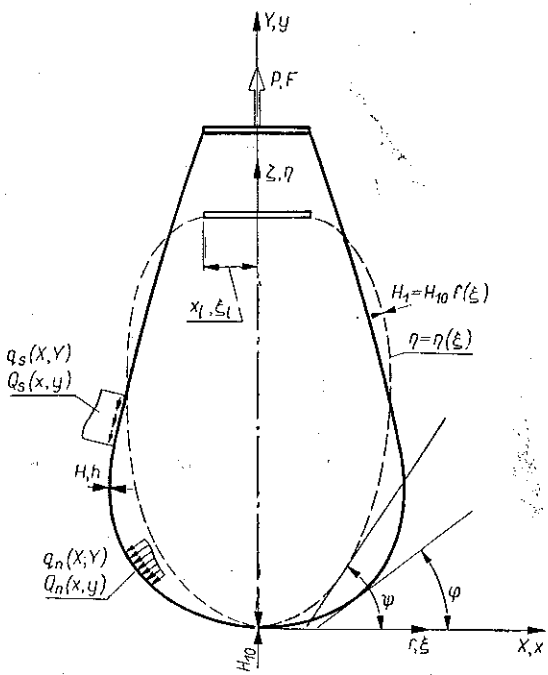
$$\xi = \frac{r}{R_1}, \qquad \eta = \frac{\zeta}{R_1}, \qquad f = f(\xi) = \frac{H_1}{H_{10}}, \qquad u = \frac{H}{H_1} = \frac{h}{f}, \tag{2.1}$$

(2.1) [c.d.]
$$Q_n = Q_n(x, y, t) = \frac{R_1}{KH_{10}} q_n(X, Y, t),$$

$$Q_s = Q_s(x, y, t) = \frac{R_1}{KH_{10}} q_s(X, Y, t),$$

$$p_1 = \frac{\sigma_1}{K}, \quad p_2 = \frac{\sigma_2}{K}, \quad \bar{p} = \frac{\bar{\sigma}}{K},$$

gdzie H_1 i H oznaczają grubość powłoki odpowiednio przed i po odkształceniu, $q_n(X, Y, t)$ i $q_s(X, Y, t)$ obciążenie przypadające na jednostkę powierzchni w kierunku normalnym i południkowym, stycznym do powłoki odkształconej, R_1 do-



Rys. 1

wolny rozmiar charakteryzujący powłokę przed odkształceniem, H_{10} grubość początkową powłoki w pewnym ustalonym punkcie, t bezwymiarową zmienną charakteryzującą wzrost obciążeń. Gdy dane są wymiary powłoki w stanie nieodkształconym, to f jest funkcją znaną.

Zakładamy, że w powłoce powstaje płaski stan naprężenia. Oznaczając przez 1, 2 i 3 odpowiednio kierunki południkowy, równoleżnikowy i normalny do powłoki, mamy zatem

$$\sigma_3 = 0. \tag{2.2}$$

Stąd zaś na podstawie równań (1.1), (1.3), (1.8) i (2.1) oraz przyjętego warunku nieściśliwości otrzymujemy następujące związki fizyczne:

$$\text{(2.3)} \qquad \frac{\alpha_{23}\, d\varepsilon_1 - \alpha_{12}\, d\varepsilon_3}{\alpha_{31}\, d\varepsilon_2 - \alpha_{12}\, d\varepsilon_3} = \frac{p_1}{p_2}, \qquad \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 0, \qquad \bar{p} = 2G\Psi(\bar{\varepsilon})\,\bar{\varepsilon},$$

gdzie (por. (1.3), (1.4))

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{aligned} \bar{p} &= \sqrt{\alpha_1 p_1^2 - 2\alpha_{12} p_1 p_2 + \alpha_2 p_2^2}, \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{G}\sqrt{\alpha_3\, \varepsilon_2^2 + 2\alpha_{23}\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3 + \alpha_2\, \varepsilon_3^2}\,. \end{aligned}$$

Zależność $(2.3)_3$ najczęściej aproksymować będziemy za pomocą krzywych dwuparametrowych, jak np. wzmocnienie potęgowe

$$\text{(2.5)} \qquad \bar{\sigma} = GK\bar{\varepsilon}^{\mu}, \qquad \Psi = \frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}^{\mu-1}$$

lub liniowe

$$\text{(2.6)} \qquad \bar{\sigma} = GK(1+A\bar{\varepsilon}), \qquad \Psi = \frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}^{-1}+A).$$

Zakładając $\mu = 0$ lub $A = 0$ otrzymujemy stąd przypadek ciała idealnie plastycznego.

W procesie obciążania zarówno naprężenia jak i odkształcenia będą funkcjami nie tylko położenia, ale i zmiennej t opisującej przebieg tego procesu w czasie. Jako zmienne niezależne przyjmiemy więc w przypadku współrzędnych Lagrange'a ξ, t, w przypadku zaś współrzędnych Eulera x, t. Przy różniczkowaniu pomiędzy tymi zmiennymi zachodzi związek [34]

$$\text{(2.7)} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}}\,\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Równania równowagi wyprowadzone dla elementu powłoki w stanie odkształconym przy ustalonej wartości t mają postać [34]

$$\text{(2.8)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(xhp_1) = hp_2 + \frac{xQ_s}{\cos\varphi}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(xhp_1 \sin\varphi) = x(Q_n + Q_s \operatorname{tg}\varphi)\,;$$

równania geometryczne

$$\text{(2.9)} \qquad \varepsilon_1 = \ln\left(\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}}\,\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\right), \qquad \varepsilon_2 = \ln\frac{x}{\xi}, \qquad \varepsilon_3 = \ln u\,,$$

a obliczone stąd przyrosty odkształceń (które jak wiadomo nie są różniczkami zupełnymi [20 i 34])

$$\text{(2.10)} \qquad d\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\, \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\operatorname{tg}\varphi\right)dt, \qquad d\varepsilon_2 = \frac{1}{x}\,\frac{\partial x}{\partial t}\,dt\,, \qquad d\varepsilon_3 = \frac{1}{u}\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\,.$$

Funkcje ψ i φ oznaczają tu (rys. 1) kąty zawarte pomiędzy osią x a styczną do powłoki odpowiednio w stanie nieodkształconym i odkształconym.

Po uwzględnieniu (2.10) równanie $(2.3)_1$ przyjmie postać

$$u(\alpha_{31}p_1+\alpha_{23}p_2)\frac{\partial x}{\partial t}+x(\alpha_2 p_2-\alpha_{12}p_1)\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{2.11}$$

Związki $(2.3)_2$, (2.8), (2.9) i (2.11) łącznie z równaniem (por. [34], rys. 1)

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\operatorname{tg}\varphi \tag{2.12}$$

można, podobnie jak w przypadku powłoki izotropowej, sprowadzić do układu pięciu quasi-liniowych cząstkowych równań różniczkowych typu parabolicznego (charakterystyki $\xi=\text{const}$, $t=\text{const}$), które dla zmiennych niezależnych ξ, t mają postać:

$$\begin{gathered}\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\xi}{ux}\frac{\cos\varphi}{\cos\psi},\qquad \frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{\xi}{ux}\frac{\sin\varphi}{\cos\psi},\\ \frac{\partial p_1}{\partial \xi}+\frac{p_1}{u}\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\xi}{ux^2}\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\left(p_2-p_1+\frac{xQ_s}{fu\cos\varphi}\right)-\frac{p_1}{f}\frac{df}{d\xi},\\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}=\frac{\xi}{p_1 ux\cos\psi}\left(\frac{Q_n}{fu}-\frac{p_2}{x}\sin\varphi\right),\\ u(\alpha_{31}p_1+\alpha_{23}p_2)\frac{\partial x}{\partial t}+x(\alpha_2 p_2-\alpha_{12}p_1)\frac{\partial u}{\partial t}=0.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Niewiadomymi są tu funkcje $x(\xi, t)$, $y(\xi, t)$, $\varphi(\xi, t)$, $u(\xi, t)$ i $p_2(\xi, t)$. Szóste równanie, to algebraiczny związek $(2.3)_3$. W szczególnym przypadku gdy $Q_s=0$, $Q_n=Q=\text{const}$ czwarte z równań (2.13) można scałkować efektywnie i wówczas [34] mamy

$$\sin\varphi=\frac{xQ}{2fp_1u}+\frac{F}{2fp_1ux}, \tag{2.14}$$

przy czym

$$F=F(t)=\frac{P}{\pi H_{10}KR_1} \tag{2.15}$$

jest bezwymiarowym odpowiednikiem wypadkowej $P=P(t)$ sił zewnętrznych działających bezpośrednio na dno lub krawędź powłoki.

2.2. Teoria odkształceniowa. Jeśli zamiast związków fizycznych (1.1) przyjmiemy (1.9), to dla płaskiego stanu naprężenia otrzymamy na podstawie (1.8), (2.1), (2.2), $(2.3)_2$ i $(2.3)_3$ następujące równania napisane w wielkościach bezwymiarowych:

$$p_1=-2\Psi(\alpha_{23}\varepsilon_2+\alpha_2\varepsilon_3),\qquad p_2=2\Psi(\alpha_{31}\varepsilon_2-\alpha_{12}\varepsilon_3). \tag{2.16}$$

Równania równowagi powłoki oraz równania geometryczne pozostają bez zmian z tym jednak, że różniczki cząstkowe $\partial/\partial x$ i $\partial/\partial\xi$ zastępujemy przez różniczki zwyczajne d/dx i $d/d\xi$. Związki (2.8), (2.9), (2.12) i (2.16) możemy sprowadzić do układu równań zwyczajnych [33]

$$\frac{dx}{d\xi}=\frac{\xi}{ux}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\psi},\qquad \frac{dy}{d\xi}=\frac{\xi}{ux}\,\frac{\sin\varphi}{\cos\psi},$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi}=\frac{\frac{1}{x}\,\frac{dx}{d\xi}}{B\cos\varphi}\left(E\sin\varphi-\frac{xQ_n}{fu\Psi}\right),\tag{2.17}$$

$$\frac{du}{d\xi}=u\,\frac{\frac{1}{\xi}(2\alpha_{23}+BDT)-\frac{1}{x}\,\frac{dx}{d\xi}\left[2\alpha_{23}+D(1+BT)+\frac{xQ_s}{fu\Psi\cos\varphi}\right]-\frac{B}{f}\,\frac{df}{d\xi}}{B(1+BT)+2\alpha_2}$$

z niewiadomymi funkcjami $x(\xi)$, $y(\xi)$, $\varphi(\xi)$ i $u(\xi)$. Układ ten posiada analogiczną strukturę jak dla powłoki izotropowej, przy czym

$$B=2(\alpha_{23}\,\varepsilon_2+\alpha_2\,\varepsilon_3)=2\left(\alpha_{23}\ln\frac{x}{\xi}+\alpha_2\ln u\right),$$

$$D=2(\alpha_3\,\varepsilon_2+\alpha_{23}\,\varepsilon_3)=2\left(\alpha_3\ln\frac{x}{\xi}+\alpha_{23}\ln u\right),$$

$$E=2(\alpha_{31}\,\varepsilon_2-\alpha_{12}\,\varepsilon_3)=2\left(\alpha_{31}\ln\frac{x}{\xi}-\alpha_{12}\ln u\right),\tag{2.18}$$

$$T=\frac{1}{2G\bar{\varepsilon}\Psi}\,\frac{d\Psi}{d\bar{\varepsilon}}.$$

W szczególnym przypadku dla wzmocnienia potęgowego (2.5) i liniowego (2.6) mamy odpowiednio

$$T=\frac{\mu-1}{2G\bar{\varepsilon}^2},\qquad T=-\frac{1}{2G\bar{\varepsilon}^2(1+A\bar{\varepsilon})}.\tag{2.19}$$

Jeśli w powłoce $Q_s=0$ i $Q_n=Q=\text{const}$, to trzecie z równań (2.17) można scałkować efektywnie otrzymując związek (2.14), przy czym $F=\text{const}$ [por. (2.15)].

3. Strefa fałdów

W tym przypadku $\sigma_1>0$ oraz $\sigma_2=0$. Ze względu na (2.2) naprężenia główne pozostają w stałej proporcji:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{\sigma_3}{\sigma_1}=0,\tag{3.1}$$

wobec czego równania fizyczne (1.1) i (1.9) są wtedy sobie równoważne [30]. Dla naszej powłoki równania te otrzymamy przyjmując w związkach (2.18)

$$p_2=0,\tag{3.2}$$

skąd dostajemy naprzód związek

$$\varepsilon_2 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{31}} \varepsilon_3 \tag{3.3}$$

pomiędzy odkształceniami; następnie [por. (1.2), (1.6)]

$$p_1 = -\frac{2G}{\alpha_{31}} \Psi(\bar{\varepsilon}) \varepsilon_3 , \tag{3.4}$$

gdzie [por. (1.2), (1.6), (2.4) i (3.3)]

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_{31}} \varepsilon_3 . \tag{3.5}$$

W szczególności przy potęgowym (2.5) i liniowym (2.6) wzmocnieniu mamy odpowiednio

$$\Psi = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_{31}} \varepsilon_3\right)^{\mu-1}, \qquad \Psi = \frac{1}{2}\left(A - \frac{\alpha_{31}}{\sqrt{\alpha_1}} \varepsilon_3^{-1}\right). \tag{3.6}$$

Związki geometryczne wyrażają się teraz wzorami ($\varepsilon_2 \neq x/\xi$, por. (3.3), [33])

$$\varepsilon_1 = \ln\left(\frac{dx}{d\xi} \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\right), \qquad \varepsilon_2 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{31}} \ln u , \qquad \varepsilon_3 = \ln u . \tag{3.7}$$

Równania równowagi mają identyczną postać z ich postacią w pracy [33]:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(hp_1 u\xi \sin\varphi) = x(Q_n + Q_s \operatorname{tg}\varphi) , \\ &\frac{d}{dx}(hp_1 u\xi) = \frac{xQ_s}{\cos\varphi} . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ze związków fizycznych i geometrycznych oraz równań równowagi otrzymujemy ostatecznie układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{d\xi} = \frac{\cos\varphi}{u^2 \cos\psi}, \qquad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\sin\varphi}{u^2\cos\psi}, \\ &\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{xQ_n}{fp_1 u^4 \xi \cos\psi}, \qquad \frac{du}{d\xi} = J(u)\left(\frac{xQ_s}{fp_1 u^4 \xi\cos\psi} - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{f}\frac{df}{d\xi}\right), \end{aligned} \tag{3.9}$$

którego forma jest taka sama jak dla powłoki izotropowej, przy czym p_1 wyraża się wzorem (3.4), a przez $J(u)$ oznaczono funkcję

$$J(u) = u\left(2 + \frac{1}{\ln u} + \frac{u}{\Psi}\frac{d\Psi}{du}\right)^{-1} . \tag{3.10}$$

Dla potęgowego i liniowego wzmocnienia materiału [por. (3.6)] funkcja ta ma odpowiednio postać

$$J(u) = \frac{u \ln u}{\mu + 2 \ln u}, \quad J(u) = \frac{u\left(A \frac{\sqrt{a_1}}{a_{31}} \ln u - 1\right)}{A \frac{\sqrt{a_1}}{a_{31}} (2 \ln u + 1) - 2}. \tag{3.11}$$

W szczególnym przypadku, gdy $Q_s = 0$, czwarte z równań (3.9) daje się scałkować efektywnie [por. (3.8)] i otrzymujemy wtedy związek algebraiczny

$$f p_1 u^2 \xi = C^* \tag{3.12}$$

pomiędzy u i ξ [por. (3.4) i (3.7)], przy czym C^* jest stałą wyznaczaną z warunku ciągłości na granicy stref. Jeśli dodatkowo $Q_n = Q = \text{const}$, to z trzeciego równania (3.9) mamy [por. (3.8)]

$$\sin \varphi = \frac{Qx^2 + F}{2C^*}, \tag{3.13}$$

gdzie $F = \text{const}$ jest bezwymiarową siłą wyrażoną wzorem (2.15). Wtedy z dwóch pierwszych równań (3.9) znajdujemy [4]

$$\varphi = \varphi(\xi) = \arc\sin\left[1 - \left(1 - \frac{F}{2C^*}\right) \operatorname{sn}^2 w\right] \tag{3.14}$$

oraz

$$y = y^* + \sqrt{\frac{C^*}{Q}} [F(\beta, k) - F(\beta^*, k) - 2E(\beta, k) + 2E(\beta^*, k)], \tag{3.15}$$

gdzie

$$\beta = \arc\sin \sqrt{\frac{2C^*}{2C^* - F}(1 - \sin\varphi)}, \quad k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2C^* - F}{C^*}}, \tag{3.16}$$

$$w = F(\beta^*, k) - m(\xi)\sqrt{\frac{Q}{C^*}},$$

przy czym

$$2C^* > |F| > 0, \quad \arc\sin\frac{F}{2C^*} < \varphi < \frac{\pi}{2}. \tag{3.17}$$

Przez

$$m(\xi) = \int_{\xi^*}^{\xi} \frac{d\xi}{u^2(\xi) \cos\psi(\xi)} \tag{3.18}$$

oznaczono funkcję, której postać zależy od danej formy i grubości powłoki w stanie nieodkształconym [$\psi(\xi)$ i $f(\xi)$] oraz przyjętej charakterystyki materiału $\Psi(\bar{\varepsilon})$ [por. (3.4)].

W powyższych wzorach $F(\beta, k)$, $E(\beta, k)$, ... oznaczają niepełne całki eliptyczne pierwszego i drugiego rodzaju, a $\operatorname{sn} w$ funkcję eliptyczną Jacobiego. Wielkości oznaczone gwiazdką odnoszą się do granicy stref.

4 Przykłady

Dla pewnej ilustracji poruszonych problemów rozważymy dwa proste przypadki mające elementarne rozwiązanie. I tak weźmy pod uwagę nieskończenie długą cylindryczną powłokę o jednakowej grubości obciążoną stałym ciśnieniem wewnętrznym. Bezwymiarowe naprężenia p_1 i p_2 obliczone z równań równowagi mają wtedy postać [16 i 31]

$$p_1 = \frac{Qx}{2h}, \qquad p_2 = \frac{Qx}{h}. \tag{4.1}$$

Stąd zaś na podstawie zależności $(2.3)_2$ i (2.16) otrzymujemy

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_{31} - \alpha_{12}}{\alpha_2 + \alpha_{23}} \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_3 = -\frac{\alpha_3 + \alpha_{23}}{\alpha_2 + \alpha_{23}} \varepsilon_2 = \ln h, \qquad \varepsilon_2 = \ln x, \tag{4.2}$$
$$h = x^{-\frac{\alpha_3 + \alpha_{23}}{\alpha_2 + \alpha_{23}}}.$$

Związek fizyczny pomiędzy $\bar{p}$ i $\bar{\varepsilon}$ przyjmujemy w postaci

$$\bar{p} = \bar{\varepsilon}^{\mu}, \tag{4.3}$$

przy czym jak wynika z (2.4), (4.1) i (4.2)

$$\bar{p} = p_1 \sqrt{\alpha_1 + 4\alpha_{23}}, \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\alpha_1 + 4\alpha_{23}}}{\alpha_2 + \alpha_{23}} \varepsilon_2. \tag{4.4}$$

Ostatecznie więc mamy stąd

$$Q = \frac{2}{\sqrt{\alpha_1 + 4\alpha_{23}}} \left(\frac{\sqrt{\alpha_1 + 4\alpha_{23}}}{\alpha_2 + \alpha_{23}} \ln x \right)^{\mu} x^{-\frac{\alpha_1 + 4\alpha_{23}}{\alpha_2 + \alpha_{23}}}. \tag{4.5}$$

W szczególnym przypadku gdy

$$\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_2 = 0 \tag{4.6}$$

materiał powłoki [por. (1.1) — (1.5)] nie pozwala na powstanie odkształceń w kierunku równoleżnikowym ($\varepsilon_2 = 0$, $x = 1$). Intensywność odkształceń $\bar{\varepsilon}$ staje się wtedy symbolem nieoznaczonym [por. (2.4)]. Jeśli obliczymy granicę tego wyrażenia, gdy α_{12} i α_{23} zmierzają proporcjonalnie do zera, to otrzymujemy

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\alpha_{13}}} \tag{4.7}$$

i wtedy

$$Q = 2h(-\ln h)^{\mu} \alpha_{31}^{-\frac{\mu+1}{2}}. \tag{4.8}$$

Gdy ze względu na materiał powłoka nie może doznawać odkształceń w kierunku osiowym ($\varepsilon_1 = 0$), to

$$\alpha_{12} = \alpha_{31} = \alpha_1 = 0. \tag{4.9}$$

Po przejściu do granicy z α_{12} i α_{31} tak samo jak poprzednio obliczamy

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_{23}}}, \tag{4.10}$$

a następnie

$$Q = x^{-2} (\ln x)^{\mu} \alpha_{23}^{-\frac{\mu+1}{2}}. \tag{4.11}$$

Przy obciążeniu tej samej powłoki osiową siłą rozciągającą $P = \text{const}$ bezwymiarowe naprężenia wynoszą [por. (2.15)]

$$p_1 = \frac{F}{2hx}, \quad p_2 = 0. \tag{4.12}$$

Stąd zaś na podstawie $(2.3)_2$ i (2.16) otrzymujemy zależność pomiędzy odkształceniami

$$\varepsilon_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{12}} \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{12}} \varepsilon_2, \tag{4.13}$$

skąd $h = x^{\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{12}}}$.

Przyjmując prawo fizyczne w postaci (4.3), mamy zatem

$$F = \frac{2}{\sqrt{\alpha_1}} x^{\frac{\alpha_1}{\alpha_{12}}} \left(\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_{12}} \ln x \right)^{\mu}. \tag{4.14}$$

Przy braku odkształcalności materiału powłoki w kierunku równoleżnikowym otrzymujemy

$$F = 2h (-\ln h)^{\mu} \alpha_{13}^{-\frac{\mu+1}{2}},$$

a jeśli tworzywo powłoki nie pozwala na odkształcenie w kierunku osiowym, to siła F może być dowolnie wielka (w granicach wytrzymałości materiału).

5. Uwagi końcowe

Przy wyprowadzaniu równań (2.13) i (2.17) [lub (3.9)] jako zmienne niezależne przyjęliśmy odpowiednio ξ, t oraz ξ. Często wygodniej jest, gdy zamiast tego przyjmiemy zmienne η, t oraz η (np. powłoka walcowa). Wtedy wspomniane wyżej równania będą miały postać taką samą jak poprzednio z tym jednak, że pochodne $\partial/\partial\xi$ i $d/d\xi$ należy odpowiednio zastąpić przez $\partial/\partial\eta$ i $d/d\eta$, a $\cos\psi$ przez $\sin\psi$. Dla powłoki walcowej ponadto $\xi = \sin\psi = 1$; w równaniu $(2.17)_4$ trzeba pominąć $\frac{1}{\xi}(2\alpha_{23}+BDT)$, a w równaniu $(3.9)_4$ człon $-\frac{1}{\xi}$.

Warunki brzegowe i początkowe dla równań (2.13) oraz warunki brzegowe dla równań (2.17) są analogiczne jak odpowiednie warunki omówione w pracach [34] i [33] dla powłok izotropowych. Jedyne różnice dotyczą wzajemnych związków pomiędzy p_1 i p_2. I tak w przypadku wierzchołka kopuły z warunków $d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2$ oraz $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ otrzymujemy jednakowo

$$p_1 = \frac{a_2 + a_{12}}{a_1 + a_{12}} p_2. \tag{5.1}$$

Natomiast dla danego trwałego odkształcenia konturu $\varepsilon_2 = k$ z teorii płynięcia plastycznego ($d\varepsilon_2 = 0$) mamy

$$p_1 = \frac{a_2}{a_{12}} p_2, \tag{5.2}$$

a z teorii odkształceniowej

$$p_1 = \frac{a_2 \varepsilon_3 + a_{23} k}{a_{12} \varepsilon_3 - a_{31} k} p_2. \tag{5.3}$$

Wyniki te są zgodne tylko w przypadku nieodkształcalnego konturu, czyli gdy $k = 0$.

Literatura cytowana w tekście

1. С. А. Алексеев, *Основы теории мягких осесимметрических оболочек*, Сб. Расчет пространств, констр., Стройиздат, 10, 1965.

2. С. А. Амбарцумьян, *Теория анизотропных оболочек*, Физматгиз., Москва 1961.

3. I. F. Besseling, *A Theory of Plastic Flow for Anisotropic Hardening in Plastic Deformation of an Initially Isotropic Material*, National Luchtaartlaboratorium, Amsterdam 1953.

4. P. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

5. A. E. Dapprich, J. Marin, Tu-Lung Weng, *Strength of thick-walled pressure vessels for materials with directional properties*, Trans. ASME, ser. B, 2, 84 (1962), 197–204.

6. E. A. Davis, *Yelding and fracture of medium carbon steel under Combined stress*, J. Appl. Mech., 1, 1945.

7. J. E. Dorn, *Stress-strain relations for anisotropic plastic flow*, J. Appl. Phys., 20 (1949), 15–20.

8. И. И. Федик, *Безмоментные ортотропные оболочки вращения при больших деформациях*, Труды II «Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек», Киев 1962.

9. И. И. Федик, *Некоторые задачи равновесия ортотропных цилиндрических оболочек при больших деформациях*, *Теория оболочек и пластин*, Труды IV «Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин», Изд. АН Арм. ССР, Ереваль 1964.

10. И. И. Федик, *Большие деформации безмоментных ортотропных оболочек вращения, находящихся под действием инерционных нагрузок*, Труды VI «Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок», Баку 1966, Изд. Наука, Москва 1966.

11. J. C. Fisher, *Anisotropic plastic flow*, Trans. ASME, 71 (1949), 349–356.

12. В. О. Геогджаев, *К вопросу о критерии прочности для анизотропных материалов*, Труды МФТИ, 5, 1960, 23–29.

13. И. И. Гольденблат, В. А. Корнов, *Обобщенная теория пластического течения анизотропных сред*, Строительная механика, Стройиздат, Москва 1966.

14. А. С. Григорьев, *Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех., 6, **21** (1957).

15. А. С. Григорьев, *Равновесие безмоментной оболочки вращения при больших деформациях*. Прикл. Мат. Мех., 6, **25** (1961).

16. A. S. Grigoriev, *The Stress State and the Carrying Capacity of Flexible Plates and Shells at Large Deformations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, PWN Warszawa 1964, repr. Non-Classical Shell Problems, Proc. IASS Symp., Warsaw, Sept. 1963.

[17] А. В. Губенко и другие, *Пневматические строительные конструкции*, Гос. Изд. Лит. по Строит. Арх. и Строит. Мат., Москва 1963.

18. T. H. Hazlett, A. T. Robinson, J. E. Dorn, *An evaluation of a theory for plastic flow in anisotropic sheet metals*, Trans. ASME, **42** (1950), 1326–1356.

19. R. Hill, *A. Theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*, Proc. Roy. Soc., London, ser. A, **193** (1948), 281–297.

20. R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford 1950.

21. O. Hoffman, G. Sachs, *Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers*, McGraw-Hill Book Co., 1953.

22. L. W. Hu, *Studies on plastic flow of anisotropic metals*, Trans. ASME, 3, **23** (1956), 444–450.

23. L. W. Hu, *Modified Tresca's Yield Condition and Associated Flow Rules for Anisotropic Materials and Applications*, J. Franklin Inst., 3, 1958, 187.

24. L. R. Jackson, K. F. Smith, W. T. Lankford, *Plastic flow in anisotropic sheet steel*, Metals Technology, 5, **15** (1948), TP–2440.

25. И. С. Мамедов, *Большие прогибы ортотропной мембраны*, Инж. Журн., 1, 3 (1963).

26. И. С. Мамедов, *Напряженное состояние кольцеобразной мембраны при больших деформациях*, Инж. Журнал, 5, **5** (1965), 927—935.

27. И. С. Мамедов, *Напряженное состояние элипсоидальной оболочки вращения при больших деформациях*, Труды VI «Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок», Баку 1966, Изд. Наука, Москва 1966.

28. М. С. Микеладзе, *Статика анизотропных пластичных оболочек*, Изд. АН Груз. ССР, Тбилиси.

29. R. Mises, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Zeitschr. angew. Math. und Mech., 3, **8** (1928).

30. A. Nádai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, New York-Toronto-London 1950.

31. J. Orkisz, *Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych*, Mech. Teoret. i Stos., 1, 3 (1965).

32. Я. Оркиш, *Равновесие безмоментных оболочек вращения из каучукоподобных материалов*, Изв. АН СССР, ОТН, 4, 1965, Streszcz. ang.: Bull. Akad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 4, **14** (1966).

33. J. Orkisz, *Skończone odkształcenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy pewnych typach fizycznej nieliniowości*, Rozpr. Inżyn., 4, **13** (1965). Streszcz. ang.: Bull. Acad. Polon. Sci., Série. Sci. Techn., 1, **15** (1967).

34. J. Orkisz, *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym w świetle teorii płynięcia plastycznego*, Mech. Teoret. i Stos., 4, **5** (1967).

35. F. Otto, R. Trostel, *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Ullstein Fachverlag Frankfurt-Berlin 1962.

36. C. R. Steel *Orthotropic pressure vessels with axial constraint*. J. AIAA, 4, 1964, 703–709.

37. Н. П. Стрекозов, *Некоторые вопросы прочности конических и цилиндрических оболочек из мягких материалов*, Труды VI «Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок», Баку 1966, Изд. Наука, Москва 1966.

38. A. Tarczewski *Konstrukcje pneumatyczne* Bibl. Inż. i Bud., Warszawa 1965.

39. А. М. Жуков, *Механические свойства сплава* МА2 *при двухосном растяжении*, Изв. АН СССР, ОТН, 9, 1957.

40. А. М. Жуков, *Свойства сплава* D16T *при растяженни с кручением*, Инж. Сб., **29** (1960).

Резюме

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ НЕУПРУГИХ, ГИБКИХ, ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В работе выводятся уравнения [для теории пластической текучести — система (2.13), для теории деформации — система (2.17)], которые в процессе нагрузки, описывают поведение гибкой, ортотропной оболочки вращения в безмоментном состоянии, при конечных неупругих деформациях. В качестве физических уравнений принято [22 и 24] зависимости (1.1) или (1.9) справедливые в случаях, когда направления ортотропии в материале совпадают с главными направлениями и не подвергаются изменению в процессе нагрузки. Они связывают истинные напряжения с логарифмическими деформациями и являются обобщением уравнений Надая-Девиса [30] для случая ортотропного материала.

Ввиду того, что оболочка воспринимает только растягивающие напряжения, рассматриваются два случая: а — когда оба главные напряжения — положительных ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$) и б — когда кольцевое напряжение равно нулю ($\sigma_2 > 0$, $\sigma_2 = 0$). В заключении дается элементарный пример ортотропной цилиндрической бесконечно длинной оболочки, подверженной постоянному внутреннему давлению или растяжению осевой силой.

Статья является расширением работ автора [33 и 34] на случай ортотропного материала.

Summary

FINITE ANELASTIC DEFORMATION OF FLEXIBLE CYRCULARLY SYMMETRIC ORTHOTROPIC SHELLS UNDER A MEMBRANE STATE

The object of the present paper is to derive the Eqs. (2.13) in the case of the theory of plastic flow and (2.17) in the case of the strain theory describing in the course of the loading process the behaviour of a flexible, cyrcularly symmetric orthotropic shell in a membrane state under finite anelastic deformation. The physical relations are assumed in the form (1.1) or (1.9) which are valid if the directions of orthotropy coincide with the principal directions and remain invariable in the course of the loading process. They relate the true stresses with the logarithmic strains and constitute a generalization of the Nádai-Davis equations [30], into the case of an orthotropic material. Tensile stress being the only one transmitted by the shell stresses, two cases are considered in which a) both principal stresses are positive ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$), b) the circumferential stress is zero ($\sigma_2 > 0$, $\sigma_2 = 0$). Finally, an elementary example is given for an infinite orthotropic cylindrical shell subject to a constant internal pressure and a tensile axial force.

The present paper constitutes a generalization of Refs. [33 and 34] of the present author, to the case of an orthotropic material.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 marca 1967 r.