ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
2, 11 (1963)

# O PROSTYM SPOSOBIE PROJEKTOWANIA ŻELBETOWYCH BELEK CIĄGŁYCH NA NOŚNOŚĆ GRANICZNĄ

M. Z. COHN (BUKARESZT)

## 1. Wstęp

Ostatnio zostały zaproponowane nowe metody optymalnego projektowania konstrukcji żelbetowych. Opierają się one na równoważnych w zasadzie kryteriach nośności granicznej lub użyteczności konstrukcji, lecz posługują się pojęciami «współczynnika redystrybucji», [1], lub «granicznego współczynnika bezpieczeństwa», [2]. Wspólną cechą obu tych metod jest to, że równania równowagi stanu granicznego są wyrażone w postaci układu równań liniowych, zaś mechanizmy zniszczenia są tak obrane, by zapewnić dokładnie przyjęty graniczny współczynnik bezpieczeństwa. Jeśli natomiast rozważymy zmienny (lecz niemniejszy od założonego) współczynnik bezpieczeństwa dla możliwych mechanizmów zniszczenia, to równania równowagi granicznej przechodzą w układ nierówności; mogą one być sprawdzone dla bardziej dogodnych kryteriów użyteczności konstrukcji.

Stosowanie tych kryteriów prowadzi do następującej ogólnej zasady optymalnego projektowania belek żelbetowych: optymalne projektowanie belek ciągłych o jednakowej odległości podpór i obciążonych symetrycznie może być przeprowadzone z wartości momentów sprężystych, redukując je przy tym z uwagi na częściowe występowanie obciążeń użytkowych:

1) w krytycznych przekrojach między podporami o 10%,

2) na podporach o 15%, 20% i 25% dla belek o 2, 3, 4 lub większej ilości podpór, przy końcach zamocowanych; natomiast zmniejszamy momenty na podporach odpowiednio o 20%, 25% i 30% dla belek o końcach swobodnie podpartych. Celem niniejszej pracy jest wykazanie słuszności powyższej zasady i przedstawienie jej charakterystycznych własności w porównaniu z własnościami rozwiązań sprężystych i teoretycznie optymalnych.

## 2. Założenia

Dla zwięzłości dwie metody optymalnego projektowania wymienione powyżej nazwiemy odpowiednio «teoretyczną» i «uproszczoną». Obok założeń właściwych dla każdej z tych metod przy rozpatrywaniu problemu optymalnego projektowania przyjmuje się następujące podstawowe założenia:

1. Belka żelbetowa zachowuje się jak materiał idealnie sprężysto-plastyczny (moment w danym przekroju rośnie liniowo wraz z obciążeniem aż do wartości momentu plastycznego i następnie pozostaje stały).

2. Stan zniszczenia zostaje osiągnięty, gdy przynajmniej w jednym przęśle belki powstaje mechanizm.

3. Pomija się wpływ sił osiowych i tnących na uplastycznienie oraz warunek ciągłości kątów obrotu, jak również możliwości utraty stateczności przy zginaniu.

4. Zakłada się, że obciążenia użytkowe występują w kombinacji najmniej korzystnej w każdym przekroju krytycznym.

5. Współczynniki przeciążenia odnoszą się tylko do obciążenia użytkowego. Ciężar własny nie zmienia się w czasie procesu obciążania konstrukcji.

### 3. Teoretyczne optymalne projektowanie na nośność graniczną

Moment plastyczny w $i$-tym przekroju krytycznym ($i = 1, 2, ..., s$) może być wyrażony następująco

$$X_i = a_i GL + x_i b_i cPL, \tag{3.1}$$

gdzie $G$ i $P$ oznaczają odpowiednio ciężar własny i obciążenie użytkowe, $a_i$ i $b_i$ są stałymi określającymi maksymalne momenty sprężyste, powstające pod działaniem sił $G$ i $P$, $c$ jest ustalonym współczynnikiem obciążenia granicznego, $c_{1i}$ jest współczynnikiem obciążenia przy uplastycznieniu $i$-tego krytycznego przekroju, $x_i = c_{1i}/c \leqslant 1$ jest granicznym współczynnikiem bezpieczeństwa. Współczynniki $c$, $G$, $P$ i $L$ są dane, $a_i$ i $b_i$ można znaleźć z rozwiązania zagadnienia sprężystego; pozostaje jedynie do określenia pełny zbiór wartości $x_i$.

Dla belek ciągłych racjonalne kryterium graniczne stanowi założenie, że wszystkie możliwe elementarne mechanizmy powstają przy tym samym współczynniku obciążenia granicznego. Wtedy równanie równowagi granicznej

$$\sum_i \lambda_{ik} b_i x_i = \varphi_k \tag{3.2}$$

przyjmują postać

$$(1 - \lambda_i) b_{i-1} x_{i-1} + b_i x_i + \lambda_i b_{i+1} x_{i+1} = \varphi_k, \tag{3.3}$$

gdzie $\lambda_i$ jest bezwymiarowym parametrem określającym położenie przegubu plastycznego w przęśle $i$-tym w mechanizmie zniszczenia $\varphi_k$ ($k = 1, 2, ..., m$), jest bezwymiarowym parametrem określającym maksymalną wartość momentów zginających w przęśle $k$. Ogólnie mamy $m$ równań (3.3) wiążących wszystkie $s$ wartości $x_i$ lecz każde z nich zawiera tylko 3 niewiadome [1].

Aby uzupełnić układ (3.3), musimy dołączyć $s - m = n$ dodatkowych związków, gdzie $n$ jest stopniem statycznej niewyznaczalności. Można to uczynić wprowadzając kryterium użyteczności w postaci równości $n+1$ wartości $x_1$, tak aby każda z pozostałych $m - 1$ liczb $x_i$ była większa niż wspólna wartość $\bar{x}_0$.

---

[1] Zauważymy analogię, jaka zachodzi między równaniem trzech momentów w zakresie sprężystym a układem 3.

Numerując krytyczne przekroje w dogodny sposób kryterium użyteczności wyrazić można przez następujące związki

(3.4.1) $$x_i = \bar{x}_0 = \text{const} \quad (\text{dla } i = 1, 2, ..., n+1),$$

(3.4.2) $$x_i > x_0 \quad (\text{dla } i = n+2, ..., s).$$

W pracy [2] pokazano, że wartość $\bar{x}_0$ można otrzymać przez znalezienie minimum średnich ważonych $\bar{x}_k$ ze wszystkich równań (3.2), to znaczy

(3.5.1) $$\bar{x}_0 = \min \bar{x}_k = \min \left( \frac{\varphi_k}{\sum_i \lambda_{ik} b_i} \right).$$

W szczególnym przypadku belek ciągłych stała wartość $\bar{x}_0$ powinna być określona dla wszystkich krytycznych przekrojów podporowych i dla krytycznego przekroju środkowego przęsła.

Podstawiając $\bar{x}_0$ do pozostałych $m - 1$ równań (3.3) mamy do określenia jedną niewiadomą w każdym równaniu i problem jest zatem rozwiązany.

### 4. Uproszczony sposób optymalnego projektowania

Obecnie na miejsce kryterium nośności granicznej przyjmiemy, że graniczny współczynnik bezpieczeństwa może być różny dla różnych możliwych mechanizmów zniszczenia, lecz przyjmuje wartości nie mniejsze od danej standardowej wartości $c$. Wtedy układ równań (3.3) przechodzi w układ następujących nierówności:

(4.1.1) $$(1 - \lambda)\, b_0\, x_0 + b_1\, x_1 + \lambda b_2\, x_2 \geqslant \varphi,$$

(4.1.2) $$(1 - \lambda)\, b_2\, x_2 + b_3\, x_3 + \lambda b_4\, x_4 \geqslant \varphi,$$

gdzie indeksy $0, 2, 4, ..., 2j$ odnoszą się do krytycznych przekrojów podporowych, zaś $1, 3, 5, ..., 2j+1$ oznaczają krytyczne przekroje w przęsłach.

W przypadku idealnym, gdyby dla wszystkich krytycznych przekrojów przyjąć ten sam graniczny współczynnik bezpieczeństwa, to kryterium zdolności do pracy miałoby postać $x_0 = x_1 = \text{const}$ i rozwiązanie przyjęłoby postać (3.5.2)[2]

$$\bar{x}_0 = \max \bar{x}_k = \max \left( \frac{\varphi_k}{\sum_i \lambda_{ik} b_i} \right).$$

W praktyce jednak można zaproponować następujące kryteria użytkowności:

jednakowy współczynnik bezpieczeństwa ze względu na uplastycznienie wszystkich przekrojów podporowych

(4.2.1) $$x_0 = x_2 = ... = x_{2j};$$

[2] Można wykazać, że górne kresy rozwiązań (3.5.2) wynoszą $\bar{x}_0 = 0{,}88$ i $\bar{x}_0 = 0{,}88$ lub $0{,}84$ dla ciągłych belek o końcach swobodnie podpartych i $\bar{x}_0 = 0{,}84$ dla belek o dwu i większej ilości przęseł przy końcach utwierdzonych. Dlatego bezpieczna wartość wszystkich współczynników bezpieczeństwa dla przekrojów przęsłowych we wszystkich przypadkach wynosi $x_1 = 0{,}9$.

jednakowy współczynnik bezpieczeństwa ze względu na uplastycznienie wszystkich krytycznych przekrojów w przęsłach

(4.2.2) $$x_1 = x_3 = \ldots = x_{2j+1};$$

większy współczynnik bezpieczeństwa dla przekroju krytycznego przęsła niż na podporach

(4.2.3) $$x_0 < x_1;$$

brak przegubów plastycznych przy obciążeniach użytkowych

(4.2.4) $$x_0 > 1/c.$$

Podstawiając związki (4.2.1) i (4.2.2) do równań stanu granicznego (4.1) otrzymujemy $\varphi_i(x_0, x_i) \geqslant \varphi$. Ponieważ mamy $m$ nierówności z $m+1$ niewiadomymi, więc do określenia wszystkich wartości $x_i$ potrzebny jest jeden dodatkowy warunek $x_i$. Aby zmniejszyć niebezpieczeństwo powstania nadmiernych zarysowań i ugięć, powinno się przyjąć odpowiednie dalsze ograniczenie współczynnika bezpieczeństwa dla przęsła, np.

(4.2.5) $$x_{2j+1} = x_1 \geqslant 0{,}9.$$

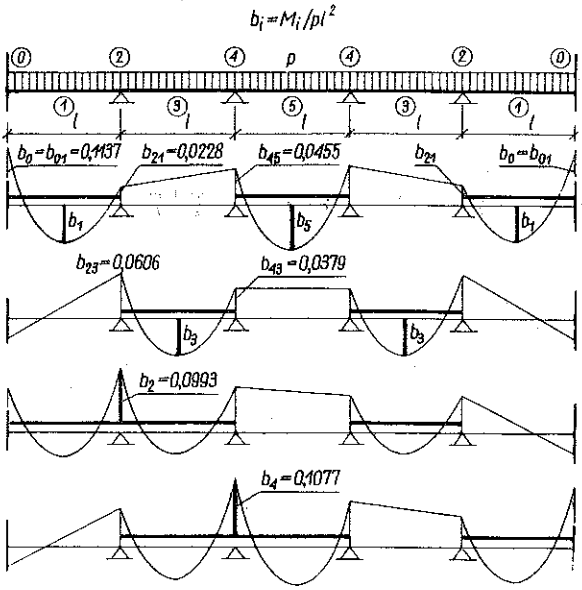
Rozwiązując nierówności (4.1) otrzymujemy różne wartości $x_0$, przy czym największa z nich zapewnia spełnienie wszystkich nierówności (4.1). Wobec tego

(4.3) $$x_0 = \max\left[\frac{\varphi - b_{2j+1}\, x_{2j+1}}{(1-\lambda)\, b_{2j} + \lambda_{2j+2}}\right].$$

Obecnie pozostaje tylko wykazać, że wartości $x_0$, określone przez zasadę sformułowaną we wstępie, ograniczają z góry wartości współczynników $x_0$, określonych przez związek (4.3).

### 5. Zastosowanie do żelbetowych belek ciągłych

Rozwiązanie problemu projektowania na nośność graniczną belek ciągłych zależy od ilości przęseł, warunków podparcia końców belki i od sposobu obciążenia. Ilość przęseł wynosi normalnie 2, 3, 4 albo 5. Przeprowadzimy obecnie dyskusję dla pięcio-przęsłowej belki ciągłej. Nie ogranicza to ogólności rozważań, bowiem dla belek o mniejszej ilości przęseł odpowiednie związki są identyczne, różnią się jedynie wartościami współczynników liczbowych. Rozważać będziemy jedynie przypadki, gdy oba końce belki są albo utwierdzone albo swobodnie podparte. Przypadek, gdy jeden koniec jest utwierdzony, a drugi swobodnie podparty, nie będzie rozpatrywany, ponieważ otrzymane wyniki będą leżały pomiędzy wartościami dla obu poprzednich przypadków. Rozważania będą się odnosiły do belki o końcach utwierdzonych: związki dotyczące belek swobodnie podpartych można łatwo z nich otrzymać. Przyjmuje się, że obciążenie działa symetrycznie, co zdarza się w większości praktycznych przypadków. Aby jeszcze bardziej uprościć rozważania, analizę przeprowadzimy przy użyciu wartości sprężystych momentów podporowych przy obciążeniu równomiernym. Oznaczmy przez $b_0$ i $b_2$, $b_4$, ... stałe określające maksymalne momenty sprężyste na podporach 0, 2, 4, zaś przez $b_{01}$, $b_{21}$, $b_{23}$, $b_{43}$ stałe określające momenty podporowe, odpowiadające maksymalnym momentom w przekrojach przęsłowych 1, 3 (rys. 1).




Rys. 1

Dla innych typów obciążenia sprężyste momenty podporowe wynoszą $\eta b_i PL$, zaś współczynniki korekcyjne $\eta$ odpowiadają równoważnemu obciążeniu $p_{eq} = \eta P/L$.

Po tych wstępnych uwagach przejdziemy do rozpatrzenia pięcio-przęsłowej belki ciągłej o końcach utwierdzonych. Warunki równowagi granicznej wyrażają się następująco:

(5.1.1) $$\eta b_0 x_0 (1-\lambda) + b_1 x_1 + \eta b_2 x_2 \lambda \geqslant \varphi,$$

(5.1.2) $$\eta b_2 x_2 (1-\lambda) + b_3 x_3 + \eta b_4 x_4 \lambda \geqslant \varphi,$$

(5.1.3) $$\eta b_4 x_4 + b_5 x_5 \geqslant \varphi.$$

Zgodnie z wyżej podanymi definicjami stałe dla momentów przęsłowych mogą być wyeliminowane przez wyrażenie ich przy pomocy stałych dla sąsiednich podpór:

(5.2.1) $$b_1 = \varphi - \eta [b_{01}(1-\lambda) + b_{21}\lambda],$$

(5.2.2) $$b_3 = \varphi - \eta [b_{23}(1-\lambda) + b_{43}\lambda],$$

(5.2.3) $$b_5 = \varphi - \eta b_{45}.$$

Podstawiając związki (5.2) do (5.1), biorąc pod uwagę (4.2.1) i (4.2.2) otrzymuje się następujące wyniki

(5.3.1) $$x_0 \geqslant \frac{1 - x_1 + x_1 [b_{01}(1-\lambda) + b_{21}\lambda]\, \eta/\varphi}{[b_0(1-\lambda) + b_2 \lambda]\, \eta/\varphi},$$

$$x_0 \geqslant \frac{1-x_1+x_1\,[b_{23}(1-\lambda)+b_{43}\,\lambda]\;\eta/\varphi}{[b_2\,(1-\lambda)+b_4\,\lambda]\;\eta/\varphi}, \tag{5.3.2}$$

$$x_0 \geqslant \frac{1-x_1+x_1\,b_{45}\,\eta/\varphi}{b_4\,\eta/\varphi}. \tag{5.3.3}$$

Maksymalną wartość $x_0$ należy przyjąć zgodnie ze związkiem (4.3) dla właściwej wartości $x_1$, np. $x_1 = 0{,}9$.

Widzimy, że wartość $x_0$ zależy:

a) od położenia przegubów na przęśle $\lambda$; przy obciążeniach skupionych przeguby plastyczne tworzą się w miejscu działania siły przyłożonej najbliżej ośrodka; szczegółowe obliczenia wykazują, że dla dowolnego typu obciążenia rozłożonego wartości $\lambda = 0{,}45$ i $\lambda = 0{,}55$ są przybliżeniami wystarczająco dokładnymi dla celów praktycznych;

b) od charakteru obciążenia: wartość $\eta/\varphi$ zmienia się od 6 (siła skupiona w środku przęsła) do 9 (dwie siły skupione w trzech częściach);

c) od stałych $b_i$ określających momenty sprężyste na podporach, tzn. od ilości przęseł i od warunków podparcia końców belki.

Obliczenia przeprowadzone przy użyciu efektywnych wartości $b_i$, $\lambda$ i $\eta/\varphi$ wykazały, że

1) związek (5.3.1) odpowiadający skrajnym przęsłom daje największą wartość $x_0$ we wszystkich przypadkach;

2) dla belek o końcach utwierdzonych uzyskujemy większą wartość $x_0$ aniżeli dla belek o końcach swobodnie podpartych;

3) spośród wszystkich schematów obciążenia, maksymalną wartość $x_0$ otrzymuje się przy środkowej sile skupionej dla belki o końcach utwierdzonych i przy dwóch siłach skupionych w odległości $L/4$ od końców dla belek o końcach swobodnie podpartych;

4) powyższe uwagi są słuszne dla belek o 2, 3 i 4 jednakowych przęsłach.

Proste obliczenia dały $\max x_0 = 0{,}87$, $0{,}77$ i $0{,}74$ w przypadku utwierdzonych belek o 2, 3 i 4 przęsłach oraz $\max x_0 = 0{,}80$, $0{,}75$, $0{,}76$ dla belek o końcach swobodnie podpartych przy 2, 3 i 4 przęsłach.

Powyższe wyniki uzasadniają odpowiednią redukcję sprężystych momentów na skutek obciążeń użytkowych maksymalnie o 0,13 i 0,26 w pierwszym lub o 0,20, 0,25 i 0,24 w drugim z rozpatrywanych przypadków.

Zaokrąglone wartości są podane w poniższej tablicy 1.

**Tablica 1. Zalecana redukcja maksymalnych sprężystych momentów powstałych pod działaniem przypadkowych obciążeń użytkowych**

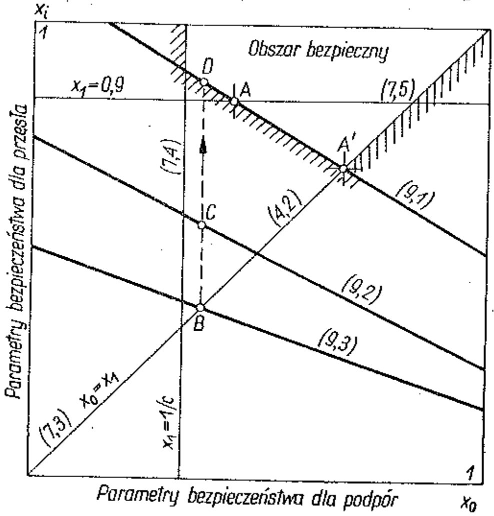
| Ilość przęseł | | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Przekroje przęseł | | | 10% | |
| Przekroje podporowe | Końce utwierdzone | 15% [1] | 20% | 25% |
| | Końce swobodne podparte | 20% | 25% | 30% [2] |

[1] Będzie wynosić 10% przy środkowej sile skupionej.

[2] Wyniesie 25% dla sił skupionych w odległości od końców.

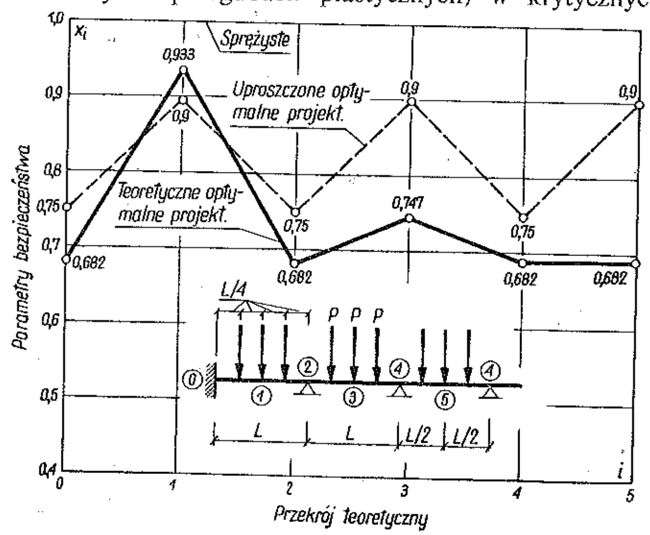
### 6. Dyskusja wyników

1. Można podać prostą interpretację geometryczną dla problemu optymalnego projektowania. Na rysunku 2 warunki równowagi granicznej (3.3) albo (5.1) reprezentowane są przez linie proste leżące na płaszczyźnie $x_0\,x_i$, przyjmuje się przy tym, że $x_0$ spełnia warunek (4.2.1). Rozwiązanie uproszczone odpowiada punktowi leżącemu w «obszarze bezpiecznym», ograniczonym liniami przedstawiającymi warunki (4.2.3), (4.2.4) i (5.1.1). Bezpieczne, ekonomiczne rozwiązanie znajduje się na linii (5.1.1), zaś najlepsze rozwiązanie spełniające dodatkowy warunek (4. 2. 5) odpowiada punktowi $A$ [przecięciu się linii (5.1.1) i (4.2.5)]. Rozwiązanie idealne reprezentowane jest przez punkt $A'$ na rys. 2. Teoretycznie optymalny projekt (linia kropkowana na rys. 2) leży na przecięciu linii odpowiadających warunkom (5.1.3) i (3.4.2.). Oczywiście punkt $B$ tak otrzymany reprezentuje żądane rozwiązanie (3.5), zaś punkty $C$ i $D$ posiadają tę samą odciętą.




Rys. 2

2. Uproszczone optymalne rozwiązanie zapewnia lepsze warunki pracy (mniejsze zarysowania i obroty w przegubach plastycznych) w krytycznych przekrojach

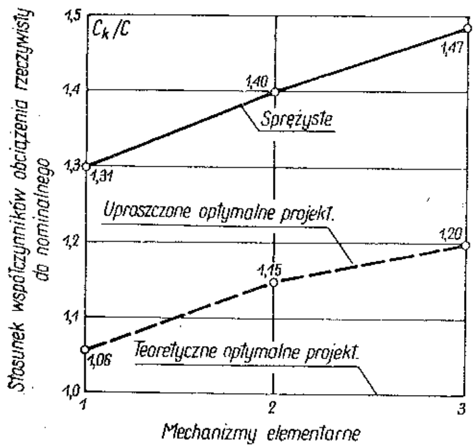



Rys. 3

przęsłowych niż podporowych, gdyż lepsze warunki odpowiadają większym wartościom $x_i$; zaproponowano $x_0 < x_1 = 0,9$.

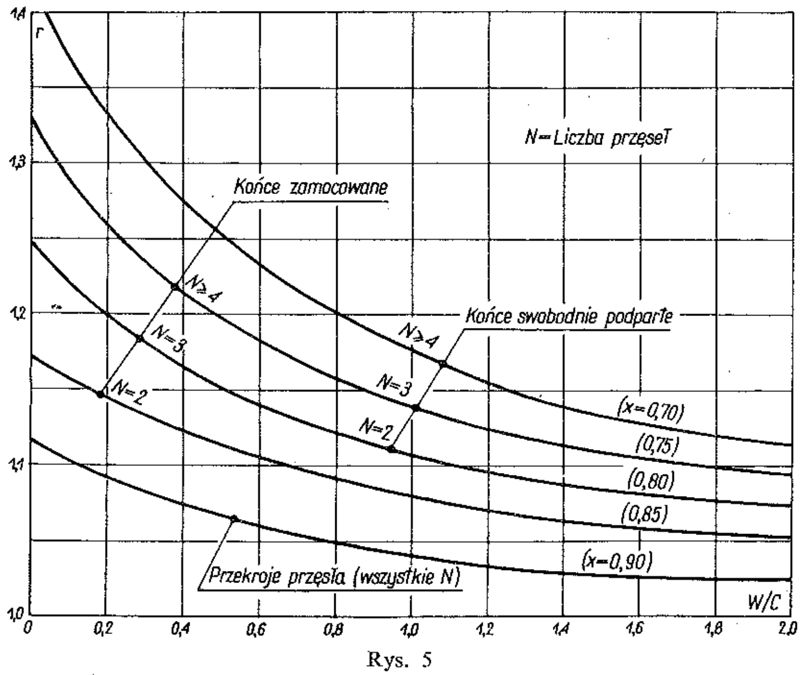
3. Graniczny współczynnik bezpieczeństwa nie jest jednakowy dla wszystkich przęseł (jak w przypadku rozwiązania teoretycznego). Najniższa i najwyższa wartość współczynnika obciążenia osiągana jest odpowiednio w przęsłach zewnętrznych i w przęśle środkowym.

Zmiany współczynnika bezpieczeństwa dla przekrojów krytycznych i współczynnika granicznego dla możliwych mechanizmów zniszczenia są zilustrowane na rys. 3 i 4 na przykładzie pięcio-przęsłowej belki ciągłej o końcach utwierdzonych. Wartości $x_i$ i $c_k/c$ są przedstawione w zależności od $i$ i $k$ dla 1) sprężystego, 2) teoretycznego i 3) uproszczonego sposobu projektowania. Wynika stąd, że prosta reguła podana na początku niniejszej pracy prowadzi do rozwiązań leżących pomiędzy wynikami projektowania sprężystego i teoretycznego zarówno ze względu na bezpieczeństwo uplastycznienia przekroju, jak bezpieczeństwo w stosunku do stanu zniszczenia.




Rys. 4

4. Uproszczone rozwiązanie prowadzące do ograniczonej z góry wartości współczynnika redystrybucji można nazwać «projektowaniem na ograniczony współczynnik redystrybucji».




Rys. 5

Dla różnych stosunków $w = G/P$ ciężaru własnego do obciążenia użytkowego, współczynnik redystrybucji wyraża się następująco

$$r = \frac{w+c}{w+c_1} = \frac{w/c+1}{w/c+x}, \tag{6.1}$$

a maksymalną wartość $r$ otrzymujemy przy $w = 0$. Przy przyjętych wartościach $x_i$ wartości współczynnika redystrybucji zgodnie z przyjętą zasadą projektowania będą się zawierały w granicach od 1,43 do 1,18 dla przekrojów podporowych i będą mniejsze od 1,11 dla przekrojów przęsłowych.

Maksymalną wartość współczynnika redystrybucji wynikającą z przyjętej reguły odczytać można dla szeregu szczególnych przypadków bezpośrednio z wykresów na rys. 5, gdzie $r$ jest przedstawione w zależności od $w/c$, ilości przęseł $N$ i warunków podparcia końców.

5. Zalecana redukcja momentów sprężystych na podporach o 30% zapewnia uniknięcie przegubów plastycznych w zakresie obciążeń użytkowych przy granicznych współczynnikach obciążenia większych niż $c = 1,43$. Rzeczywiście, ponieważ zaproponowana wartość współczynnika bezpieczeństwa na uplastycznienie wynosi $x = c_1/c = 0,7$ dla $c_1 = 1$ otrzymujemy $c = 1,43$ .

6. Ze względu na zapas bezpieczeństwa tkwiący w zaproponowanej regule wydaje się rzeczą słuszną przyjąć jako plastyczne momenty w przekrojach krytycznych — wartości momentów granicznych. (Zamiast wartości momentów odpowiadających pomiarom uplastycznienia, co prowadziłoby do zbyt konserwatywnego projektu).

### Literatura cytowana w tekście


[1] V. Pectu, *The optimum redistribution principle*, Indian Concrete Journal, 7 (1961).

[2] M. Z. Cohn, *Limit design of reinforced concrete structures for maximum yield safety*. Indian Concrete Journal, 6 (1962).

[3] Handbook of civil engineering designers. Theoretical and analytical part (in Russian). Strojizdat, Moscow 1960.



Р е з ю м е

## ПРОСТОЙ СПОСОБ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СПЛОШНЫХ БАЛОК НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ

Цель работы состоит в установлении простого принципа проектирования железобетонных балок при учете пластических эффектов. Чтобы провести расчет, следует знать изгибающие моменты в упругой области. Предполагая, что максимальные упругие моменты достигают в критических сечениях значений предельных моментов, принимается в данном случае, эти значения как основу этих расчетов при соответствующей их редукции, учитывающей изменчивость нагрузки. Предполагается здесь такие принципы использования конструкций, согласно которым коэффициенты безопасности для всех возможных механизмов разрушения равны между собой. В качестве примера рассматривается проектирование пятипролетной, подверженной однородной нагрузке.

Summary

## ON A SIMPLE RULE FOR THE LIMIT DESIGN OF REINFORCED CONCRETE CONTINUUM BEAMS

The work is concerned with establishing a simple rule of optimum design of reinforced beams when plastic effects are taken into account. Starting from the bending moments obtained from elastic solutions, and assuming that they reach limit values at critical sections, these values are taken as the basis of calculation. A necessary reduction of limit moments due to factored live loads is next proposed. A so-called „serviceability criterion" is used for this purpose. According to this criterion, the yield safety parameters for all possible elementary mechanism should be equal. The optimal design of a five-span, continuum beam under uniform load was considered in order to illustrate the above method.

STRUCTURAL DEPARTMENT,
BUILDING RESEARCH INSTITUTE
BUCUREȘTI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 czerwca 1962 r.*