ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 13 (1965)

BEZPIECZEŃSTWO LINY JAKO ZŁOŻONEGO ELEMENTU KONSTRUKCYJNEGO

WACŁAW PIEKARSKI (WARSZAWA)

Wstęp

W konstrukcjach budowlanych występują elementy konstrukcyjne rozciągane, złożone z n składników. Takimi konstrukcjami są: lina, kabel, wiązka kabli, wiązka strun, wiązka prętów zbrojeniowych w konstrukcjach żelbetowych itp.

Rozpatrzono tu linę jako pręt złożony z n drutów, który najlepiej reprezentuje tę grupę konstrukcji i jednocześnie jest najdogodniejszy dla naszych rozważań.

Podstawowym warunkiem wytrzymałościowym jest

$$\sigma < R, \tag{1}$$

gdzie σ oznacza naprężenie obliczeniowe, a R wytrzymałość materiału.

Przy założeniu, że druty w linie pracują tak samo jak pojedynczo, naprężenie σ obliczamy ze wzoru

$$\sigma = \frac{P}{nF}, \tag{2}$$

gdzie P jest siłą rozciągającą, F polem przekroju poprzecznego drutu oraz n liczbą drutów w linie. Nieistotną jest tu rzeczą, czy pręt jest pojedynczy, czy też złożony z większej liczby drutów. Tymczasem w świetle rachunku prawdopodobieństwa ilość n składników w pręcie złożonym ma wpływ istotny na bezpieczeństwo konstrukcji.

1. Wytrzymałości poszczególnych drutów liny jako niezależne zmienne losowe

Dana jest lina złożona z n drutów. Wytrzymałość na rozerwanie R_i każdego z nich jest zmienną losową, zanim on nie ulegnie zniszczeniu, gdyż wytrzymałość R_i może przyjąć dowolną wartość zgodnie z prawem rozkładu prawdopodobieństwa, właściwym rodzajowi stali użytej na druty. Z chwilą rozerwania się drutu wytrzymałość jego R_i osiąga określoną wartość liczbową i jednocześnie tym samym przestaje być zmienną losową.

Informacje o rozkładzie prawdopodobieństwa otrzymujemy z badań laboratoryjnych drutów, pobranych z tego samego wytopu, z którego pochodzą druty zastosowane do liny [5].

Próba statystyczna jako wynik tych doświadczeń jest podstawą do określenia prawa rozkładu prawdopodobieństwa. Prawo to może być wyrażone za pomocą szeregu rozdzielczego, histogramu, krzywej prawdopodobieństwa. Funkcja prawdopodobieństwa może być wyrażona przez parametry czyli charakterystyki statystyczne takie, jak średnia wytrzymałość $\bar{R}$, odchylenie średnie μ. Wielkości $\bar{R}$ i μ są konieczne i wystarczające do określenia normalnego rozkładu prawdopodobieństwa. Tak wyznaczone prawo rozkładu odnosi się do generalnej zbiorowości, czyli do wszystkich drutów wykonanych z tego wytopu, co druty pobrane do próby.

Wytrzymałości poszczególnych drutów R_i jako zmienne losowe są niezależne, gdyż wytrzymałość każdego z nich jest niezależna od pozostałych. W linie złożonej z n drutów mamy więc do czynienia z n niezależnymi zmiennymi losowymi.

Normalny rozkład prawdopodobieństwa wyraża się funkcją

$$f(R_i) = \frac{1}{\mu_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{R}_i - R_i)^2}{2\mu_i^2}}, \tag{3}$$

gdzie $\bar{R}_i$ oznacza średnią wytrzymałość oraz μ_i odchylenie średnie wytrzymałości i-tego drutu wchodzącego w skład liny.

Ogólnie biorąc wytrzymałość poszczególnych drutów liny R_i jako zmienne losowe mogą wykazywać różne wartości średnich wytrzymałości $\bar{R}_i$

$$\bar{R}_1, \bar{R}_2, ..., \bar{R}_i, ..., \bar{R}_n$$

oraz różne odchylenia średnie μ_i:

$$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_i, ..., \mu_n.$$

Może to mieć miejsce wówczas, gdy druty pochodzą z różnych wytopów i są o niejednakowym składzie chemicznym.

Zgodnie z rachunkiem prawdopodobieństwa wytrzymałość liny R_l jest również zmienną losową o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa, ponieważ jest sumą n niezależnych zmiennych losowych R_i o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Normalny rozkład prawdopodobieństwa wytrzymałości R_l przyjmuje wartość

$$f(R_l) = \frac{1}{\mu_l \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{R}_l - R_l)^2}{2\mu_l^2}}, \tag{4}$$

gdzie $\bar{R}_l$ jest średnią wytrzymałością, a μ_l odchyleniem średnim wytrzymałości liny R_l.

Średnią wytrzymałość $\bar{R}_l$ i odchylenie średnie μ_l wytrzymałości liny

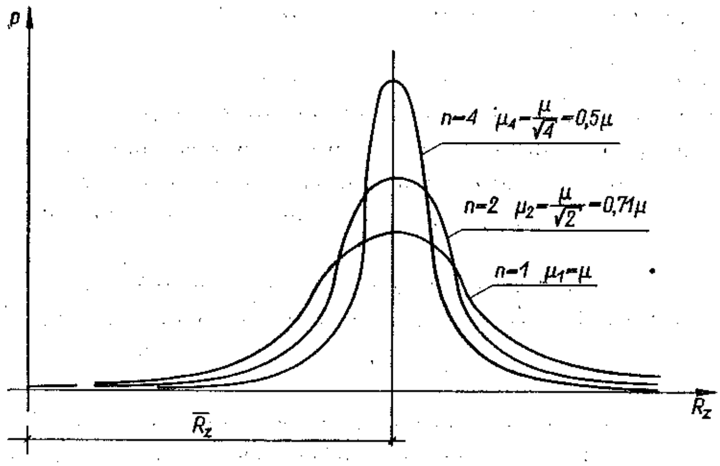
$$R_l = \frac{1}{n}(R_1 + R_2 + ... + R_i + ... + R_n),$$

która jest średnią arytmetyczną wytrzymałości poszczególnych drutów R_i, można odpowiednio wyrazić za pomocą średnich wytrzymałości poszczególnych drutów $\bar{R}_i$ oraz odchyleń średnich μ_i. Mianowicie zgodnie z twierdzeniem o średniej wartości sumy n niezależnych zmiennych losowych średnia wytrzymałość liny $\overline{R}_l$ jest równa średniej arytmetycznej średnich wytrzymałości $\overline{R}_i$

(5) $$\overline{R}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i$$

oraz zgodnie z twierdzeniem o odchyleniu średnim sumy n niezależnych zmiennych losowych odchylenie średnie wytrzymałości liny μ_l równa się $1/n$ pierwiastka kwadratowego z sumy wariancyj tych zmiennych:

(6) $$\mu_l = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2}.$$



Rys. 1

Ogólnie odchylenia średnie μ_i wytrzymałości drutów mogą być różne. Zwykle nie wiele odbiegają od siebie. Wśród nich istnieje zawsze największa μ_0:

$$\mu_i < \mu_0 .$$

Zrobimy błąd na korzyść bezpieczeństwa konstrukcji, jeżeli na miejsce μ_i we wzorze (6) podstawimy wartość μ_0. Wówczas otrzymamy wyrażenie na μ_l

(6') $$\mu_l = \frac{\mu_0}{\sqrt{n}}.$$

W przypadku szczególnym, gdy średnie wytrzymałości poszczególnych drutów $\overline{R}_i$ i odchylenia średnie są sobie odpowiednio równe: $\overline{R}_1 = \overline{R}_2 = ... \overline{R}_i = ... = \overline{R}_n = \overline{R}$ oraz $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_i = ... = \mu_n = \mu$, wzory (5) i (6) odpowiednio przyjmują postać:

(5') $$\overline{R}_l = \overline{R},$$

(6'') $$\mu_l = \frac{\mu}{\sqrt{n}}.$$

Wartości średniej wytrzymałości $\bar{R}_l$ wzięte ze wzoru (5) lub (5') oraz wartości odchylenia średniego ze wzorów (6), (6') lub (6'') są podstawą do oceny bezpieczeństwa liny.

Z powyższego wynika, że wytrzymałość liny jest zmienną losową o średniej wytrzymałości $\bar{R}_l$ wyrażonej za pomocą średniej arytmetycznej średnich wytrzymałości $\bar{R}_i$ drutów składowych oraz o odchyleniu średnim μ_l mniejszym $\sqrt{n}$ razy od odchylenia średniego μ_i. Wpływ ilości n drutów w linie na rozrzut wytrzymałości R_l przedstawiono na rys. 1.

2. Wskaźnik bezpieczeństwa liny

Miarą bezpieczeństwa liny może być wskaźnik bezpieczeństwa p lub współczynnik bezpieczeństwa s.

Wskaźnik bezpieczeństwa p jest liczbą o wartości $0 \leqslant p \leqslant 1$, która wyraża prawdopodobieństwo faktu, że lina nie ulegnie rozerwaniu.

Właściwy dobór wskaźnika bezpieczeństwa p i współczynnika bezpieczeństwa s powinien być wynikiem analizy ekonomicznej i wytrzymałościowej, jak również powinien uwzględniać rangę, jaką reprezentuje rozważana lina w całokształcie budowli [4].

Dla tak obranego stopnia bezpieczeństwa p liny zgodnie z metodą półprobabilistyczną W. Wierzbickiego [1, 2, 3] musi być spełniony następujący warunek:

$$\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 = p, \tag{7}$$

gdzie Ω_1 oznacza prawdopodobieństwo, że przyrost naprężeń obliczeniowych σ, wynikły z niespełnienia się założeń, na których oparte zostały wzory użyte do obliczeń, nie przekroczy pewnej wartości α_i;

Ω_2 prawdopodobieństwo faktu, że przyrost naprężeń obliczeniowych, wynikły z niespełnienia się założonych warunków pracy, właściwości materiałowych (wymiary), nie przekroczy pewnej wartości α_i;

Ω_3 prawdopodobieństwo faktu, że wytrzymałość materiału R jest większa od wytrzymałości granicznej R_g.

Przez wprowadzenie pewnych wartości liczbowych, określających wielkość przyrostu naprężeń obliczeniowych σ wskutek niespełnienia się założeń, czynniki powodujące ten przyrost przestają być zmiennymi losowymi; prawdopodobieństwa $\Omega_1 = \Omega_2 = 1$ i odpowiednio wzór (7) zgodnie z tym przyjmuje postać

$$\Omega_3 = p. \tag{7'}$$

Ze wzoru (7') znajdujemy wytrzymałość graniczną R_g. Dla wytrzymałości liny R_l przyjęty rozkład normalny $f(R_l)$ wyrażony wzorem (4) przedstawiono na rys. 2.

Pole zakreślone Ω_3 na rys. 2 oznacza, że z prawdopodobieństwem Ω_3 wytrzymałość R_l liny jest większe od R_g, co wyrażamy wzorem

$$\Omega_3 = \int_{R_{lg}}^{\infty} f(R_l)\, dR_l. \tag{8}$$

Dla rozkładu normalnego wzór (8) można wyrazić w postaci

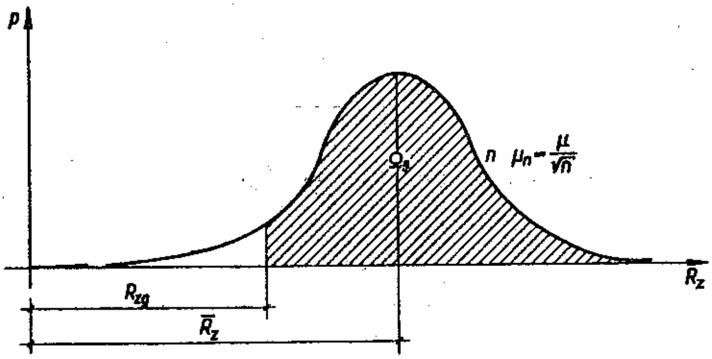
$$\Omega_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta\left[\frac{1}{\mu_l\sqrt{2}}(\overline{R}_l - R_{lg})\right], \tag{8'}$$

gdzie θ jest funkcją Laplace'a oraz $\overline{R}_l$ i μ_l wyrażają średnią wartość i odchylenie średnie wytrzymałości liny R_l.

Wstawiając wartość prawdopodobieństwa Ω_3 do wyrażenia (7') dochodzimy do zależności

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta\left[\frac{1}{\mu_l\sqrt{2}}(\overline{R}_l - R_{lg})\right]. \tag{9}$$

Średnią wartość $\overline{R}_l$ i odchylenie średnie μ_l wytrzymałości liny R_l możemy wyrazić za pomocą średnich wartości $\overline{R}_i$ i odchyleń średnich μ_i drutów wchodzących w skład



Rys. 2

liny. Ogólnie dla wytrzymałości drutów jako zmiennych losowych z różnymi średnimi wytrzymałościami $\overline{R}_i$ i różnymi odchyleniami średnimi μ_i dla każdego z nich, średnią wytrzymałość $\overline{R}_l$ liny wyrażamy za pomocą wzoru (5), zaś odchylenie średnie μ_l — wzorem (6), przy czym dla uproszczenia można przyjąć wartość odchylenia średniego μ_l ze wzoru (6').

W przypadku szczególnym, który rozpatrzymy dla zobrazowania naszych rozważań, gdy średnie wytrzymałości $\overline{R}_i$ i odchylenia średnie μ_i są równe sobie dla wszystkich drutów, wartości $\overline{R}_i$ i μ_i wyrażamy odpowiednio wzorami (5') i (6''), przy tym wzór (9) przyjmuje formę

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta\left[\frac{\sqrt{n}}{\mu\sqrt{2}}(\overline{R} - R_g)\right]. \tag{9'}$$

Wzór (9') wyraża zależność między wskaźnikiem bezpieczeństwa a wytrzymałością graniczną liny, przy czym uwzględnia on liczbę n drutów, jako składowych liny. Należy zaznaczyć, że liczba drutów n w linie ma zasadnicze znaczenie przy wyznaczaniu granicznej wytrzymałości R_g.

3. Współczynnik bezpieczeństwa liny

Naprężenie σ występujące w linie, obliczone za pomocą wzoru (2) wraz z przyrostami a_i i a_j, wynikłymi z niespełnienia się założeń, czyli naprężenie graniczne

$$\sigma_g = \sigma(1+\Sigma a_i), \quad a_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

nie może być większe od R_g, czyli

$$R_g \geqslant \sigma(1+\Sigma a_i). \tag{11}$$

Wzór (11) oznacza, że dla zapewnienia rozważanej konstrukcji stopnia bezpieczeństwa równego przyjętej wartości p naprężenie graniczne σ_g nie powinno być większe od wytrzymałości granicznej R_g, znalezionej ze wzoru (9).

Przy uwzględnieniu wszystkich czynników zwiększających naprężenie obliczeniowe, naprężenie σ we wzorze (11) jest naprężeniem dopuszczalnym k ($\sigma = k$) i ze wzoru (11) znajdujemy jego wartość

$$k = \frac{R_g}{(1+\Sigma a_i)}. \tag{12}$$

Iloraz średniej wytrzymałości liny $\overline{R}$ przez naprężenie dopuszczalne k

$$s = \frac{\overline{R}}{k} \tag{13}$$

jest współczynnikiem bezpieczeństwa liny.

Współczynnik bezpieczeństwa s wyrażony wzorem (13) może być miarą bezpieczeństwa liny podobnie jak wskaźnik bezpieczeństwa p.

4. Przykłady

Dla zilustrowania wpływu liczebności n drutów w linie na jej bezpieczeństwo rozpatrzono następujące przykłady:

Przykład 1. Dana jest lina złożona z n drutów ze stali konstrukcyjnej o średniej wytrzymałości $\overline{R} = \overline{Q} = 51{,}81$ kG/mm^2 i odchyleniu średnim $\mu_{2Q} = 3{,}18$ kG/mm^2 [7]. Przy tym należy zaznaczyć, że nie obliczano tu czynników zwiększających naprężenie, a rozpatrzono jedynie wpływ liczby drutów n na wytrzymałość graniczną R_g i obliczono wartość Σa_i, o którą mogą wzrosnąć naprężenia σ wskutek niezrealizowanych założeń. Ponadto założono, że druty w linie pracują w takich samych warunkach jak pojedynczo.

Przy naprężeniu dopuszczalnym $k = 30{,}00$ kG/mm^2 współczynnik bezpieczeństwa ze wzoru (13) przyjmuje wartość $s = 1{,}73$.

Dla przyjętego wskaźnika bezpieczeństwa $p = 0{,}9$ dla różnych wartości n obliczono wytrzymałości graniczne R_g i przyrosty naprężeń obliczeniowych Σa_i i wyniki obliczeń przytoczono w tablicy 1.

Z tablicy 1 wynika, że ze wzrostem n wyrażenie $(1+\Sigma\alpha_i)$ wzrasta i zbliża się do wartości współczynnika bezpieczeństwa s.

Tablica 1

n	1	2	4	9	16	25	100	1000
R_g	46,74	48,92	59,77	50,45	50,79	50,99	51,40	51,68
$\Sigma\alpha_i$	0,55	0,62	0,66	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72

Przykład 2. Dana jest lina z n drutów ze stali konstrukcyjnej o średniej wytrzymałości na granicy plastyczności $\overline{Q} = 25{,}225$ kG/mm²: i odchyleniu średnim $\mu = 2{,}263$ kG/mm² [6].

Założenie jak w przykładzie 1.

Dla danej liny obliczono wytrzymałości graniczne R_g przy zmieniającej się liczbie drutów w linie oraz stałych wartościach: wskaźnika bezpieczeństwa $p = 0{,}9$ i wzrostu naprężeń $(1+\Sigma\alpha_i) = 1{,}60$. W zależności od znalezionej wartości R_g obliczono naprężenie dopuszczalne k i współczynnik bezpieczeństwa s. Wyniki obliczeń przytoczono w tablicy 2.

Tablica 2

n	1	2	4	9	16	25	100	1000
R_g	22,40	23,17	23,77	24,26	24,50	24,65	24,94	24,14
k	14,00	14,50	14,80	15,20	15,30	15,40	15,60	15,70
s	1,80	1,74	1,70	1,66	1,65	1,64	1,62	1,61

Z tablicy 2 widać, że ze wzrostem liczby n drutów w linie dla $p = 0{,}9$ przy łącznej sumie przyrostów $\Sigma\alpha_i = 0{,}60$ wynikłych z niezrealizowania się założeń naprężenie dopuszczalne k przyjmuje coraz większe wartości, a współczynnik bezpieczeństwa s zmniejsza się.

Wnioski. 1. Lina złożona z n drutów wykazuje średnią wytrzymałość równą średniej arytmetycznej średnich wytrzymałości poszczególnych drutów oraz rozrzut wytrzymałości jest $\sqrt{n}$ razy mniejszy od rozrzutu wytrzymałości drutów.

2. Wskutek zmniejszenia się rozrzutu wytrzymałości liny wraz ze wzrostem liczby n drutów przy stałym naprężeniu dopuszczalnym k wzrasta $\Sigma\alpha_i$ i przez to zwiększa się rezerwa wytrzymałości, którą można wykorzystać na nieprzewidziane lub trudno uchwytne czynniki mogące zwiększyć naprężenie obliczeniowe σ. Dzięki temu lina jako element złożony wykazuje większe bezpieczeństwo od pojedynczego drutu.

3. Przy stałym wskaźniku bezpieczeństwa p i określonym przyroście naprężeń $\Sigma\alpha_i$ spowodowanym niezrealizowaniem się złożeń, a uwzględniającym wszystkie czynniki mogące zwiększyć naprężenia obliczeniowe, możemy dla liny zwiększyć naprężenie dopuszczalne k i jednocześnie zmniejszyć współczynnik bezpieczeństwa s.

4. W przypadku rozpatrzonej liny czynniki mogące zwiększyć naprężenie obliczeniowe, wyrażone sumą $\Sigma\alpha_i$, mają decydujący wpływ na wyznaczenie naprężenia dopuszczalnego k i tym samym na współczynnik bezpieczeństwa s. Wskutek tego przy dużej ostrożności współczynnik bezpieczeństwa s może przybierać znaczne wielkości.

5. Z rozpatrzonego przykładu wynika, że wskaźnik bezpieczeństwa p jest doskonalszą miarą bezpieczeństwa konstrukcji niż współczynnik bezpieczeństwa s.

Literatura cytowana w tekście

1. W. Wierzbicki, *Bezpieczeństwo budowli jako zagadnienie prawdopodobieństwa* (Sprawozdanie z odczytu w Akad. Nauk. Techn.), Przegl. Techn., Warszawa 1936, 690.

2. W. Wierzbicki, *Détermination du coefficient de sécurité des cables des ponts suspendus*, Association Internationale des Ponts et Charpentes, Zurich 1949.

3. W. Wierzbicki, *Obiektywne metody oceny bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych*, PWN, Warszawa 1961.

4. W. Piekarski, *Wpływ możliwych strat ekonomicznych na współczynnik bezpieczeństwa budowli*, Inżyn. i Budown., Warszawa 1954, 53.

5. W. Piekarski, *Wpływ liczebności próby na wskaźnik bezpieczeństwa budowli*, Inżyn. i Budown., Warszawa 1955, 26.

6. W. Piekarski, *Wyznaczenie wskaźnika bezpieczeństwa dla wolno podpartej stalowej belki walcowanej*, Inżyn. i Budown., Warszawa 1955, 259.

7. W. Piekarski, *Bezpieczeństwo budowli w świetle korelacji zachodzącej między granicą plastyczności i wytrzymałości*, Rozpr. Inżyn., 2, **10** (1962), 231.

Резюме

БЕЗОПАСНОСТЬ СТАЛЬНОГО КАНАТА КАК СЛОЖНОГО ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ

В элементах конструкции, подвергаемых растяжению, таких как напр. стальные канаты, кабели, пучки кабелей, пучки струн, пучки стержней в железобетонных конструкциях и т.п. — количество n их составних элементов имеет существенное значение на безопастность конструкции. В работе рассматривается стальной канат, состоящий из n проволок.

Прочность i этой проволоки в канате является случайной величиной, подчиняющейся закону распределения вероятностей, соответствующих сталей, употребленных при его изготовлении, а также для каждой n проволоки — не зависит от прочности остальных проволок. Поэтому в канате, состоящим из n проколок имеем дело с n независимыми, случайными величинами.

Прочность R_l каната, как случайная величина является, таким образом, суммой n независимых случайных величин. Отсюда, для каната: средняя прочность является средней арифметической средних прочностей R_i проволок [формулы (5) и (5')]; расброс прочности является $\sqrt{n}$ раз меньше расброса прочности проволок [формулы (6), (6') и (6'')].

Канат, в качестве элемента конструкции, состоящий из проволок, проявляет, благодаря уменьшении разброса прочности, повышенную безопасность чем одинарная проволока.

Summary

THE SAFETY PROBLEM OF A ROPE

In composite structural elements subject to tension, such as ropes, cables, sets of wires or bars in r.c. structures etc. the number n of component elements has an essential influence on the safety of the structure. The object of the present considerations is a rope composed of n wires.

The strength of the i-th wire is a random variable obeying the probability distribution law for the type of steel used and independent of the strength of the remaining wires. Thus in a rope of n wires we are concerned with n independent random variables. The strength R_l of the rope (which is a random variable) is therefore a sum of n independent random variables. Hence the mean strength $\overline{R}_l$ of the rope is the arithmetic mean of the mean strengths $\overline{R}_i$ of separate wires [the Eqs. (5) and (5')] and the dispersion of the strength is $\sqrt{n}$ times smaller than that of the wires [the Eqs. (6), (6') and (6'')].

Due to the reduction of strength dispersion the rope (which constitutes a structural part composed of n wires) shows greater safety than that of a single wire.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 października 1963 r.