

WŁODZIMIERZ DERSKI

**STAN NAPRĘŻENIA I PRZEMIESZCZENIA W GRUBYCH PŁYTACH,
WYWOŁANY DZIAŁANIEM NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXVIII**

TOM X · ZESZYT 1 · ROK 1962

SPIS RZECZY

CZĘŚĆ I. PŁYTA KOŁOWA

Rozdział I. Rozwiązanie ścisłe	117
1. Pole temperatury	117
2. Potencjał termosprężystego przemieszczenia	121
3. Stan naprężenia	123
4. Stan przemieszczenia	128
Rozdział II. Rozwiązanie asymptotyczne	129
5. Pole temperatury	130
6. Stan naprężenia i przemieszczenia	131
Rozdział III. Rozwiązanie w przypadku ogólnych warunków brzegowych	138
7. Pole temperatury	138
8. Stan naprężenia i przemieszczenia	140
9. Rozwiązanie asymptotyczne	140
Rozdział IV. Rozwiązanie w przypadku warunków termicznych typu Neumanna	140
10. Pole temperatury	140
11. Pole temperatury (rozwiązania asymptotyczne)	142
12. Stan naprężenia i przemieszczenia	143
13. Stan naprężenia i przemieszczenia (rozwiązania asymptotyczne)	144

CZĘŚĆ II. PŁYTA PROSTOKĄTNA

Rozdział V. Rozwiązanie ścisłe	144
14. Pole temperatury	144
15. Potencjał termosprężystego przemieszczenia	147
16. Stan naprężenia	148
Rozdział VI. Rozwiązanie asymptotyczne	159
17. Pole temperatury	159
18. Stan naprężenia	160
Rozdział VII. Rozwiązanie w przypadku warunków termicznych typu Neumanna	166
19. Pole temperatury	166
20. Pole temperatury (rozwiązanie asymptotyczne)	167
21. Stan naprężenia	168
22. Stan naprężenia (rozwiązanie asymptotyczne)	169
Rozdział VIII. Rozwiązanie w przypadku ogólnych warunków brzegowych	169
23. Pole temperatury	169
24. Stan naprężenia	171

CZĘŚĆ III. PRZYKŁAD LICZBOWY I WNIOSKI KOŃCOWE

25. Przykład liczbowy	172
26. Uwagi końcowe	174

Celem pracy jest wyznaczenie quasi-ustalonego stanu naprężenia i przemieszczenia w grubych płytach: kołowej i prostokątnej. Ekspozycja ciepła określona jest przez dany rozkład temperatury na powierzchniach płyty. Rozpatrywane są trzy przypadki ekspozycji ciepła. W pierwszym przypadku pole temperatury jest symetryczne względem płaszczyzny środkowej płyty $z = 0$. W drugim przypadku pole temperatury jest określone antysymetrycznymi warunkami brzegowymi względem płaszczyzny środkowej. W trzecim przypadku obszar ekspozycji ciepła znajduje się tylko na jednej powierzchni płyty $z = h$.

Do wyznaczenia składowych stanu naprężenia posłużymy się ogólnie stosowaną funkcją potencjału termosprężystego przemieszczenia.

Dążyć będziemy do tego, aby na powierzchniach płyty $z = \pm h$ spełnić w sposób ścisły wszelkie mechaniczne warunki brzegowe, zadawalając się spełnieniem tych warunków w sposób całkowity na pozostałych powierzchniach.

Rozwiązanie omówionego problemu wydaje się celowe, ponieważ istniejące w dziedzinie termosprężystości rozwiązania quasi-ustalone ograniczają się głównie do przestrzeni, półprzestrzeni, pełnego walca o przekroju kołowym i rury o przekroju w kształcie pierścienia kołowego (por. [3], [7], [20] i [21]). We wspomnianych rozwiązaniach, z wyjątkiem być może walca i rury, nie tyle chodziło o charakterystykę ilościową składowych stanu naprężenia, ile o zbadanie jakościowego charakteru zmian. Dlatego właśnie rozważano przestrzeń i półprzestrzeń, ponieważ w tych przypadkach udawało się uzyskać stosunkowo prostą postać rozwiązania. W niniejszej pracy chodzi nie tylko o podanie formalnego rozwiązania, ale będziemy dążyć do podania pewnych wniosków konstrukcyjnych. Podamy pewne rozwiązania asymptotyczne, które powinny ułatwić żmudne obliczenia numeryczne. Zwrócimy również uwagę na istotną różnicę między rozwiązaniem stacjonarnym, [19] i [20], a rozwiązaniem quasi-ustalonym.

CZEŚĆ I. PŁYTA KOŁOWA

Rozdział I. Rozwiązanie ścisłe

1. Pole temperatury

Przypadek 1. Pole temperatury określone jest równaniem różniczkowym

$$(1.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

warunkiem początkowym

$$(1.2) \quad T(r, z, t = 0) = 0$$

i warunkami brzegowymi

$$(1.3) \quad \begin{cases} T(r, \pm h, t) = \begin{cases} T_0 f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a; \\ 0, & \text{jeśli } a < r < b; \end{cases} \\ T(b, z, t) = 0. \end{cases}$$

W powyższych związkach T oznacza temperaturę, a promień koła, które jest obszarem ekspozycji ciepła, t czas, κ współczynnik przewodzenia temperatury, $2h$ grubość płyty oraz b promień płyty.

Do rozwiązania równania (1.1) posłużymy się transformacją Laplace'a. Transformację temperatury określa się całką, [22] i [25],

$$T_L(r, z, p) = \int_0^{\infty} T_L(r, z, t) e^{-pt} dt.$$

Po przetransformowaniu równanie (1.1) przyjmie postać

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 T_L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_L}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_L}{\partial z^2} - q^2 T_L = 0, \quad q^2 = \frac{p}{\kappa}.$$

Rozwiązanie tego równania musi spełniać przetransformowane warunki brzegowe

$$(1.5) \quad \begin{cases} T_L(r, \pm h, p) = \begin{cases} \frac{T_0}{p} f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a; \\ 0, & \text{jeśli } a < r < b; \end{cases} \\ T_L(b, z, p) = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie równania (1.4) można przyjąć w postaci szeregu Fouriera-Bessela

$$(1.6) \quad T_L(r, z, p) = \frac{T_0}{p} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) \frac{\text{ch}(\lambda z)}{\text{ch}(\lambda h)},$$

w którym A_n jest współczynnikiem rozkładu w szereg Fouriera-Bessela funkcji $T_L(r, \pm h, p)$, tj.

$$T_L(r, \pm h, p) = \frac{T_0}{p} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r).$$

Liczby α_n wyznaczyć trzeba z równania

$$(1.7) \quad J_0(\alpha b) = 0,$$

a liczby λ określić z równania

$$(1.8) \quad q^2 = (i\alpha_n)^2 + \lambda^2 = \frac{p}{\kappa}.$$

Jak wiadomo transformacja odwrotna określona jest całką

$$T(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} T_L(r, z, p) e^{pt} dp.$$

Jak wynika ze wzoru (1.6) funkcja podcałkowa jest jednoznaczna funkcją zmiennej p . Mianownik tej funkcji ma miejsca zerowe w punktach $p = 0$ oraz $p = -\kappa(\alpha_n^2 + \beta_m^2)$. Punkty te są biegunami pierwszego rodzaju funkcji podcałkowej. Liczby β_m są pierwiastkami równania

$$(1.9) \quad \cos(\beta h) = 0.$$

Po prostych przekształceniach rozwiązanie równania (1.1), spełniające warunek początkowy (1.2) i warunki brzegowe (1.3), można napisać w postaci

$$(1.10) \quad T(r, z, t) = \eta(t) T_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) \frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)} - \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} J_0(\alpha_n r) \cos(\beta_m z) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\}, \quad m = 1, 3, 5, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$A_n = \frac{2 \int_0^a r f(r) J_0(\alpha_n r) dr}{b^2 J_1^2(\alpha_n b)}, \quad A_{nm} = \frac{2\beta_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{h \vartheta_{nm}^2} A_n, \quad \vartheta_{nm}^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2.$$

W przypadku szczególnym, gdy $f(r) = 1$, otrzymujemy następujące wartości współczynników:

$$A_n = \frac{2a J_1(\alpha_n a)}{a_n b^2 J_1^2(\alpha_n b)}, \quad A_{nm} = \frac{2\beta_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{h \vartheta_{nm}^2} \frac{2a J_1(\alpha_n a)}{a_n b^2 J_1^2(\alpha_n b)}.$$

Przypadek 2. Pole temperatury określone jest równaniem (1.1), warunkiem początkowym (1.2) i warunkami brzegowymi

$$(1.11) \quad \begin{cases} T(r, \pm h, t) = \begin{cases} \pm T_0 f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a; \\ 0, & \text{jeśli } a < r < b; \end{cases} \\ T(b, z, t) = 0. \end{cases}$$

Podobnie jak w przypadku 1 do rozwiązania równania (1.1) zastosujemy transformację Laplace'a. Transformata warunków brzegowych (1.11) ma postać

$$(1.12) \quad \begin{cases} T_L(r, \pm h, p) = \begin{cases} \pm \frac{T_0}{p} f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a; \\ 0, & \text{jeśli } a < r < b; \end{cases} \\ T_L(b, z, p) = 0. \end{cases}$$

W tym przypadku rozwiązanie równania (1.4) przyjmiemy w postaci następującego szeregu Fouriera-Bessela:

$$(1.13) \quad T_L(r, z, p) = \frac{T_0}{p} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) \frac{\text{sh}(\lambda z)}{\text{sh}(\lambda h)},$$

gdzie liczby a_n są pierwiastkami równania (1.7), a liczby λ określa wzór (1.8), zaś A_n są współczynnikami rozkładu w szereg funkcji $f(r)$.

Wykonując transformację odwrotną stwierdzamy, że funkcja podcałkowa ma miejsca zerowe w punktach $p = 0$ oraz $p = -\kappa(\alpha_n^2 + \gamma_m^2)$. Liczby γ_m są pierwiastkami równania

$$(1.14) \quad \sin(\gamma h) = 0.$$

Po prostych przekształceniach poszukiwane rozwiązanie można zapisać w postaci

$$(1.15) \quad T(r, z, t) = \eta(t) T_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) \frac{\text{sh}(a_n z)}{\text{sh}(a_n h)} - \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} J_0(a_n r) \sin(\gamma_m z) \exp(-\kappa \delta_{nm}^2 t) \right\}, \quad \delta_{nm}^2 = \alpha_n^2 + \gamma_m^2, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie A_n określone jest wzorem (1.10), a

$$B_{nm} = \frac{2\gamma_m (-1)^{m+1}}{h\delta_{nm}^2} A_n.$$

Przypadek szczególny, gdy $f(r) = 1$, omówiony jest już na poprzedniej stronie.

Przypadek 3. W tym przypadku pole temperatury określone jest, tak jak poprzednio, równaniem (1.1) i warunkiem początkowym (1.2), ale ekspozycja ciepła ma miejsce jedynie na jednej powierzchni płyty, co odpowiada następującym warunkom brzegowym

$$(1.16) \quad \begin{cases} T(r, h, t) = \begin{cases} T_0 f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a; \\ 0, & \text{jeśli } a < r < b; \end{cases} \\ T(r, -h, t) = 0, \\ T(b, z, t) = 0. \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę oba poprzednie przypadki możemy rozwiązanie napisać natychmiast; jest ono superpozycją obu poprzednich rozwiązań i ma postać

$$(1.17) \quad T(r, z, t) = \eta(t) T_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) \frac{\text{sh}[a_n(z+h)]}{\text{sh}(2a_n h)} - \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} J_0(a_n r) \cos(\beta_m z) \exp(-\kappa \delta_{nm}^2 t) - \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} J_0(a_n r) \sin(\gamma_m z) \exp(-\kappa \delta_{nm}^2 t) \right\}.$$

We wszystkich trzech przypadkach, gdy $t \rightarrow \infty$, wypisane wyżej rozwiązania opisują stacjonarne pole temperatury opisane równaniem (1.1) i odpowiednimi warunkami brzegowymi. Tak więc

przypadek 1

$$(1.18) \quad T(r, z) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) \frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)};$$

przypadek 2

$$(1.19) \quad T(r, z) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) \frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)};$$

przypadek 3

$$(1.20) \quad T(r, z) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) \frac{\operatorname{sh}[\alpha_n(z+h)]}{\operatorname{sh}(2\alpha_n h)}.$$

Przytoczone tutaj rozwiązania stacjonarne pokrywają się z rozwiązaniami podanymi w pracy [19].

2. Potencjał termosprężystego przemieszczenia

Napężenia i przemieszczenia będziemy wyznaczać za pomocą ogólnie stosowanej funkcji potencjału termosprężystego przemieszczenia. Funkcję tę definiuje się wzorami

$$(2.1) \quad \bar{u} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \text{oraz} \quad \bar{w} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

gdzie Φ oznacza funkcję potencjału, a \bar{u} i \bar{w} przemieszczenia radialne i w kierunku osi z .

Po uwzględnieniu tych wzorów trzy równania przemieszczeniowe teorii sprężystości, [12], sprowadzają się do jednego równania

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \vartheta_0 T,$$

w którym $\vartheta_0 = [(1+\nu)/(1-\nu)] \alpha_T$, ν oznacza współczynnik Poissona, α_T liniowy współczynnik rozszerzalności cieplnej.

Poszukiwać będziemy takich rozwiązań szczególnych równania (2.2), aby było $\Phi = 0$ w płaszczyznach $z = \pm h$.

W celu uproszczenia procesu całkowania będziemy wyznaczać funkcję potencjału w dwóch częściach. Pierwsza część oznaczona indeksem 1 odpowiadać będzie tej części wzoru na temperaturę, która jest funkcją miejsca:

$$(2.3) \quad \nabla^2 \Phi_1 = T_1(r, z),$$

w którym $T_1(r, z)$ opisana jest wzorami (1.20)-(1.21). Rozwiązania tego równania podane są w pracy W. NOWACKIEGO, [19] i [20].

Druga część funkcji potencjału, oznaczona indeksem 2, odpowiada tej części wzoru na temperaturę, która zależy od miejsca i czasu:

$$(2.4) \quad \nabla^2 \Phi_2 = T_2(r, z, t).$$

Całkę szczególną drugiej części funkcji potencjału można wyznaczyć bardzo łatwo. Wiadomo, że, [16], [10],

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi_2 = \vartheta_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \vartheta_0 \nabla^2 T_2,$$

a stąd

$$(2.5) \quad \Phi_2 = \kappa \vartheta_0 \int T_2(r, z, t) dt.$$

Na podstawie tego krótkiego objaśnienia możemy już bezpośrednio przystąpić do napisania odpowiednich funkcji potencjału.

Przypadek 1. Funkcja potencjału odpowiadająca temu przypadkowi wyznaczona jest przez pole temperatury (1.10); korzystając z pracy [19] oraz wzoru (2.5) możemy napisać

$$(2.6) \quad \Phi = \eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) \frac{Z_n(z)}{2 a_n^2 \operatorname{ch}(a_n h)} + \right. \\ \left. + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{A_{nm}}{\vartheta_{nm}^2} J_0(a_n r) \cos(\beta_m z) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\},$$

gdzie $Z_n(z) = a_n z \operatorname{sh}(a_n z) - a_n h \operatorname{th}(a_n h) \operatorname{ch}(a_n z)$.

Przypadek 2. W tym przypadku funkcja potencjału odpowiada polu temperatury określonego wzorem (1.15); w oparciu o podane objaśnienie możemy napisać

$$(2.7) \quad \Phi = \eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) \frac{S_n(z)}{2 a_n^2 \operatorname{sh}(a_n h)} + \right. \\ \left. + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{B_{nm}}{\vartheta_{nm}^2} J_0(a_n r) \sin(\gamma_m z) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\},$$

gdzie $S_n(z) = a_n z \operatorname{ch}(a_n z) - a_n h \operatorname{cth}(a_n h) \operatorname{sh}(a_n z)$.

Przypadek 3. Ten przypadek, podobnie jak pole temperatury określone wzorem (1.17), jest superpozycją obu poprzednich; odpowiadającą mu funkcję potencjału możemy napisać bezpośrednio jako superpozycję wzorów (2.6) i (2.7):

$$(2.8) \quad \Phi = \eta(t) T_0 \frac{\vartheta_0}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) \frac{\operatorname{sh}(a_n h) Z_n(z) + \operatorname{ch}(a_n h) S_n(z)}{\operatorname{sh}(2 a_n h)} + \right.$$

$$+ \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{A_{nm}}{\delta_{nm}^2} J_0(\alpha_n r) \cos(\beta_m z) \exp(-\kappa \delta_{nm}^2 t) + \\ + \left. \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{B_{nm}}{\delta_{nm}^2} J_0(\alpha_n r) \sin(\gamma_m z) \exp(-\kappa \delta_{nm}^2 t) \right\}.$$

Jest rzeczą oczywistą, że wtedy, gdy $t \rightarrow \infty$, podane trzy funkcje potencjału pokrywają się z funkcjami podanymi w pracy [19].

3. Stan naprężenia

Stan naprężenia określony funkcją potencjału oznaczmy jedną kreską ($\bar{\sigma}_{ij}$). Składowe stanu naprężenia wyrażają się funkcją określoną związkami, [20], [21]

$$(3.1) \quad \bar{\sigma}_{ij} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial i \partial j} - \nabla^2 \Phi \delta_{ij} \right), \quad i, j = r, z,$$

gdzie G oznacza moduł odkształcenia postaciowego, a δ_{ij} symbol Kroneckera.

Stan naprężenia określony potencjałem nie spełnia warunków brzegowych na powierzchniach $z = \pm h$:

$$(3.2) \quad \sigma_{zz}(r, \pm h, t) = 0 \quad \text{oraz} \quad \sigma_{rz}(r, \pm h, t) = 0.$$

W celu spełnienia tych warunków dodamy stan naprężenia ($\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$), który odpowiada jednorodnemu układowi równań teorii sprężystości, a w naszym przypadku określony będzie za pomocą funkcji Love'a φ spełniającej, jak wiadomo, równanie biharmoniczne

$$(3.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0.$$

Składowe stanu naprężenia wyrażone przez tę funkcję określone są związkami, [19], [12] i [14]

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{\sigma}}_{rr} = \frac{2G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \quad \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{2G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \\ \bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \frac{2G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \end{array} \right.$$

Składowe stanu naprężenia otrzymane za pomocą potencjału i funkcji Love'a spełniają warunki na powierzchniach $z = \pm h$; oznaczmy je $\sigma'_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij}$.

Do spełnienia pozostaje jeszcze warunek na brzegu $r = b$

$$(3.5) \quad \sigma_{rr}(b, z, t) = 0 \quad \text{oraz} \quad \sigma_{rz}(b, z, t) = 0.$$

Te warunki spełnimy w sposób całkowity, a nowy stan naprężenia, który trzeba dodać, aby spełnić warunki (3.5), oznaczmy (σ'_{ij}).

Tak więc stan naprężenia spełniający warunki na powierzchniach $z = \pm h$ w sposób dokładny, a na powierzchni $r = b$ w sposób przybliżony, wyraża się sumą

$$(\sigma_{ij}) = (\sigma'_{ij}) + (\sigma''_{ij}).$$

Przypadek 1. Korzystając ze wzoru (3.1) oraz (2.6) znajdujemy

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= 2\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2 \operatorname{ch}(a_n h)} \left[Z_n(z) \left\{ \frac{1}{a_n r} J_1(a_n r) - J_0(a_n r) \right\} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \operatorname{ch}(a_n z) J_0(a_n r) \right] + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{A_{nm}}{\vartheta_{nm}^2} \cos(\beta_m z) \left[\beta_m^2 J_0(a_n r) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_n}{r} J_1(a_n r) \right] \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\}, \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} &= -2\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) \frac{\operatorname{ch}(a_n z)}{\operatorname{ch}(a_n h)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} J_0(a_n r) \cos(\beta_m z) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\}, \\ \bar{\sigma}_{zz} &= 2\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) \frac{Z_n(z)}{2 \operatorname{ch}(a_n h)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 A_{nm}}{\vartheta_{nm}^2} J_0(a_n r) \cos(\beta_m z) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\}, \\ \bar{\sigma}_{rz} &= -2\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(a_n r) \frac{Z'_n(z)}{2 a_n \operatorname{ch}(a_n h)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_n \beta_m A_{nm}}{\vartheta_{nm}^2} J_1(a_n r) \sin(\beta_m z) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Stan naprężenia ($\bar{\sigma}_{ij}$) nie spełnia warunków brzegowych (3.2). Na powierzchniach $z = \pm h$ naprężenia $\bar{\sigma}_{rz}$ są różne od zera i przyjmują wartości

$$\bar{\sigma}_{rz}(r, z = \pm h, t) = \mp 2\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(a_n r) \frac{\operatorname{sh}(a_n h) \operatorname{ch}(a_n h) + a_n h}{2 \operatorname{ch}^2(a_n h)} - \right. \\ \left. - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_n \beta_m A_{nm}}{\vartheta_{nm}^2} J_1(a_n r) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\}.$$

Funkcję Love'a przyjmujemy w następującej postaci:

$$\varphi = \eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n M_n(z) J_0(a_n r) - \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} N_{nm}(z) J_0(a_n r) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\}.$$

Spełniając równanie (3.3) znajdujemy postać funkcji $M_n(z)$ oraz $N_{nm}(z)$:

$$M_n(z) = C_n^{(1)} \operatorname{sh}(a_n z) + C_n^{(2)} a_n z \operatorname{ch}(a_n z),$$

$$N_{nm}(z) = D_{nm}^{(1)} \operatorname{sh}(a_n z) + D_{nm}^{(2)} a_n z \operatorname{ch}(a_n z).$$

Stałe $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $D_{nm}^{(1)}$ oraz $D_{nm}^{(2)}$ wyznaczamy z warunków brzegowych dla $z = \pm h$ (3.2). Otrzymujemy

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_n^{(1)} = C_n^{(2)} [(1-2\nu) - a_n h \operatorname{th}(a_n h)], \\ C_n^{(2)} = \frac{1-2\nu}{2a_n^3 \operatorname{ch}(a_n h)}, \\ D_{nm}^{(1)} = D_{nm}^{(2)} [(1-2\nu) - a_n h \operatorname{th}(a_n h)], \\ D_{nm}^{(2)} = \frac{\beta_m (1-2\nu) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{ch}(a_n h)}{a_n^2 \vartheta_{nm}^2 [\operatorname{sh}(a_n h) \operatorname{ch}(a_n h) + a_n h]} \end{array} \right.$$

Dodając do siebie składowe stanu naprężenia $(\bar{\sigma}_{ij})$ oraz $(\bar{\sigma}'_{ij})$ otrzymujemy składowe stanu naprężenia (σ'_{ij}) :

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma'_{rr} = -2\eta(t) G T_0 \vartheta_0 \left\{ (1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_1(a_n r) \operatorname{ch}(a_n z)}{a_n r \operatorname{ch}(a_n h)} - \right. \\ \quad - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{A_{nm}}{\vartheta_{nm}^2} \cos(\beta_m z) \left[\beta_m^2 J_0(a_n r) + \frac{a_n}{r} J_1(a_n r) \right] \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) - \\ \quad - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_n \beta_m A_{nm} (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\vartheta_{nm}^2 D_n} \left(\left[J_0(a_n r) - \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \right] [F_n^{(1)}(z) + 2 \operatorname{ch}(a_n z)] + \right. \\ \quad \left. + 2 \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \nu \operatorname{ch}(a_n z) \right) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \left. \right\}, \\ \sigma'_{\varphi\varphi} = -2\eta(t) G T_0 \vartheta_0 \left\{ (1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[J_0(a_n r) - \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \right] \frac{\operatorname{ch}(a_n z)}{\operatorname{ch}(a_n h)} - \right. \\ \quad \left. - \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} J_0(a_n r) \cos(\beta_m z) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) - \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_m A_{nm} (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\vartheta_{nm}^2 D_n} \left(2\nu \left[J_0(\alpha_n r) - \frac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r} \right] \operatorname{ch}(\alpha_n z) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r} [F_n^{(1)}(z) + 2 \operatorname{ch}(\alpha_n z)] \right) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t), \\
 \sigma'_{zz} = & 2\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 A_{nm}}{\vartheta_{nm}^2} J_0(\alpha_n r) \cos(\beta_m z) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) + \right. \\
 & \left. + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_m A_{nm} (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\vartheta_{nm}^2 D_n} J_0(\alpha_n r) [\operatorname{ch}(\alpha_n z) - F_n^{(1)}(z)] \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\}, \\
 \sigma'_{rz} = & 2\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_m A_{nm}}{\vartheta_{nm}^2} J_1(\alpha_n r) \sin(\beta_m z) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) - \right. \\
 & \left. - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_m A_{nm} (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\vartheta_{nm}^2 D_n} J_1(\alpha_n r) \{ [1 - \alpha_n h \operatorname{th}(\alpha_n h)] \operatorname{sh}(\alpha_n z) + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha_n z \operatorname{ch}(\alpha_n z) \} \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\}.
 \end{aligned}$$

Naprężenia normalne i styczne charakteryzują się tym, że znikają w nich wyrazy zależne tylko od miejsca; z budowy wzorów wynika, że obie składowe dążą do zera, gdy $t \rightarrow \infty$.

Naprężenia σ'_{rr} są na brzegu $r = b$ różne od zera i tworzą wypadkową

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad N = & -4\eta(t) 4GT_0 \vartheta_0 \left\{ (1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_1(\alpha_n b)}{\alpha_n^2 b} \operatorname{th}(\alpha_n h) - \right. \\
 & \left. - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n A_{nm} (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\beta_m \vartheta_{nm}^2 b} J_1(\alpha_n b) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) + \right. \\
 & \left. + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\beta_m A_{nm} (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\alpha_n \vartheta_{nm}^2 b} J_1(\alpha_n b) \left[1 - 2\nu \frac{\operatorname{sh}(\alpha_n h) \operatorname{ch}(\alpha_n h)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h) \operatorname{ch}(\alpha_n h) + \alpha_n h} \right] \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\}.
 \end{aligned}$$

Wzór powyższy otrzymaliśmy drogą całkowania σ'_{rr} w granicach od $-h$ do h biorąc pod uwagę, że występujące w (3.8) funkcje $F_n^{(1)}(z)$ oraz D_n wyrażają się następująco:

$$(3.10) \quad \begin{cases} F_n^{(1)}(z) = \frac{\alpha_n z \operatorname{sh}(\alpha_n z) \operatorname{ch}(\alpha_n h) - \alpha_n h \operatorname{sh}(\alpha_n h) \operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}, \\ D_n = \frac{\operatorname{sh}(\alpha_n h) \operatorname{ch}(\alpha_n h) + \alpha_n h}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}. \end{cases}$$

Naprężenia σ'_{rz} dają na brzegu $r = b$ wypadkową równą zeru.

Dodajemy do składowych stanu naprężenia (σ'_{ij}) składowe stanu naprężenia (σ''_{ij}) równoważnego równomiernemu rozciąganiu w kierunku promieniowym r . Ostateczne wyrażenia na składowe naprężenia oznaczone (σ_{ij}) wynoszą, [18] i [23]

$$(3.10.1) \quad \sigma_{rr} = \sigma'_{rr} - \frac{N}{2h}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma'_{\varphi\varphi} - \frac{N}{2h}, \quad \sigma_{zz} = \sigma'_{zz}.$$

Z powyższych wzorów łatwo otrzymać kilka przypadków szczególnych. Charakterystyczne cechy przejść granicznych i podstawienia omówione zostały przy wyznaczaniu pola temperatury. Ze względu na brak miejsca i łatwość przekształceń nie będziemy tutaj przytaczać wzorów, odpowiadających poszczególnym przypadkom.

Przypadek 2. Składowe stanu naprężenia określone potencjałem można natychmiast wypisać znając funkcję potencjału (2.7). Budowa wzorów w obu przypadkach jest taka sama. Funkcja Love'a w poprzednim przypadku była niesymetryczna względem zmiennej z . Porównując z sobą funkcje potencjału odpowiadające poprzedniemu przypadkowi i obecnie rozpatrywanemu możemy stwierdzić, że w tym przypadku funkcja Love'a musi być symetryczną funkcją względem zmiennej z . Z tego co powiedzieliśmy wynika, że na to, aby otrzymać wzory opisujące w naszym przypadku stan naprężenia (σ'_{ij}), należy we wzorach (3.8) dokonać formalnych podstawień:

	zamiast	podstawić
	$\operatorname{ch} \zeta$	$\operatorname{sh} \zeta$,
	$\operatorname{sh} \zeta$	$\operatorname{ch} \zeta$,
	A_{nm}	B_{nm} [por. (1.15)],
	β_m	γ_m [por. (1.9) i (1.14)],
(3.11)	$\sin \xi$	$\cos \xi$,
	$\cos \xi$	$\sin \xi$,
	$(-1)^{\frac{m-1}{2}}$	$(-1)^{m+1}$,
	ϑ_{nm}^2	δ_{nm}^2 [por. (1.15)].

Należy jeszcze pamiętać, że w przypadku pierwszym m przyjmowało wartości $m = 1, 3, 5, \dots$ [por. (1.9)], a w rozpatrywanym przypadku $m = 1, 2, 3, \dots$ [por. (1.14)].

Otrzymany w ten sposób stan naprężenia nie spełnia oczywiście warunków brzegowych na brzegu $r = b$. Wypadkowa naprężeń normalnych równa się zeru, ale ich działanie jest równoważne momentowi

$$(3.12) \quad M = 4\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ (1 - \nu) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_1(a_n b)}{a_n^3 b} [1 - a_n h \operatorname{ctgh}(a_n h)] + \right. \\ \left. + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_n A_{nm} h (-1)^{m+1}}{\gamma_m \delta_{nm}^2 b} J_1(a_n b) \exp(-\kappa \delta_{nm}^2 t) - \right.$$

$$-\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m A_{nm} (-1)^{m+1}}{\alpha_n^2 \delta_{nm}^2 b} J_1(\alpha_n b) \left[2(1-\nu) \alpha_n h - \frac{(3-2\nu) \alpha_n^2 h^2 - 2\nu \operatorname{sh}^2(\alpha_n h)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h) \operatorname{ch}(\alpha_n h) + \alpha_n h} \right] \exp(-\kappa \delta_{nm}^2 t) \Big\}.$$

Do stanu naprężenia (σ'_{ij}) dodajemy stan naprężenia wywołany momentem — M . Ostateczne wyrażenia na składowe naprężenia oznaczone (σ_{ij}) wynoszą, [18] i [23],

$$\sigma_{rr} = \sigma'_{rr} - \frac{3}{2} \frac{Mz}{h^3}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma'_{\varphi\varphi} - \frac{3}{2} \frac{Mz}{h^3}, \quad \sigma_{zz} = \sigma'_{zz}, \quad \sigma_{rz} = \sigma'_{rz}.$$

Przypadek 3. Podobnie jak przy wyznaczaniu pola temperatury wyznaczmy naprężenia dokonując superpozycji obu poprzednich przypadków. Wypisanie tych wzorów byłoby jedynie formalnością i dlatego nie będziemy ich tutaj przytaczać.

4. Stan przemieszczenia

Stan przemieszczenia na podstawie już wykonanych lub objaśnionych operacji jest łatwo wyznaczyć. Składowe przemieszczenia, które zależą od potencjału termosprężystego przemieszczenia, określone są na podstawie definicji [por. wzory (2.1)]. Ta część składowych przemieszczenia, która zależy od funkcji Love'a, dana jest wzorami, [12] i [20]

$$(4.1) \quad \bar{u} = -\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad \bar{w} = \frac{1}{1-2\nu} \left[2(1-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right].$$

Wypisywać będziemy od razu sumy

$$u' = \bar{u} + \bar{u}, \quad w' = \bar{w} + \bar{w}.$$

Przypadek 1. Korzystając ze wzorów (2.6) oraz (3.7) i biorąc pod uwagę (3.10) możemy wypisać następujące wzory:

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= \eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(\alpha_n r) \frac{(1-2\nu) \operatorname{ch}(\alpha_n z)}{2 \alpha_n \operatorname{ch}(\alpha_n h)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n A_{nm}}{\vartheta_{nm}^2} J_1(\alpha_n r) \cos(\beta_m z) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{nm=1}^{\infty} \frac{\beta_m A_{nm} (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\vartheta_{nm}^2 D_n} J_1(\alpha_n r) \left[(1-2\nu) \operatorname{ch}(\alpha_n z) - \frac{F_n^{(1)'}(z)}{\alpha_n} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \right\} \\ w' &= \eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) \frac{(1-\nu) \operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\alpha_n \operatorname{ch}(\alpha_n h)} - \right. \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\beta_m A_{nm}}{\vartheta_{nm}^2} J_0(a_n r) \sin(\beta_m z) \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) + \\
& + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\beta_m A_{nm} (-1)^{\frac{m-1}{2}} J_0(a_n r)}{\vartheta_{nm}^2 \operatorname{sh}(a_n h) \operatorname{ch}(a_n h) + a_n h} \{[(1-2\nu) + a_n h \operatorname{th}(a_n h)] \operatorname{sh}(a_n z) - \\
& - a_n z \operatorname{ch}(a_n z)\} \exp(-\kappa \vartheta_{nm}^2 t) \}.
\end{aligned}$$

Należy jeszcze wyznaczyć przemieszczenia u'' oraz w'' , które określone są wzorami, [23] i [20],

$$u'' = -\frac{1-\nu}{2G(1+\nu)} \frac{rN}{2h}, \quad w'' = \frac{\nu z N}{2G(1+\nu)h}.$$

Siła N określona jest wzorem (3.9).

Przypadek 2. W tym przypadku wzory mają taki sam kształt, jak w przypadku 1. Aby otrzymać poszukiwane związki należy we wzorach (4.2) z poprzedniego przypadku dokonać podstawień określonych przez (3.11). Natomiast stan przemieszczenia (u'' , w'') określony jest związkami, [23] i [20],

$$u'' = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{zr}{G} \frac{3M}{4h^3}, \quad w'' = \frac{2\nu z^2 + (1-\nu)r^2}{2G(1+\nu)} \frac{3M}{4h^3}.$$

Momenty M określone są wzorem (3.12).

Przypadek 3. Przypadek ten, podobnie jak to miało miejsce przy wyznaczaniu pola temperatury i naprężeń, można rozpatrywać jako superpozycję obu poprzednich.

Rozdział II. Rozwiązanie asymptotyczne

Podane w poprzednim rozdziale wzory są rozwiązaniem ścisłym. Krótkie spojrzenie na wszystkie wypisane wzory pozwala stwierdzić, że występujące w nich szeregi są szybko zbieżne dla większych wartości czasu. Wraz ze wzrostem czasu polepsza się ich zbieżność. W końcowej części pracy zamieszczony jest przykład liczbowy, z którego wynika, że największe naprężenia powinny mieć miejsce w warstwach powierzchniowych płyty w pierwszych chwilach procesu nagrzewania. W przypadku czasów rzędu jednej sekundy zbieżność występujących w poprzednim rozdziale szeregów jest bardzo zła. Sumując jedynie po n trzeba by uwzględniać nie mniej, niż 30 wyrazów. Numeryczne wyznaczanie wartości szeregów podwójnych jest oczywiście w tym przypadku praktycznie niemożliwe. Można tę trudność ominąć podając rozwiązanie asymptotyczne, które będzie miało zastosowanie dla małych czasów i warstw powierzchniowych (warstwy położone w głębi płyty nie są intere-

sujące, ponieważ — jak to wynika z przytoczonego przykładu liczbowego — największe naprężenia wystąpią w warstwach powierzchniowych).

Podobnie jak w poprzednim rozdziale rozważymy trzy przypadki ogrzania i odpowiadające im pola naprężeń oraz przemieszczeń. Charakter mechanicznych warunków brzegowych i sposób ich spełnienia pozostaje bez zmian.

5. Pole temperatury

Przypadek 1. Pole temperatury określone jest równaniem różniczkowym (1.1), warunkiem początkowym (1.2) oraz warunkami brzegowymi (1.3). Tak jak w poprzednim rozdziale do rozwiązania posłużymy się transformacją Laplace'a. Transformata rozwiązania wyraża się wzorem (1.6). Przepiszemy ją tutaj w postaci dogodnej dla naszych celów

$$(5.1) \quad T_L(r, z, p) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) F_{nL}(z, p), \quad F_{nL}(z, p) = \frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda h)},$$

gdzie λ określone jest zależnością (1.8).

Jak wiadomo z podstaw rachunku operatorowego, dużym wartościom parametru p odpowiadają małe wartości czasu. Mając to na uwadze posłużymy się wyrażeniem asymptotycznym dla $\operatorname{ch} \zeta$. Dla dużych argumentów ζ można napisać

$$\operatorname{ch} \zeta = \frac{e^{\zeta} + e^{-\zeta}}{2} \approx \frac{e^{|\zeta|}}{2}.$$

Tak więc, [9], mamy

$$F_{nL}(z, p) \approx \frac{1}{p} \exp[-\lambda(h - |z|)],$$

a po wykonaniu transformacji odwrotnej, [1], otrzymujemy

$$(5.2) \quad F_n(z, t) = \eta(t) \frac{1}{2} \left[e^{-a_n(h-|z|)} \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} - \sqrt{\kappa a_n^2 t} \right) + e^{+a_n(h-|z|)} \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} + \sqrt{\kappa a_n^2 t} \right) \right].$$

Tak więc poszukiwane rozwiązanie asymptotyczne dla małych czasów wyraża się wzorem

$$(5.3) \quad T(r, z, t) = \eta(t) T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) F_n(z, t).$$

Należy pamiętać, że powyższy wzór słuszny jest nie tylko dla małych czasów, ale również dla wartości z bliskich h . Tylko przy tym dodatkowym założeniu można korzystać z asymptotycznego wzoru dla $\operatorname{ch} \zeta$.

Przypadek 2. W tym przypadku pole temperatury określone jest równaniem różniczkowym (1.1), warunkiem początkowym (1.2) i warunkami brzegowymi (1.11). Transformata rozwiązania wyraża się wzorem (1.13), który dla naszych celów przepiszemy w następującej postaci:

$$(5.4) \quad T_L(r, z, p) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) H_{nL}(z, p); \quad H_{nL}(z, p) = \frac{1}{p} \frac{\text{sh}(\lambda z)}{\text{sh}(\lambda h)}.$$

Podobnie jak poprzednio transformacja odwrotna dotyczy jedynie funkcji $H_{nL}(z, p)$. Dla dużych argumentów można przyjąć

$$\text{sh } \zeta = \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{2} \approx \text{sgn}(\zeta) \frac{e^{|\zeta|}}{2},$$

a stąd wynika, że

$$H_{nL}(z, p) \approx \text{sgn}(z) \frac{1}{p} \exp[-\lambda(h - |z|)] \approx \text{sgn}(z) F_{nL}(z, p).$$

Z powyższej zależności wynika, że rozwiązanie asymptotyczne różni się od poprzedniego jedynie czynnikiem $\text{sgn}(z)$ i ma postać

$$(5.5) \quad T(r, z, t) = \eta(t) \text{sgn}(z) T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) F_n(z, t).$$

Przypadek 3. W tym przypadku rozwiązanie musi spełniać równanie (1.1), warunek początkowy (1.2) oraz warunki brzegowe (1.16). Jak wynika z porównania warunków brzegowych, rozwiązanie tego przypadku jest superpozycją obu poprzednich rozwiązań i można je zapisać w następującej postaci

$$(5.6) \quad T(r, z, t) = \eta(t) \eta(z) T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) F_n(z, t).$$

Jak wynika z własności funkcji $\text{erfc}(\zeta)$: $\text{erfc}(\infty) = 0$, $\text{erfc}(\zeta) = 1 - \text{erf}(\zeta)$, $\text{erf}(-\zeta) = -\text{erf}(\zeta)$; we wszystkich trzech przypadkach warunki początkowe i brzegowe spełnione są w sposób ścisły.

6. Stan naprężenia i przemieszczenia

W celu wyznaczenia stanu naprężenia i przemieszczenia posłużymy się tutaj nieco inną metodą od tej, którą posługiwaliśmy się w poprzednim rozdziale. Wyznamy transformaty Laplace'a składowych stanu naprężenia i przemieszczenia i dopiero wtedy wykonamy transformację odwrotną posługując się odpowiednimi przedstawieniami asymptotycznymi dla dużych parametrów p .

Transformata składowych przemieszczenia wyraża się przez transformatę potencjału termosprężystego przemieszczenia za pomocą znanych wzorów

$$(6.1) \quad \bar{u}_L = \frac{\partial \Phi_L}{\partial r}, \quad \bar{w}_L = \frac{\partial \Phi_L}{\partial z},$$

gdzie $\Phi_L(r, z, p)$ jest transformatą Laplace'a funkcji potencjału termosprężystego przemieszczenia, a \bar{u}_L i \bar{w}_L są transformatami Laplace'a przemieszczenia radialnego i osiowego.

Po uwzględnieniu wzorów (6.1) transformaty równań przemieszczeniowych teorii sprężystości sprowadzają się do jednego równania

$$(6.2) \quad \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_L}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial z^2} = \vartheta_0 T, \quad \vartheta_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu}.$$

Poszukiwać będziemy takich rozwiązań szczególnych równania (6.2), które spełnią dwa warunki: $\Phi_L(r, \pm h, p) = \Phi_L(b, z, p) = 0$.

Przypadek 1. Przypadek ten odpowiada temperaturze określonej wzorem (5.1). Poszukiwane rozwiązanie szczególne równania (6.2) jest tutaj funkcją

$$(6.3) \quad \Phi_L = \kappa \vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) Z_{nL}(z, p),$$

gdzie

$$Z_{nL}(z, p) = \frac{1}{p^2} \left[\frac{\text{ch}(\lambda z)}{\text{ch}(\lambda h)} - \frac{\text{ch}(\alpha_n z)}{\text{ch}(\alpha_n h)} \right].$$

Składowe stanu naprężenia określone za pomocą potencjału wyznacza się ze znanego związku

$$(6.4) \quad \bar{\sigma}_{ijL} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial i \partial j} - \nabla^2 \Phi_L \delta_{ij} \right), \quad i, j = r, z.$$

Wypisane kolejno transformaty składowych naprężenia mają postać

$$(6.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{rrL} = -2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[J_0(\alpha_n r) Z''_{nL}(z, p) - \frac{\alpha_n}{r} J_1(\alpha_n r) Z_{nL}(z, p) \right], \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi L} = -2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ J_0(\alpha_n r) [Z''_{nL}(z, p) - \alpha_n^2 Z_{nL}(z, p)] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_n}{r} J_1(\alpha_n r) Z_{nL}(z, p) \right\}, \\ \bar{\sigma}_{zzL} = 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) Z_{nL}(z, p), \\ \bar{\sigma}_{rzL} = -2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha_n J_1(\alpha_n r) Z'_{nL}(z, p). \end{array} \right.$$

gdzie

$$Z'_{nL}(z, p) = \frac{1}{p^2} \left[\lambda \frac{\text{sh}(\lambda z)}{\text{ch}(\lambda h)} - \alpha_n \frac{\text{sh}(\alpha_n z)}{\text{ch}(\alpha_n h)} \right],$$

$$Z''_{nL}(z, p) = \frac{1}{p^2} \left[\lambda^2 \frac{\text{ch}(\lambda z)}{\text{ch}(\lambda h)} - \alpha_n^2 \frac{\text{ch}(\alpha_n z)}{\text{ch}(\alpha_n h)} \right].$$

Zgodnie z definicją funkcji potencjału transformaty składowych stanu przemieszczenia wyrażają się następująco:

$$(6.6) \quad \begin{cases} \bar{u}_L = -\kappa \vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha_n J_1(\alpha_n r) Z_{nL}(z, p), \\ \bar{w}_L = \kappa \vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) Z'_{nL}(z, p). \end{cases}$$

Stan naprężenia powinien spełniać na powierzchniach $z = \pm h$ dwa warunki brzegowe

$$\sigma_{zzL}(r, \pm h, p) = 0 \quad \text{oraz} \quad \bar{\sigma}_{rzL}(r, \pm h, p) = 0.$$

Składowe stanu naprężenia określone potencjałem spełniają jedynie pierwszy z tych warunków. W celu spełnienia drugiego warunku dodamy stan naprężenia ($\bar{\sigma}_{ijL}$), który określa funkcja Love'a spełniająca równanie biharmoniczne. Składowe stanu naprężenia określone są wzorami (3.4). Występującą w tych wzorach funkcję Love'a φ uważać będziemy za transformatę Laplace'a i przyjmujemy ją w postaci

$$\varphi_L(r, z, p) = \kappa \vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n M_{nL}(z, p) J_0(\alpha_n r),$$

gdzie

$$M_{nL}(z, p) = C_{nL} \text{sh}(\alpha_n z) + D_{nL} \alpha_n z \text{ch}(\alpha_n z).$$

Stałe C_{nL} i D_{nL} wyznaczamy z warunków brzegowych przy $z = \pm h$. Otrzymujemy

$$(6.7) \quad \begin{cases} C_{nL} = (1 - 2\nu) [(1 - 2\nu) - \alpha_n h \text{th}(\alpha_n h)] C_n K_{nL}(p), \\ D_{nL} = (1 - 2\nu) C_n K_{nL}(p), \end{cases}$$

gdzie

$$C_n = [\alpha_n^2 \{ \alpha_n h + [1 - \alpha_n h \text{th}(\alpha_n h)] \text{th}(\alpha_n h) \} \text{ch}(\alpha_n h)]^{-1},$$

$$K_{nL} = \frac{1}{p^2} [\lambda \text{th}(\lambda h) - \alpha_n \text{th}(\alpha_n h)].$$

Mając na uwadze transformację odwrotną, funkcję Love'a napiszemy ostatecznie w postaci

$$(6.8) \quad \varphi_L(r, z, p) = \kappa \vartheta_0 T_0 (1 - 2\nu) \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n J_0(a_n r) \{a_n z \operatorname{ch}(a_n z) + [(1 - 2\nu) - a_n h \operatorname{th}(a_n h)] \operatorname{sh}(a_n z)\} K_{nL}(p).$$

Wypisywanie sumy stanów naprężenia ($\bar{\sigma}_{ijL}$) i ($\bar{\bar{\sigma}}_{ijL}$) nie prowadzi do uproszczeń wzorów i wobec tego stan naprężenia ($\bar{\bar{\sigma}}_{ijL}$) wypiszemy oddzielnie:

$$(6.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_{rrL} &= 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n a_n^3 \left\{ \left[J_0(a_n r) - \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \right] H_n(z) + \right. \\ &\quad \left. + 2\nu J_0(a_n r) \operatorname{ch}(a_n z) \right\} K_{nL}(p), \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi L} &= 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n a_n^3 \left\{ \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} H_n(z) + \right. \\ &\quad \left. + \left[2\nu J_0(a_n r) + \frac{J_1(a_n r)}{a_n r} \right] \operatorname{ch}(a_n z) \right\} K_{nL}(p), \\ \bar{\sigma}_{zzL} &= -2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n a_n^3 J_0(a_n r) [H_n(z) - \\ &\quad - (1 - 2\nu) \operatorname{ch}(a_n z)] K_{nL}(p), \\ \bar{\sigma}_{rzL} &= 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n a_n^3 J_1(a_n r) \left[\frac{1}{a_n} H'_n(z) - \right. \\ &\quad \left. - (1 - 2\nu) \operatorname{sh}(a_n z) \right] K_{nL}(p), \end{aligned} \right.$$

gdzie

$$H_n(z) = [(1 - 2\nu) - a_n h \operatorname{th}(a_n h)] \operatorname{ch}(a_n z) + a_n z \operatorname{sh}(a_n z).$$

Suma znalezionych składowych dwóch stanów naprężenia spełnia warunki na powierzchniach $z = \pm h$ w sposób ścisły, ale nie spełnia warunków na brzegu $r = b$. Warunki te spełnimy w sposób całkowity. Składowa $\sigma'_{rzL}(b, z, p)$ daje wypadkową równą zeru, ale składowa normalna ma wypadkową różną od zera i równą

$$(6.10) \quad N_L = \int_{-h}^h \sigma'_{rrL}(b, z, p) dz = -4G\kappa\vartheta_0 T_0 \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(a_n b) P_{nL}(p),$$

gdzie

$$P_{nL}(p) = \frac{1}{p^2} \left[G_n \left(\frac{\lambda}{a_n} - 1 \right) \operatorname{th}(a_n h) + \frac{\lambda^2 - a_n^2}{\lambda a_n} \operatorname{th}(\lambda h) \right],$$

$$G_n = \frac{[2a_n h \operatorname{th}(a_n h) - (1 + 2\nu)] \operatorname{th}(a_n h)}{a_n h + [1 - a_n h \operatorname{th}(a_n h)] \operatorname{th}(a_n h)}.$$

Tak samo jak w rozdziale pierwszym przyjmujemy, że siły N rozłożone są równomiernie na całej grubości płyty i odpowiedni stan naprężenia opisany jest wzorami

$$\sigma''_{rrL} = -\frac{N_L}{2h}, \quad \sigma''_{\varphi\varphi L} = -\frac{N_L}{2h}, \quad \sigma''_{zzL} = \sigma''_{rzL} = 0.$$

Przejdziemy obecnie do wyznaczenia transformat stanu przemieszczenia. Transformata stanu przemieszczenia określona potencjałem wyraża się następująco:

$$(6.11) \quad \begin{cases} \bar{u}_L = -\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(a_n r) Z_{nL}(z, p), \\ \bar{w}_L = \kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) Z_{nL}(z, p). \end{cases}$$

Transformaty składowych przemieszczenia wyrażone za pomocą funkcji Love'a określone są wzorami (4.1) i można je zapisać jak następuje:

$$(6.12) \quad \begin{cases} \bar{u}_L = \kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n a_n^2 J_1(a_n r) [H_n(z) + \operatorname{ch}(a_n z)] K_{nL}(p), \\ \bar{w}_L = -\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n a_n J_0(a_n r) [H'_n(z) - (3-4\nu) a_n \operatorname{sh}(a_n z)] K_{nL}(p). \end{cases}$$

W celu zachowania przyjętych w pierwszym rozdziale oznaczeń, składowe przemieszczenia odpowiadające równomiernemu ściskaniu oznaczymy i wyrazimy następująco:

$$(6.13) \quad u'' = -\frac{1-\nu}{2G(1+\nu)} \frac{rN_L}{2h}, \quad w'' = \frac{\nu z N_L}{2G(1+\nu)h}.$$

Po odpowiednim zsumowaniu znajdziemy poszukiwane transformaty składowych stanu naprężenia i przemieszczenia. Pozostaje jedynie wykonać transformację odwrotną. W każdym ze wzorów wydzielony został czynnik, który podlega transformacji. Tak więc transformacja odwrotna sprowadza się do przetransformowania tych czynników. Podobnie jak to miało miejsce w przypadku temperatury, ograniczamy się przy odwracaniu transformacji jedynie do małych czasów. Przy tym założeniu występujące we wzorach kombinacje funkcji hiperbolicznych sprowadzają się do następujących postaci

$$\frac{\operatorname{ch}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda h)} \approx e^{-\lambda(h-|z|)}, \quad \frac{\operatorname{sh}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda h)} \approx \operatorname{sgn}(z) e^{-\lambda(h-|z|)}, \quad \operatorname{th}(\lambda h) \approx 1.$$

Wypiszemy obecnie transformaty czynników podlegających transformacji ograniczając się do małych czasów:

$$\begin{aligned}
 Z_{nL}(z, p) &\approx \frac{1}{p^2} \left[e^{-\lambda(h-|z|)} - \frac{\text{ch}(a_n z)}{\text{ch}(a_n h)} \right] \doteq 2t \left[e^{-a_n(h-|z|)} \times \right. \\
 &\quad \times i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} - a_n \sqrt{\kappa t} \right) + e^{a_n(h-|z|)} \times \\
 &\quad \left. \times i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} + a_n \sqrt{\kappa t} \right) \right] - t \frac{\text{ch}(a_n z)}{\text{ch}(a_n h)}, \\
 Z'_{nL}(z, p) &\approx \frac{1}{p^2} \left[\operatorname{sgn}(z) \lambda e^{-\lambda(h-|z|)} - a_n \frac{\text{sh}(a_n z)}{\text{ch}(a_n h)} \right] \doteq - \\
 &\quad - a_n t \frac{\text{sh}(a_n z)}{\text{ch}(a_n h)} + \operatorname{sgn}(z) \frac{1}{2\kappa a_n} \left[e^{-a_n(h-|z|)} \times \right. \\
 &\quad \times \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} - a_n \sqrt{\kappa t} \right) - e^{a_n(h-|z|)} \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} + a_n \sqrt{\kappa t} \right) \left. \right] + \\
 &\quad + \operatorname{sgn}(z) 2a_n t \left[e^{-a_n(h-|z|)} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} - a_n \sqrt{\kappa t} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + e^{a_n(h-|z|)} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} + a_n \sqrt{\kappa t} \right) \right], \\
 Z''_{nL}(z, p) &\approx \frac{1}{p^2} \left[\lambda^2 e^{-\lambda(h-|z|)} - a_n^2 \frac{\text{ch}(a_n z)}{\text{ch}(a_n h)} \right] \doteq 2a_n^2 t \left[e^{-a_n(h-|z|)} \times \right. \\
 &\quad \times i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} - a_n \sqrt{\kappa t} \right) + e^{a_n(h-|z|)} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} + a_n \sqrt{\kappa t} \right) \left. \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{2\kappa} \left[e^{-a_n(h-|z|)} \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} - a_n \sqrt{\kappa t} \right) + e^{a_n(h-|z|)} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} + a_n \sqrt{\kappa t} \right) \right] - a_n^2 t \frac{\text{ch}(a_n z)}{\text{ch}(a_n h)}, \\
 K_{nL}(p) &\approx \frac{1}{p^2} [\lambda - a_n \operatorname{th}(a_n h)] \doteq a_n t [\operatorname{erf}(a_n \sqrt{\kappa t}) - \operatorname{th}(a_n h)] + \\
 &\quad + \frac{1}{2\kappa a_n} \operatorname{erf}(a_n \sqrt{\kappa t}) + \sqrt{t/\pi\kappa} e^{-\kappa a_n^2 t}, \\
 P_{nL}(p) &\approx \frac{1}{p^2} \left[G_n \left(\frac{\lambda}{a_n} - 1 \right) \operatorname{th}(a_n h) + \frac{\lambda^2 - a_n^2}{\lambda a_n} \right] \doteq \frac{1}{\kappa a_n^2} \operatorname{erf}(a_n \sqrt{\kappa t}) + \\
 &\quad + G_n \left[t \operatorname{erf}(a_n \sqrt{\kappa t}) + \frac{1}{2\kappa a_n^2} \operatorname{erf}(a_n \sqrt{\kappa t}) + \sqrt{\frac{t}{\pi\kappa a_n^2}} e^{-\kappa a_n^2 t} - t \right] \operatorname{th}(a_n h),
 \end{aligned}$$

gdzie znak \doteq oznacza zastąpienie transformaty odpowiadającą jej funkcją.

Po podstawieniu w miejsce transformat ich odpowiedników otrzymamy poszukiwane rozwiązania asymptotyczne.

Przypadek 2. Porównując pola temperatur w przypadku 1 i 2 możemy stwierdzić, że transformaty funkcji potencjału i funkcji Love'a będą mieć taką samą budowę jak w przypadku 1. Różnica będzie się zaznaczać jedynie w funkcji zależnej od z i p . Jeśli we wzorze (6.3), na miejsce funkcji $Z_{nL}(z, p)$ podstawić funkcję

$$(6.15) \quad S_{nL}(z, p) = \frac{1}{p^2} \left[\frac{\text{sh}(\lambda z)}{\text{sh}(\lambda h)} - \frac{\text{sh}(a_n z)}{\text{sh}(a_n h)} \right],$$

to otrzymamy odpowiadającą naszemu przypadkowi funkcję potencjału. Z tego wynika, że na to, aby otrzymać wzory określające stan naprężenia za pomocą funkcji potencjału i funkcji Love'a, należy we wzorach (6.5) i (6.6) zamiast transformat odwrotnych $Z_{nL}(z, p)$, $Z'_{nL}(z, p)$, $Z''_{nL}(z, p)$ i $K_{nL}(p)$ podstawić retransformaty funkcji określonych przez (6.15). Proces ten sprowadza się do prostych podstawień we wzorach (6.14). Przy funkcjach błędu i funkcjach wykładniczych na miejsce współczynników:

$$(6.16) \quad \begin{array}{cc} \text{zamiast} & \text{podstawić} \\ 1 & \text{sgn}(z), \\ \text{sgn}(z) & 1, \end{array}$$

a na miejsce funkcji hiperbolicznych

$$(6.17) \quad \begin{array}{cc} \text{zamiast} & \text{podstawić} \\ \text{ch}(\zeta) & \text{sh}(\zeta), \\ \text{sh}(\zeta) & \text{ch}(\zeta), \\ \text{th}(\zeta) & \text{cth}(\zeta). \end{array}$$

Podstawienia te nie dotyczą jedynie funkcji $P_{nL}(p)$. Naprężenia $\sigma'_{rrL}(b, z, p)$ tworzą na brzegu wypadkową równą zero, ale dają moment równy

$$(6.18) \quad M_L = \int_{-h}^h \sigma'_{rrL}(b, z, p) z dz = 4G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_1(a_n b)}{a_n b} U_{nL}(p),$$

gdzie

$$U_{nL}(p) = \frac{1}{p^2} \left\{ \lambda h \text{cth}(\lambda h) \left[\frac{E_n [2(1-\nu) a_n h + 1]}{a_n h} - \frac{p}{\kappa \lambda^2} \right] - \frac{a_n^2}{\lambda^2} + 1 + \right. \\ \left. + E_n [(1-2\nu) - 2a_n h \text{cth}(a_n h)] \right\}.$$

Transformata tej funkcji dla małych czasów ma postać

$$(6.19) \quad U_{nL}(p) \doteq E_n \left\{ [2(1-\nu) a_n h + 1] \left[t \text{erfc}(a_n \sqrt{\kappa t}) + \frac{1}{2\kappa a_n^2} \text{erfc}(a_n \sqrt{\kappa t}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{t}{\pi \kappa a_n^2}} e^{-\kappa a_n^2 t} \right] + t [(1-2\nu) - 2a_n h \text{cth}(a_n h)] \right\} - \\ - \frac{a_n h}{\kappa a_n^2} \text{erf}(a_n \sqrt{\kappa t}) + \frac{1}{\kappa a_n^2} (1 - e^{-\kappa a_n^2 t}),$$

gdzie

$$E_n = \frac{1 - a_n h \operatorname{cth}(a_n h)}{a_n h + [1 - a_n h \operatorname{cth}(a_n h)] \operatorname{cth}(a_n h)}$$

Jak wiadomo, składowe stanu naprężenia wyrażają się przez moment wzorami

$$\sigma''_{rr} = \sigma''_{\varphi\varphi} = -\frac{3zM}{2h^3}, \quad \sigma''_{zz} = \sigma''_{rz} = 0,$$

a składowe przemieszczenia

$$u = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{3zrM}{4Gh^3}, \quad w = \frac{3M}{4h^3} \frac{2\nu z^2 + (1-\nu)r^2}{2G(1+\nu)}$$

Przypadek 3. Przypadek ten, jak wiadomo, jest superpozycją obu poprzednich. Wypisanie odpowiednich wzorów nie sprawia trudności.

Rozdział III. Rozwiązanie w przypadku ogólnych warunków brzegowych

W rozdziale tym omówimy przypadek, w którym przez pobocznice przepływa strumień ciepła (prawo Newtona). Taki warunek brzegowy prowadzi do tzw. zagadnienia brzegowego Fouriera drugiego rodzaju. W naszym przypadku, w układzie współrzędnych walcowych, rozwiązanie wyrazi się za pomocą szeregów Diniego, [27].

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach rozważymy trzy przypadki odpowiadające trzem różnym termicznym warunkom brzegowym na powierzchniach $z = \pm h$.

7. Pole temperatury

Przypadek 1. Pole temperatury określone jest równaniem (1.1), warunkiem początkowym (1.2) oraz warunkami brzegowymi

$$(7.1) \quad \begin{cases} T = \begin{cases} T_0 f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a \text{ oraz } z = \pm h; \\ 0, & \text{jeśli } a < r < b \text{ oraz } z = \pm h; \end{cases} \\ \frac{\partial T}{\partial r} + hT = 0, & \text{jeśli } r = b. \end{cases}$$

Posługując się transformacją Laplace'a sprowadzamy zagadnienie do rozwiązania równania (1.4) z warunkami brzegowymi

$$(7.2) \quad \begin{cases} T_L = \begin{cases} T_0 \frac{1}{p} f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a \text{ oraz } z = \pm h; \\ 0, & \text{jeśli } a < r < b \text{ oraz } z = \pm h; \end{cases} \\ \frac{\partial T_L}{\partial r} + hT_L = 0, & \text{jeśli } r = b. \end{cases}$$

Rozwiązanie równania (1.4) przyjmijmy w postaci szeregu Diniego, [27]

$$(7.3) \quad T_L(r, z, p) = \frac{T_0}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n J_0(a_n r) \frac{\text{ch}(\lambda z)}{\text{ch}(\lambda h)},$$

w którym \bar{A}_n jest współczynnikiem rozwinięcia w szereg Diniego funkcji $T_L(r, \pm h, p)$, tj.

$$(7.4) \quad T_L(r, \pm h, p) = \frac{T_0}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n J_0(a_n r)$$

i równa się, [27],

$$\bar{A}_n = \frac{2}{b^2 [J_0^2(a_n b) + J_1^2(a_n b)]} \int_0^a r f(r) J_0(a_n r) dr,$$

podczas gdy liczby a_n są pierwiastkami równania

$$(7.5) \quad a J_1(ab) + h J_0(ab) = 0.$$

Wykonując transformację odwrotną stwierdzamy, że otrzymany wynik ma taką samą postać jak wzór (1.10) i różni się jedynie współczynnikiem rozwinięcia w szereg, na miejscu A_n występuje współczynnik \bar{A}_n

$$(7.6) \quad T(r, z, t) = \eta(t) T_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n J_0(a_n r) \frac{\text{ch}(a_n z)}{\text{ch}(a_n h)} - \sum_{n, m=1}^{\infty} \bar{A}_{nm} J_0(a_n r) \cos(\beta_m z) \exp[-\kappa \theta_{nm}^2 t] \right\}, \quad m = 1, 3, 5, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

W przypadku szczególnym, gdy $f(r) = 1$, otrzymujemy następujące wartości współczynników

$$\bar{A}_n = \frac{2a J_1(a_n a)}{a_n b^2 [J_0^2(a_n b) + J_1^2(a_n b)]}, \quad \bar{A}_{nm} = \frac{2\beta_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{h \theta_{nm}^2} \bar{A}_n.$$

Podany w tym rozdziale wzór (7.6) jest ogólniejszy od wzoru (1.10). Przyjmując w równaniu (7.5) $h = 0$ otrzymamy przypadek izolacji termicznej na powierzchni $r = b$, a w przypadku $h = \infty$ otrzymamy przypadek opisany wzorem (1.10).

Przypadek 2 i 3. Przypadki te różnią się od takich samych z rozdziału I tylko warunkiem brzegowym na poboczniczy $r = b$. Warunek ten jest wypisany na poprzedniej stronie.

Przeprowadzając takie samo rozumowanie jak w przypadku pierwszym stwierdzimy, że pola temperatur opisane są wzorami (1.15) oraz (1.17), w których na miejsce A_n należy jedynie podstawić \bar{A}_n wiedząc, że liczby a_n określone są równaniem (7.5).

8. Stan naprężenia i przemieszczenia

Stan naprężenia i przemieszczenia odpowiadający określönemu w poprzednim paragrafie polu temperatury można otrzymać natychmiast posługując się odpowiednimi wzorami z rozdziału I. Z rozważań podanych w poprzednim paragrafie wynika, że wystarczy podstawić w nich \bar{A}_n na miejsce A_n .

9. Rozwiązania asymptotyczne

Podane w rozdziale II rozwiązania asymptotyczne dotyczą jedynie małych czasów i funkcji zależnej od zmiennej z . Współczynniki rozwinięcia w szereg są takie same w rozdziale I jak i w rozdziale II. Fakt czy rozwiązanie jest asymptotyczne, czy ściśle, nie wpływa na postać współczynników rozwinięcia w szereg. Można więc stwierdzić, że rozwiązania asymptotyczne, odpowiadające określönym w poprzednim paragrafie polom temperatur, wyrażą się wzorami podanymi w rozdziale II, w których należy jedynie na miejsce A_n podstawić \bar{A}_n , a na miejsce a_n podstawić \bar{a}_n określone równaniem (7.5).

Rozdział IV. Rozwiązanie dla przypadku warunków termicznych typu Neumanna

Jednym z możliwych z technicznego punktu widzenia jest przypadek izolacji termicznej na powierzchniach $z = \pm h$. Taki przypadek rozważymy w tym rozdziale. W celu otrzymania rozwiązania ogólniejszego można by na pobocznicę przyjąć termiczny warunek brzegowy taki, jak w poprzednim rozdziale. Jak wiadomo z poprzedniego rozdziału, przyjęcie takiego czy też innego warunku na pobocznicę wpływa jedynie na postać współczynników rozwinięcia w szereg. Z tego powodu w celu otrzymania prostszego zapisu ograniczymy się do warunku brzegowego na pobocznicę w postaci przyjętej w dwóch pierwszych rozdziałach.

10. Pole temperatury

Przypadek I. Podobnie jak w rozdziałach poprzednich ten przypadek odpowiada polu temperatury symetrycznemu względem płaszczyzny $z = 0$. Pole temperatury opisane jest równaniem (1.1), warunkiem początkowym (1.2) oraz warunkami brzegowymi:

$$(10.1) \quad \begin{cases} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \begin{cases} \pm \frac{Q}{2} f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a \quad \text{oraz } z = \pm h; \\ 0, & \text{jeśli } a < r < b \quad \text{oraz } z = \pm h; \\ T = 0, & \text{jeśli } r = a. \end{cases} \end{cases}$$

Posługując się transformacją Laplace'a otrzymujemy równanie (1.4), którego rozwiązanie musi spełniać przetransformowane warunki brzegowe (1.1)

$$(10.2) \quad \begin{cases} \lambda \frac{\partial T_L}{\partial z} = \begin{cases} \pm \frac{Q}{2p} f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a \quad \text{oraz } z = \pm h; \\ 0, & \text{jeśli } a < r < b \quad \text{oraz } z = \pm h; \end{cases} \\ T_L = 0, & \text{jeśli } r = a. \end{cases}$$

Rozwiązanie ma postać

$$T_L(r, z, p) = \frac{Q}{2p} \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \operatorname{ch}(\lambda z)}{\lambda \operatorname{sh}(\lambda h)} J_0(a_n r),$$

gdzie A_n są współczynnikami rozwinięcia w szereg Fouriera-Bessela funkcji $f(r)$.

Wykonując transformację odwrotną otrzymujemy wzór

$$(10.3) \quad T(r, z, t) = \frac{Q}{2\lambda} \eta(t) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(a_n r) \frac{\operatorname{ch}(a_n z)}{a_n \operatorname{sh}(a_n h)} - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{B_{nm}}{\gamma_m} J_0(a_n r) \cos(\gamma_m z) \exp(-\kappa \delta_{nm}^2 t) \right\},$$

gdzie A_n i B_{nm} oraz γ_m są takie same jak w rozdziale I.

Przypadek 2. Przypadek ten odpowiadać będzie antysymetrycznemu polu temperatury. Rozwiązanie będzie więc opisane równaniem (1.1), którego rozwiązanie musi spełniać warunek początkowy (1.2) i warunki brzegowe

$$(10.4) \quad \begin{cases} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \begin{cases} \frac{Q}{2} f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a \quad \text{oraz } z = \pm h; \\ 0, & \text{jeśli } a < r < b \quad \text{oraz } z = \pm h; \end{cases} \\ T = 0, & \text{jeśli } r = b. \end{cases}$$

Posługując się jak poprzednio transformacją Laplace'a znajdziemy

$$(10.5) \quad T(r, z, t) = \frac{Q}{2\lambda} \eta(t) \left\{ A_n J_0(a_n r) \frac{\operatorname{sh}(a_n z)}{a_n \operatorname{ch}(a_n h)} - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{A_{nm}}{\beta_m} J_0(a_n r) \sin(\beta_m z) \exp(-\kappa \delta_{nm}^2 t) \right\},$$

gdzie A_n , A_{nm} oraz β_m są takie same jak w rozdziale I.

Przypadek 3. Ten przypadek odpowiada ekspozycji ciepła jedynie na płaszczyźnie $z = h$. Jego rozwiązanie opisuje równanie (1.1) z warunkiem początkowym (1.2) oraz warunkami brzegowymi

$$(10.6) \quad \begin{cases} -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \begin{cases} \frac{Q}{2} f(r), & \text{jeśli } 0 < r < a \text{ oraz } z = h; \\ 0, & \text{jeśli } a < r < b \text{ oraz } z = h; \end{cases} \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0, & \text{jeśli } z = -h; \\ T = 0, & \text{jeśli } r = b. \end{cases}$$

Jak wynika z porównania warunków brzegowych (10.6) z warunkami (10.4) oraz (10.1), rozwiązanie, podobnie jak w rozdziale I, jest superpozycją obu poprzednich rozwiązań.

11. Pole temperatury (rozwiązania asymptotyczne)

Przypadek 1. Na stronie 141 podana jest transformata rozwiązania w przypadku symetrycznego pola temperatury. Korzystając z rozwinięcia asymptotycznego, odnoszącego się do dużych wartości parametru p (co zostało omówione w rozdziale II), otrzymamy

$$\frac{1}{p\lambda} \frac{\operatorname{ch}(\lambda z)}{\operatorname{sh}(\lambda h)} \approx \frac{1}{p\lambda} \exp[-\lambda(h - |z|)] = F_{n1L}(z, p).$$

Wykonując transformację odwrotną otrzymanej zależności znajdujemy, [1],

$$(11.1) \quad F_{n1L}(z, p) = \frac{1}{p\lambda} e^{-\lambda(h - |z|)} \frac{\eta(t)}{2\alpha_n} \left[e^{-\alpha_n(h - |z|)} \operatorname{erfc} \left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} - \alpha_n \sqrt{\kappa t} \right) - e^{-\alpha_n(h - |z|)} \operatorname{erfc} \left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} + \alpha_n \sqrt{\kappa t} \right) \right].$$

Tak więc jeśli we wzorze (5.3) na miejsce funkcji $F_n(z, t)$ podstawić funkcję $F_{n1}(z, t)$, to otrzymamy poszukiwane rozwiązanie. Należy jeszcze dodać, że funkcja $F_{n1}(z, t)$ jest całką względem zmiennej z funkcji $F_n(z, t)$.

Przypadek 2. Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy omawiając przypadek 1, rozwiązanie w przypadku 2 opisane jest wzorem (5.5), w którym na miejscu $F_n(z, t)$ wystąpi funkcja $F_{n1}(z, t)$.

Przypadek 3. Przypadek ten jest superpozycją obu poprzednich przypadków i rozwiązanie opisane jest wzorem (5.6), w którym na miejscu funkcji $F_n(z, t)$ występuje funkcja $F_{n1}(z, t)$.

Uwaga. Związek między $F_{n1}(z, t)$ i $F_n(z, t)$ w postaci całki

$$(11.2) \quad F_{n1}(z, t) = \int_h^z F_n(\zeta, t) d\zeta$$

trzeba będzie wykorzystać przy omawianiu sposobu wyznaczenia pola przemieszczeń i naprężeń.

12. Stan naprężenia i przemieszczenia

O ile porównamy wzory opisujące pola temperatur w rozdziale I i w obecnym, to okaże się, że ich budowa jest taka sama i że różnią się między sobą jedynie współczynnikami. Z tego można wyciągnąć wniosek, że to samo będzie dotyczyć wzorów opisujących stan naprężenia i przemieszczenia. Korzystając z tego wniosku można podać wzory odpowiadające otrzymanym w tym rozdziale polom temperatur dokonując we wzorach podanych w rozdziale pierwszym jedynie prostych podstawień.

Przypadek 1. Porównanie wzorów opisujących pola temperatur (1.10) i (1.3) pozwala stwierdzić, że na to, aby otrzymać poszukiwane składowe stanu naprężenia i przemieszczenia, trzeba w odpowiednich wzorach z rozdziału I, p. 3, przypadek 1, dokonać następujących podstawień:

zamiast	podstawić	
		$T_0 \quad \frac{Q}{2\lambda}$
(12.1)	$\beta_m, \vartheta_{nm}^2$	$\gamma_m, \delta_{nm}^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$
	A_{nm}	$\frac{B_{nm}}{\gamma_m};$

a w szeregach pojedynczych, w mianownikach zamiast $ch(a_n h)$ podstawić $a_n \operatorname{sh}(a_n h)$.

Przypadek 2. We wzorach omówionych w rozdziale I, p. 3, przypadek 2, należy wykonać następujące podstawienia:

zamiast	podstawić	
		$T_0 \quad \frac{Q}{2\lambda}$
(12.2)	γ_m, δ_{nm}^2	$\beta_m, \vartheta_{nm}^2, \quad m = 1, 3, 5, \dots,$
	B_{nm}	$\frac{A_{nm}}{\beta_m};$

a w szeregach pojedynczych, w mianownikach zamiast $\operatorname{sh}(a_n h)$ podstawić $a_n \operatorname{ch}(a_n h)$.

Przypadek 3. Przypadek ten jest oczywiście superpozycją obu poprzednich.

13. Stan naprężenia i przemieszczenia (rozwiązania asymptotyczne)

Na to, aby korzystając ze wzorów podanych w rozdziale II otrzymać wzory opisujące stan naprężenia i przemieszczenia w rozpatrywanym przypadku, możliwe są dwie drogi. Pierwsza droga, to całkowanie względem zmiennej z transformat rozwiązania i następnie wykonanie transformacji odwrotnej. Druga droga, to całkowanie względem zmiennej z retransformaty [por. wzór (2.2)]. Transformacja jest operacją liniową, a więc obie drogi są sobie równoważne.

CZĘŚĆ II. PLYTA PROSTOKĄTNA

Rozdział V. Rozwiązanie ścisłe

14. Pole temperatury

Przypadek 1. Pole temperatury określone jest równaniem różniczkowym

$$(14.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

warunkiem początkowym

$$(14.2) \quad T(x, y, z, 0) = 0$$

oraz warunkami brzegowymi

$$(14.3) \quad \begin{cases} T(x, y, \pm h, t) = \begin{cases} T_0 f(x, y) & \text{na obszarze } \Gamma (0 < x < a, 0 < y < b), \\ 0 & \text{na powierzchni } P - \Gamma, \end{cases} \\ T(0, y, z, t) = T(y, z, t) = 0, \\ T(x, 0, z, t) = T(x, b, z, t) = 0, \end{cases}$$

gdzie $f(x, y)$ oznacza funkcję określoną na obszarze $\Gamma \subset P$ i spełniającą warunki Dirichleta.

W celu rozwiązania równania (14.1) posłużymy się transformacją Laplace'a, [22] i [25]. Po wykonaniu transformacji równanie (14.1) przyjmuje postać

$$(14.4) \quad \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_L}{\partial z^2} - q^2 T_L = 0,$$

a warunki brzegowe (1.3)

$$(14.5) \quad \begin{cases} T_L(x, y, \pm h, p) = \begin{cases} T_0 f(x, y)/p & \text{na obszarze } \Gamma, \\ 0 & \text{na powierzchni } P - \Gamma, \end{cases} \\ T_L(0, y, z, p) = T_L(a, y, z, p) = 0, \\ T_L(x, 0, z, p) = T_L(x, b, z, p) = 0. \end{cases}$$

Jeśli funkcję $f(x, y)$ rozwinąć w podwójny szereg trygonometryczny

$$(14.6) \quad f(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

w którym A_{mn} oznaczają współczynniki rozwinięcia w podwójny szereg Fouriera, $\alpha_m = m\pi/a$, $\beta_n = n\pi/b$, to rozwiązanie równania (14.4) można podać w następującej postaci:

$$T_L(x, y, z, p) = \frac{T_0}{p} \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{\text{ch}(az)}{\text{ch}(ah)},$$

gdzie $a^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2 + q^2$.

Mianownik rozwiązania posiada miejsca zerowe w punktach $p = 0$, $p = -\kappa(\alpha_m^2 + \beta_n^2 + \gamma_k^2)$, gdzie γ_k są pierwiastkami równania przestępnego

$$(14.7) \quad \cos(\gamma h) = 0, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{2h}, \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

Miejsca zerowe mianownika są biegunami pierwszego rodzaju i wykonując transformację odwrotną otrzymujemy

$$(14.8) \quad T(x, y, z, t) = \eta(t) T_0 \left\{ \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{\text{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\text{ch}(\vartheta_{mn} h)} - \sum_{m, n, k=1}^{\infty} A_{mnk} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \cos(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \right\},$$

gdzie

$$\vartheta_{nm}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2, \quad A_{mnk} = \frac{2A_{mn} \gamma_k (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{h(\gamma_k^2 + \vartheta_{nm}^2)}.$$

Gdy $t \rightarrow \infty$, otrzymujemy stacjonarne pole temperatury podane w pracy [20]

$$(14.9) \quad T(x, y, z) = T_0 \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{\text{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\text{ch}(\vartheta_{mn} h)}.$$

Przypadek 2. W tym przypadku pole temperatury opisane jest równaniem (14.1), warunkiem początkowym (14.2) i następującymi warunkami brzegowymi:

$$(14.10) \quad \begin{cases} T(x, y, \pm h, t) = \begin{cases} \pm T_0 f(x, y) & \text{na obszarze } I, \\ 0 & \text{na powierzchni } P - I, \end{cases} \\ T(0, y, z, t) = T(a, y, z, t) = 0, \\ T(x, 0, z, t) = T(x, b, z, t) = 0. \end{cases}$$

Jak wynika z wypisanych warunków brzegowych pole temperatury jest antysymetryczne względem płaszczyzny $z = 0$ i dlatego na miejscu ch ζ wystąpi $\text{sh } \zeta$. Postępując w dalszym ciągu tak jak poprzednio otrzymujemy rozwiązanie w następującej postaci:

$$(14.11) \quad T(x, y, z, t) = \eta(t) T_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{\text{sh}(\vartheta_{mn} z)}{\text{sh}(\vartheta_{mn} h)} - \sum_{m,n,p=1}^{\infty} B_{mnp} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \sin(\omega_p z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2)t] \right\},$$

gdzie

$$B_{mnp} = \frac{2A_{mn} \omega_p (-1)^p}{h(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2)},$$

a liczby ω_p są pierwiastkami równania przestępnego

$$(14.12) \quad \sin(\omega h) = 0, \quad \omega_p = \frac{p\pi}{h}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Pozostałe oznaczenia, jak w przypadku 1.

Gdy $t \rightarrow \infty$, otrzymujemy rozwiązanie podane w pracy [20]:

$$(14.13) \quad T(x, y, z) = T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{\text{sh}(\vartheta_{mn} z)}{\text{sh}(\vartheta_{mn} h)}.$$

Przypadek 3. W tym przypadku ogrzewana jest jedynie powierzchnia $z = h$ i pole temperatury określone jest równaniem (14.1), warunkiem początkowym (14.2) oraz warunkami brzegowymi:

$$(14.14) \quad \begin{cases} T(x, y, h, t) = \begin{cases} T_0 f(x, y) \text{ na obszarze } \Gamma, \\ 0 \text{ na powierzchni } P - \Gamma, \end{cases} \\ T(x, y, -h, t) = 0, \\ T(0, y, z, t) = T(a, y, z, t) = 0, \\ T(x, 0, z, t) = T(x, b, z, t) = 0. \end{cases}$$

Jak wynika z wypisanych warunków brzegowych, poszukiwane rozwiązanie jest superpozycją obu poprzednich przypadków i wyraża się następującym wzorem:

$$(14.15) \quad T(x, y, z, t) = \eta(t) T_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{\text{sh}[\vartheta_{mn}(z+h)]}{\text{sh}(2\vartheta_{mn} h)} - \frac{1}{2} \sum_{m,n,k=1}^{\infty} A_{mnk} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \cos(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] - \frac{1}{2} \sum_{m,n,p=1}^{\infty} B_{mnp} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \sin(\omega_p z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2)t] \right\}.$$

Gdy $t \rightarrow \infty$, powyższe rozwiązanie przechodzi w znane rozwiązanie stacjonarne, [20],

$$(14.16) \quad T(x, y, z) = T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{\text{sh} [\vartheta_{mn} (z+h)]}{\text{sh} (2\vartheta_{mn} h)}.$$

15. Potencjał termosprężystego przemieszczenia

Posługując się funkcją potencjału termosprężystego przemieszczenia [por. (2.1)] równania Lamego sprowadza się do jednego równania

$$(15.1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \vartheta_0 T_0, \quad \vartheta_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T.$$

Poszukiwać będziemy takich rozwiązań szczególnych tego równania, aby było $\Phi = 0$ w płaszczyznach $z = \pm h$ oraz na powierzchniach $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ i $y = b$. Poszukiwane rozwiązania mają postać następującą:

Przypadek 1

$$(15.2) \quad \Phi(x, y, z, t) = \eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{Z_{mn}(z)}{2\vartheta_{mn}^2 \text{ch}(\vartheta_{mn} h)} + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{A_{mnk}}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \cos(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \right\},$$

gdzie

$$Z_{mn}(z) = \vartheta_{mn} z \text{sh}(\vartheta_{mn} z) - \vartheta_{mn} h \text{th}(\vartheta_{mn} h) \text{ch}(\vartheta_{mn} z).$$

Przypadek 2

$$(15.3) \quad \Phi(x, y, z, t) = \eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{S_{mn}(z)}{2\vartheta_{mn}^2 \text{sh}(\vartheta_{mn} h)} + \sum_{m,n,p=1}^{\infty} \frac{B_{mnp}}{\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \sin(\omega_p z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2)t] \right\},$$

gdzie

$$S_{mn}(z) = \vartheta_{mn} z \text{ch}(\vartheta_{mn} z) - \vartheta_{mn} h \text{cth}(\vartheta_{mn} h) \text{sh}(\vartheta_{mn} z).$$

Przypadek 3. Ten przypadek jest superpozycją obu poprzednich i wyraża się połową sumy funkcji (15.2) i (15.3)

$$(15.4) \quad \Phi(x, y, z, t) = \eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{Q_{mn}(z)}{2\vartheta_{mn}^2 \text{sh}(2\vartheta_{mn} h)} + \frac{1}{2} \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{A_{mnk}}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \cos(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] + \frac{1}{2} \sum_{m,n,p=1}^{\infty} \frac{B_{mnp}}{\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \sin(\omega_p z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2)t] \right\},$$

gdzie

$$Q_{mn}(z) = \text{sh}(\vartheta_{mn} h) Z_{mn}(z) + \text{ch}(\vartheta_{mn} h) S_{mn}(z).$$

16. Stan naprężenia

Stan naprężenia określony potencjałem wyznacza się ze wzoru (3.1).

Dążyć będziemy do tego, aby na powierzchniach $z = \pm h$ spełnione były ściśle następujące warunki brzegowe:

$$(16.1) \quad \sigma_{zz}(x, y, \pm h, t) = 0, \quad \tau_{xz}(x, y, \pm h, t) = \tau_{yz}(x, y, \pm h, t) = 0.$$

Stan naprężenia określony potencjałem nie spełnia tych warunków; w celu ich spełnienia dodamy składowe stanu naprężenia ($\bar{\sigma}_{ij}$), który określimy za pomocą funkcji Galerkina φ , spełniającej jak wiadomo równanie biharmoniczne

$$(16.2) \quad \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0.$$

Składowe stanu naprężenia wyrażone przez tę funkcję określone są związkami, [20],

$$(16.3) \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{2G}{1-2\nu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\delta_{ij} \nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial i \partial j} \right) + (1-\nu) \nabla^2 \left(\delta_{iz} \frac{\partial}{\partial j} + \delta_{jz} \frac{\partial}{\partial i} \right) \right] \varphi, \quad i, j = x, y, z.$$

Składowe stanu naprężenia otrzymane za pomocą potencjału i funkcji Galerkina spełniają warunki na powierzchniach $z = \pm h$; oznaczmy je $\sigma'_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}$.

Do spełnienia pozostają jeszcze warunki na brzegach: $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ oraz $y = b$. Warunki mechaniczne na tych brzegach spełnimy w sposób całkowity, a składowe nowego stanu naprężenia, które trzeba dodać, aby te warunki spełnić, oznaczmy (σ''_{ij}).

Tak więc, stan naprężenia spełniający warunki na powierzchniach $z = \pm h$ w sposób ścisły, a na pozostałych w sposób przybliżony, wyraża się sumą (σ_{ij}) = (σ'_{ij}) + (σ''_{ij}).

Przypadek 1. Korzystając ze wzorów (3.1) oraz (15.3) znajdujemy

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= \eta(t) 2GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{Z_{mn}(z) \beta_n^2 - Z'_{mn}(z)}{2\vartheta_{mn}^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 + \gamma_k^2}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \cos(\gamma_k z) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \right\}, \\ \bar{\sigma}_{yy} &= \eta(t) 2GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \frac{Z_{mn}(z) \alpha_m^2 - Z'_{mn}(z)}{2\vartheta_{mn}^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 + \gamma_k^2}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \cos(\gamma_k z) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 (16.3.1) \quad \bar{\sigma}_{zz} &= 2\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) \frac{Z_{mn}(z)}{2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 + \beta_n^2}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) \cos(\gamma_k z) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \right\}, \\
 \bar{\tau}_{xy} &= 2\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(a_m x) \cos(\beta_n y) \frac{\alpha_m \beta_n Z_{mn}(z)}{2\vartheta_{mn}^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_n}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \cos(a_m x) \cos(\beta_n y) \cos(\gamma_k z) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \right\}, \\
 \bar{\tau}_{yz} &= 2\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(a_m x) \cos(\beta_n y) \frac{\beta_n Z'_{mn}(z)}{2\vartheta_{mn}^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\beta_n \gamma_k}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \sin(a_m x) \cos(\beta_n y) \sin(\gamma_k z) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \right\}, \\
 \bar{\tau}_{xz} &= 2\eta(t) GT_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(a_m x) \sin(\beta_n y) \frac{\alpha_m Z'_{mn}(z)}{2\vartheta_{mn}^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)} - \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\alpha_m \gamma_k}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \cos(a_m x) \sin(\beta_n y) \sin(\gamma_k z) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \right\}.
 \end{aligned}$$

Wypisane wyżej składowe stanu naprężenia nie spełniają warunków brzegowych na powierzchniach $z = \pm h$. Celem spełnienia tych warunków dodajemy składowe takiego stanu naprężenia ($\bar{\sigma}_{ij}$), określonego funkcją Galerkina, który pozwala na ich spełnienie. Funkcję Galerkina spełniającą równanie biharmoniczne przyjmujemy w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 (16.4) \quad \varphi &= \eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) M_{mn}(z) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} A_{mnk} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) N_{mnk}(z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie funkcje $M_{mn}(z)$ oraz $N_{mnk}(z)$ przyjmuje się w postaci

$$M_{mn}(z) = C_{mn}^{(1)} \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z) + C_{mn}^{(2)} \vartheta_{mn} z \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z),$$

$$N_{mnk}(z) = D_{mnk}^{(1)} \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z) + D_{mnk}^{(2)} \vartheta_{mn} z \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z).$$

Stałe całkowania $C_{mn}^{(1)}$, $C_{mn}^{(2)}$, $D_{mnk}^{(1)}$ i $D_{mnk}^{(2)}$ wyznaczamy z warunku brzegowego dla $z = \pm h$ (3.1). Otrzymujemy

$$(16.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{mn}^{(1)} = [(1 - 2\nu) - \vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] C_{mn}^{(2)}, \\ C_{mn}^{(2)} = \frac{1 - 2\nu}{2\vartheta_{mn}^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)}, \\ D_{mnk}^{(1)} = [(1 - 2\nu) - \vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] D_{mnk}^{(2)}, \\ D_{mnk}^{(2)} = -\frac{\gamma_k (1 - 2\nu) (-1)^{k-1} \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)}{\vartheta_{mn}^2 (\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2) [\operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h) \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h) + \vartheta_{mn} h]} = \\ = -(1 - 2\nu) \bar{D}_{mnk}^{(2)}. \end{array} \right.$$

Dodając do siebie składowe stanu naprężenia $(\bar{\sigma}_{ij})$ oraz $(\bar{\sigma}_{ij})$ określone wzorem (16.3) otrzymujemy składowe stanu naprężenia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_{xx} = -2G\eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ (1 - \nu) \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) \times \right. \\ \quad \times \frac{\beta_n^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\vartheta_{mn}^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)} - \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 + \gamma_k^2}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) \times \\ \quad \times \cos(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} A_{mnk} \bar{D}_{mnk}^{(2)} \vartheta_{mn} \sin(a_m x) \times \\ \quad \times \sin(\beta_n y) [2\nu \vartheta_{mn}^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z) + \alpha_m^2 G_{mn}^{(1)}(z)] \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \left. \right\}, \\ \sigma'_{yy} = -2G\eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ (1 - \nu) \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) \times \right. \\ \quad \times \frac{\alpha_m^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\vartheta_{mn}^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)} - \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 + \gamma_k^2}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) \times \\ \quad \times \cos(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} A_{mnk} \bar{D}_{mnk}^{(2)} \vartheta_{mn} \sin(a_m x) \times \\ \quad \times \sin(\beta_n y) [2\nu \vartheta_{mn}^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z) + \beta_n^2 G_{mn}^{(1)}(z)] \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \left. \right\}, \\ \sigma'_{zz} = 2G\eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 + \beta_n^2}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) \times \right. \end{array} \right.$$

(16.6)

$$\begin{aligned}
& \times \cos(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] - \sum_{m,n,k=1}^{\infty} A_{mnk} \bar{D}_{mnk}^{(2)} \vartheta_{mn}^3 \sin(\alpha_m x) \times \\
& \quad \times \sin(\beta_n y) G_{mn}^{(3)}(z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \Big\}, \\
\tau'_{xy} = & -2G\eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ (1-\nu) \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \times \right. \\
& \times \frac{\alpha_m \beta_n \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\vartheta_{mn}^2 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)} - \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_n}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \times \\
& \times \cos(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] - \sum_{m,n,k=1}^{\infty} A_{mnk} \bar{D}_{mnk}^{(2)} \alpha_m \beta_n \vartheta_{mn} \times \\
& \quad \times \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) G_{mn}^{(1)}(z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \Big\}, \\
\tau'_{yz} = & -2G\eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\beta_n \gamma_k}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \times \right. \\
& \times \sin(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} A_{mnk} \bar{D}_{mnk}^{(2)} \beta_n \vartheta_{mn}^2 \times \\
& \quad \times \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) G_{mn}^{(2)}(z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \Big\}, \\
\tau'_{xz} = & -2G\eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\alpha_m \gamma_k}{\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2} A_{mnk} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \times \right. \\
& \times \sin(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} A_{mnk} \bar{D}_{mnk}^{(2)} \alpha_m \vartheta_{mn}^2 \times \\
& \quad \times \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) G_{mn}^{(2)}(z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \Big\},
\end{aligned}$$

w których przyjęto następujące oznaczenia:

$$G_{mn}^{(1)}(z) = [2(1-\nu) - \vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z) + \vartheta_{mn} z \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z),$$

$$G_{mn}^{(2)}(z) = [1 - \vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z) + \vartheta_{mn} z \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z),$$

$$G_{mn}^{(3)}(z) = \vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h) \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z) - \vartheta_{mn} z \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z).$$

Wypisane wyżej składowe stanu naprężenia (σ'_{ij}) spełniają w sposób ścisły warunki brzegowe na powierzchniach $z = \pm h$. Należy jeszcze spełnić warunki na powierzchniach: $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ oraz $y = b$. Warunki brzegowe na tych powierzchniach spełnimy w sposób całkowity.

Widoczne jest, że na brzegach $x = 0$ i $x = a$ oraz $y = 0$ i $y = b$ znikają naprężenia normalne σ'_{xx} i σ'_{yy} ; pozostają natomiast naprężenia styczne σ'_{xy} , τ'_{yz} i τ'_{xz} , z których naprężenia τ'_{xy} tworzą wypadkową siłę styczną

$$(16.7) \quad Q = -4G\eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ (1-\nu) \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(a_m x) \cos(\beta_n y) \frac{\alpha_m \beta_n}{\vartheta_{mn}^3} \times \right. \\ \times \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h) - \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_n}{(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2) \gamma_k} A_{mnk} \cos(a_m x) \cos(\beta_n y) (-1)^{\frac{k-1}{2}} \times \\ \times \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2) t] - \sum_{m,n,k=1}^{\infty} A_{mnk} D_{mnk}^{(2)} \alpha_m \beta_n \cos(a_m x) \cos(\beta_n y) \times \\ \left. \times [(1-2\nu) \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h) \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h) + \vartheta_{mn} h] \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2) t] \right\}.$$

Podstawiając do funkcji (16.7) kolejno $x=0$, $x=a$, $y=0$ oraz $y=b$, otrzymamy wypadkowe siły stycznych występujące na brzegach płyty. Wypadkowe te oczywiście są różne od zera. Dla wyeliminowania tych sił stycznych posłużymy się następującym sposobem. Do składowych stanu (σ'_{ij}) dodamy składowe stanu (σ''_{ij}) odnoszące się do grubej płyty w stanie izotermicznym. Mianowicie na brzegu $x=0$ przyłożymy siły styczne $-Q(0, y)/2h$, na brzegu $x=a$ siły styczne $-Q(a, y)/2h$, na brzegu $y=0$ siły $-Q(x, 0)/2h$, wreszcie na brzegu $y=b$ siły $-Q(x, b)/2h$. Siły te wywołają w płycie płaski stan naprężenia scharakteryzowany wielkościami σ''_{xx} , σ''_{yy} i τ''_{xy} . Dodanie składowych stanu naprężenia (σ'_{ij}) do składowych stanu (σ''_{ij}) określa stan (σ_{ij}) , w którym spełnione będą warunki brzegowe w płaszczyznach $z = \pm h$ w sposób ścisły, a w pozostałych płaszczyznach ograniczających płytę w sposób przybliżony. Przystąpimy obecnie do wyznaczenia stanu naprężenia (σ_{ij}) .

Stan naprężenia (σ_{ij}) jest płaskim stanem naprężenia i w celu wyznaczenia jego składowych należy rozwiązać równanie Airy'ego

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$(16.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{Q}{2h} = 0, & \text{jeśli } x = 0 & \text{oraz } x = a; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{Q}{2h} = 0, & \text{jeśli } y = 0 & \text{oraz } y = b. \end{cases}$$

Funkcję F obieramy w postaci sumy dwóch szeregów

$$(16.9) \quad F = \frac{4G\eta(t) T_0 \vartheta_0}{h} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(a_m x)}{a_m^2} [A_m^{(1)} \operatorname{sh}(a_m y) + A_m^{(2)} a_m y \operatorname{ch}(a_m y) + \right. \\ \left. + A_m^{(3)} a_m y \operatorname{sh}(a_m y)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n y)}{\beta_n^2} [B_n^{(1)} \operatorname{sh}(\beta_n x) + B_n^{(2)} \beta_n x \operatorname{ch}(\beta_n x) + \right. \\ \left. + B_n^{(3)} \beta_n x \operatorname{sh}(\beta_n x)] \right\}.$$

Warunki brzegowe (16.8) prowadzą do układu równań:

$$\begin{aligned}
 & A_m^{(1)} \operatorname{sh}(\alpha_m b) + A_m^{(2)} \alpha_m b \operatorname{ch}(\alpha_m b) + A_m^{(3)} \alpha_m b \operatorname{sh}(\alpha_m b) = 0, \\
 & B_n^{(1)} \operatorname{sh}(\beta_n a) + B_n^{(2)} \beta_n a \operatorname{ch}(\beta_n a) + B_n^{(3)} \beta_n a \operatorname{sh}(\beta_n a) = 0, \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^{(1)} + A_m^{(2)}] \cos(\alpha_m x) + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n^{(3)} \operatorname{sh}(\beta_n x) + (B_n^{(1)} + B_n^{(2)}) \operatorname{ch}(\beta_n x) + \\
 & \quad + B_n^{(2)} \beta_n x \operatorname{sh}(\beta_n x) + B_n^{(3)} \beta_n x \operatorname{ch}(\beta_n x)] = \\
 & = -(1 - \nu) \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \cos(\alpha_m x) + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} (\bar{A}_{mnk} + \bar{A}_{mnk}) \cos(\alpha_m x), \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^{(3)} \operatorname{sh}(\alpha_m b) + (A_m^{(1)} + A_m^{(2)}) \operatorname{ch}(\alpha_m b) + A_m^{(2)} \alpha_m b \operatorname{sh}(\alpha_m b) + \\
 & + A_m^{(3)} \alpha_m b \operatorname{ch}(\alpha_m b)] \cos(\alpha_m x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [B_n^{(3)} \operatorname{sh}(\beta_n x) + (B_n^{(1)} + B_n^{(2)}) \times \\
 & \quad \times \operatorname{ch}(\beta_n x) + B_n^{(2)} \beta_n x \operatorname{sh}(\beta_n x) + B_n^{(3)} \beta_n x \operatorname{ch}(\beta_n x)] = \\
 & = -(1 - \nu) \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \cos(\alpha_m x) (-1)^n + \\
 & \quad + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} (\bar{A}_{mnk} + \bar{A}_{mnk}) \cos(\alpha_m x) (-1)^n, \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^{(3)} \operatorname{sh}(\alpha_m y) + (A_m^{(1)} + A_m^{(2)}) \operatorname{ch}(\alpha_m y) + A_m^{(2)} \alpha_m y \operatorname{sh}(\alpha_m y) + \\
 & \quad + A_m^{(3)} \alpha_m y \operatorname{ch}(\alpha_m y)] + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^{(1)} + B_n^{(2)}) \cos(\beta_n y) = \\
 & = -(1 - \nu) \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \cos(\beta_n y) + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} (\bar{A}_{mnk} + \bar{A}_{mnk}) \cos(\beta_n y), \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^{(3)} \operatorname{sh}(\alpha_m y) + (A_m^{(1)} + A_m^{(2)}) \operatorname{ch}(\alpha_m y) + A_m^{(2)} \alpha_m y \operatorname{sh}(\alpha_m y) + \\
 & + A_m^{(3)} \alpha_m y \operatorname{ch}(\alpha_m y)] (-1)^m + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n^{(3)} \operatorname{sh}(\beta_n a) + (B_n^{(1)} + B_n^{(2)}) \operatorname{ch}(\beta_n a) + \\
 & \quad + B_n^{(2)} \beta_n a \operatorname{sh}(\beta_n a) + B_n^{(3)} \beta_n a \operatorname{ch}(\beta_n a)] \cos(\beta_n y) = \\
 & = -(1 - \nu) \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \cos(\beta_n y) + \sum_{m,n,k=1}^{\infty} (\bar{A}_{mnk} + \bar{A}_{mnk}) \cos(\beta_n y),
 \end{aligned}
 \tag{16.10}$$

w których

$$\bar{A}_{mn} = A_{mn} \frac{\alpha_m \beta_n}{\vartheta_{mn}^3} \text{th} (\vartheta_{mn} h),$$

$$\bar{A}_{mnk} = A_{mnk} \frac{\alpha_m \beta_n (-1)^{k-1}}{(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2) \gamma_k} \exp [-\kappa (\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2) t],$$

$$\bar{\bar{A}}_{mnk} = A_{mnk} \bar{D}_{mnk}^{(2)} [(1 - 2\nu) \text{sh} (\vartheta_{mn} h) \text{ch} (\vartheta_{mn} h) + \vartheta_{mn} h] \exp [-\kappa (\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2) t].$$

Wyrażamy następujące funkcje szeregami trygonometrycznymi

$$\text{ch} (\beta_n x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_{nm}^{(1)} \cos (\alpha_m x), \quad \beta_n x \text{sh} (\beta_n x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_{nm}^{(2)} \cos (\alpha_m x),$$

$$\text{sh} (\beta_n x) + \beta_n x \text{ch} (\beta_n x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_{nm}^{(3)} \cos (\alpha_m x) + \frac{E_n^{(3)}}{2},$$

$$\text{ch} (\alpha_m y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{(1)} \cos (\beta_n y), \quad \alpha_m y \text{sh} (\alpha_m y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{(2)} \cos (\beta_n y),$$

$$\text{sh} (\alpha_m y) + \alpha_m y \text{ch} (\alpha_m y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{(3)} \cos (\beta_n y) + \frac{F_m^{(3)}}{2},$$

gdzie

$$(16.11) \left\{ \begin{array}{l} E_{nm}^{(1)} = \frac{2\beta_n \text{sh} (\beta_n a)}{a \vartheta_{mn}^2} (-1)^m, \\ E_{nm}^{(2)} = \frac{2\beta_n}{a \vartheta_{mn}^2} \left[\beta_n a \text{ch} (\beta_n a) + \frac{\alpha_m^2 - \beta_n^2}{\vartheta_{mn}^2} \text{sh} (\beta_n a) \right] (-1)^m, \\ \frac{E_n^{(3)}}{2} = \text{sh} (\beta_n a), \\ E_{nm}^{(3)} = \frac{2\beta_n}{a \vartheta_{mn}^2} \left[2\alpha_m^2 \frac{(-1)^m \text{ch} (\beta_n a) - 1}{\vartheta_{mn}^2} + \beta_n a \text{sh} (\beta_n a) (-1)^m \right], \\ F_{mn}^{(1)} = \frac{2\alpha_m \text{sh} (\alpha_m b)}{b \vartheta_{mn}^2} (-1)^n, \\ F_{mn}^{(2)} = \frac{2\alpha_m}{b \vartheta_{mn}^2} \left[\alpha_m b \text{ch} (\alpha_m b) + \frac{\beta_n^2 - \alpha_m^2}{\vartheta_{mn}^2} \text{sh} (\alpha_m b) \right] (-1)^n, \\ \frac{F_m^{(3)}}{2} = \text{sh} (\alpha_m b), \\ F_{mn}^{(3)} = \frac{2\alpha_m}{b \vartheta_{mn}^2} \left[2\beta_n^2 \frac{(-1)^n \text{ch} (\alpha_m b) - 1}{\vartheta_{mn}^2} + \alpha_m b \text{sh} (\alpha_m b) (-1)^n \right]. \end{array} \right.$$

Gdy uwzględnimy powyższe wyniki, układ równań (16.10) sprowadzi się do następującego:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m b} \{A_m^{(1)} \operatorname{sh}(\alpha_m b) + A_m^{(2)} \alpha_m b \operatorname{ch}(\alpha_m b) + \tilde{A}_{mn} [A_m^{(1)} \operatorname{sh}(\alpha_m b) + A_m^{(2)} \alpha_m b]\} + \\
 & \quad + B_n^{(1)} + B_n^{(2)} = -(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} + \sum_{m,k=1}^{\infty} (\bar{A}_{mnk} + \bar{\bar{A}}_{mnk}), \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m b} \{A_m^{(1)} \operatorname{sh}(\alpha_m b) + A_m^{(2)} \alpha_m b \operatorname{ch}(\alpha_m b) + \tilde{A}_{mn} [A_m^{(1)} \operatorname{sh}(\alpha_m b) + \\
 & \quad + A_m^{(2)} \alpha_m b]\} (-1)^m - \frac{B_n^{(1)} \operatorname{sh}(\beta_n a) + B_n^{(2)} \beta_n^2 a^2}{\beta_n a \operatorname{sh}(\beta_n a)} = -(1-\nu) \times \\
 (16.12) & \quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} (-1)^m + \sum_{m,k=1}^{\infty} (\bar{A}_{mnk} + \bar{\bar{A}}_{mnk}) (-1)^m, \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n a} \{B_n^{(1)} \operatorname{sh}(\beta_n a) + B_n^{(2)} \beta_n a \operatorname{ch}(\beta_n a) + \tilde{B}_{mn} [B_n^{(1)} \operatorname{sh}(\beta_n a) + B_n^{(2)} \beta_n a]\} + \\
 & \quad + A_m^{(1)} + A_m^{(2)} = -(1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{mn} + \sum_{n,k=1}^{\infty} (\bar{A}_{mnk} + \bar{\bar{A}}_{mnk}), \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n a} \{B_n^{(1)} \operatorname{sh}(\beta_n a) + B_n^{(2)} \beta_n a \operatorname{ch}(\beta_n a) + \tilde{B}_{nm} [B_n^{(1)} \operatorname{sh}(\beta_n a) + \\
 & \quad + B_n^{(2)} \beta_n a]\} (-1)^n - \frac{A_m^{(1)} \operatorname{sh}(\alpha_m b) + A_m^{(2)} \alpha_m^2 b^2}{\alpha_m b \operatorname{sh}(\alpha_m b)} = \\
 & \quad = -(1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} (-1)^n + \sum_{n,k=1}^{\infty} (\bar{A}_{mnk} + \bar{\bar{A}}_{mnk}) (-1)^n,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\tilde{A}_{mn} = \frac{4\alpha_m \beta_n^2 [1 - (-1)^n \operatorname{ch}(\alpha_m b)]}{b\vartheta_{mn}^4 \operatorname{sh}(\alpha_m b)}, \quad \tilde{B}_{mn} = \frac{4\beta_n \alpha_m^2 [1 - (-1)^m \operatorname{ch}(\beta_n a)]}{a\vartheta_{mn}^4 \operatorname{sh}(\beta_n a)}.$$

Otrzymaliśmy tutaj nieskończony układ równań. Ograniczając się do r wyrazów szeregów (16.12) napiszemy $4r$ równań. Rozwiązanie ich daje współczynniki $A_m^{(1)}, \dots, B_n^{(2)}$, które wstawione do funkcji naprężeń (16.9) pozwolą na przybliżone wyznaczenie naprężeń dodatkowych σ'_{ij} .

Należy dodać, że poszukiwane współczynniki zależą od czasu. Po prawej stronie równości (16.12) występują szeregi podwójne, zbieżność wzrasta wraz ze wzrostem czasu. Dla małych czasów szeregi te są wolno zbieżne, a to wpływa bezpośrednio na liczbę wyrazów r w układzie równań. Otrzymany układ równań jest więc niewygodny, gdy trzeba obliczać współczynniki odpowiadające małym wartościom czasu. Z tych względów w następnym rozdziale podane będzie rozwiązanie asymptotyczne, odpowiadające małym wartościom czasu.

Przypadek 2. Zgodnie z przyjętą numeracją, rozpatrywany przypadek odpowiada antysymetrycznemu polu temperatury, opisanemu wzorem (14.11). Wzory opisujące stan naprężenia (σ'_{ij}) mają taką samą budowę, jak wzory (16.6) i na to, aby otrzymać odpowiadające temu przypadkowi składowe stanu naprężenia σ'_{ij} wystarczy we wzorach (16.6) dokonać następujących podstawień:

	zamiast	podstawić
	ch ζ	sh ζ ,
	sh ζ	ch ζ ,
	th ζ	cth ζ ,
	cth ζ	th ζ ,
(16.13)	A_{mnk}	B_{mnp} [por. (1.11)],
	γ_k	ω_p [por. (1.12)],
	$\sin(\gamma_k z)$	$\cos(\omega_p z)$,
	$\cos(\gamma_k z)$	$\sin(\omega_p z)$,
	$(-1)^{\frac{k-1}{2}}$	$(-1)^{p+1}$.

Otrzymany w ten sposób stan naprężenia nie spełnia oczywiście warunków brzegowych na powierzchniach $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ i $y = b$. Naprężenia styczne

$$\begin{aligned} \tau'_{xy} = & -2G\eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ (1-\nu) \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \frac{\alpha_m \beta_n \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z)}{\vartheta_{mn}^2 \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h)} - \right. \\ & - \sum_{m,n,p=1}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_n}{\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2} B_{mnp} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \sin(\omega_p z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2)t] - \\ & \left. - \sum_{m,n,p=1}^{\infty} B_{mnp} \bar{E}_{mnp} \alpha_m \beta_n \vartheta_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) H_{mn}(z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2)t] \right\} \end{aligned}$$

tworzą wypadkową równą zero, ale względem płaszczyzny $z = 0$ tworzą moment skręcający

$$(16.14) \quad M = -4G\eta(t) T_0 \vartheta_0 \left\{ (1-\nu) \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \times \right. \\ \times \frac{\alpha_m \beta_n [\vartheta_{mn} h \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h) - \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h)]}{\vartheta_{mn}^2 \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h)} - \sum_{m,n,p=1}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_n h}{(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2) \omega_p} B_{mnp} \cos(\alpha_m x) \times \\ \times \cos(\beta_n y) (-1)^p \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2)t] - \\ \left. - \sum_{m,n,p=1}^{\infty} B_{mnp} \bar{E}_{mnp} \alpha_m \beta_n \vartheta_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \bar{H}_{mn}(h) \times \right. \\ \left. \times \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2)t] \right\},$$

gdzie oznaczono:

$$\bar{E}_{mnp} = \frac{\omega_p (-1)^{p+1} \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h)}{\vartheta_{mn}^2 (\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2) [\operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h) \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h) + \vartheta_{mn} h]}, \\ H_{mn}(z) = [2(1-\nu) - \vartheta_{mn} h \operatorname{cth}(\vartheta_{mn} h)] \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z) + \vartheta_{mn} z \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z), \\ \bar{H}_{mn}(h) = \frac{1}{2} \int_{-h}^h z H_{mn}(z) dz = \\ = \frac{(1-2\nu) [\vartheta_{mn} h \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h) - \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h)] \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h) - \vartheta_{mn}^2 h^2}{\vartheta_{mn}^2 \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h)}$$

Dla usunięcia naprężeń τ_{xy} występujących na pionowych brzegach płyty należy do składowych stanu naprężenia (σ'_{ij}) dodać składowe stanu naprężenia (σ''_{ij}) .

Rozważmy płytę prostokątną w stanie izotermicznym. Niech na jej brzegach pionowych działają momenty skręcające, określone wzorem (16.14). Stan naprężenia wywołany działaniem tych momentów skręcających jest stanem naprężenia $-(\sigma'_{ij})$. Działanie momentów skręcających na brzegu możemy zastąpić działaniem sił tnących, rozłożonych w sposób liniowy wzdłuż wysokości płyty. Tak więc na brzegu $x = 0$ przyłożymy poziome siły tnące $-3zM(0, y)/2h^3$, na brzegu $x = a$ siłę tnącą $-3zM(a, y)/2h^3$, na brzegu $y = 0$ $-3zM(x, 0)/2h^3$ i wreszcie na brzegu $y = b$ przyłożymy siłę tnącą $-3zM(x, b)/2h^3$. Rozważymy cienką tarczę prostokątną o grubości jednostkowej, obciążonej na brzegu $x = 0$ siłą tnącą $-3M(0, y)/2h^2$, na brzegu $x = a$, siłą tnącą $-3M(a, y)/2h^2$ itd. W tarczy powstanie stan naprężenia (σ''_{ij}) . Stan naprężenia (σ'_{ij}) otrzymamy z relacji $(\sigma''_{ij}) = z(\sigma'_{ij})/h$. Dodanie do siebie składowych stanu (σ'_{ij}) i (σ''_{ij}) określa w wyniku stan naprężenia (σ_{ij}) , w którym w sposób ścisły spełnione są warunki mechaniczne na brzegach $z = \pm h$ i w sposób przybliżony na brzegach pionowych płyty. Tutaj

przy wyznaczeniu stanu ($\sigma_{ij}^{(0)}$) mamy do czynienia, podobnie jak w poprzednim przypadku, z zagadnieniem tarczowym, prowadzącym do omówionego już nieskończonego układu równań.

Podobnie jak w przypadku 1, funkcję Airy'ego F obieramy w postaci sumy dwóch szeregów

$$(16.15) \quad F = \frac{6G\eta(t) T_0 \vartheta_0}{h^2} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_m x)}{\alpha_m^2} [\bar{A}_m^{(1)} \operatorname{sh}(\alpha_m y) + \bar{A}_m^{(2)} \alpha_m y \operatorname{ch}(\alpha_m y) + \bar{A}_m^{(3)} \alpha_m y \operatorname{sh}(\alpha_m y)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n y)}{\beta_n^2} [\bar{B}_n^{(1)} \operatorname{sh}(\beta_n x) + \bar{B}_n^{(2)} \beta_n x \operatorname{ch}(\beta_n x) + \bar{B}_n^{(3)} \beta_n x \operatorname{sh}(\beta_n x)] \right\}.$$

Funkcja F musi spełniać następujące warunki brzegowe:

$$(16.16) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{3M}{2h^2} = 0, & \text{jeśli } x = 0 \text{ oraz } x = a; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{3M}{2h^2} = 0, & \text{jeśli } y = 0 \text{ oraz } y = b. \end{cases}$$

Warunki brzegowe (16.16) prowadzą do układu równań, który różni się od układu (16.10) jedynie współczynnikami. Należy więc w układzie (16.10) dokonać następujących podstawień:

zamiast podstawić

$$A_m, \dots, B_n \quad \bar{A}_m, \dots, \bar{B}_n \quad [\text{por. (16.9) i (16.15)}],$$

$$\bar{A}_{mn} \quad \bar{A}_{mn} = A_{mn} \frac{\alpha_m \beta_n [\vartheta_{mn} h \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h) - \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h)]}{\vartheta_{mn}^2 \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h)}$$

$$(16.17) \quad \text{[por. (16.14)],}$$

$$\bar{A}_{mnp} \quad \bar{B}_{mnp} = B_{mnp} \frac{\alpha_m \beta_n h (-1)^p}{(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2) \omega_p} \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2) t]$$

$$\text{[por. (16.14); sumowanie } p = 1, 2, \dots],$$

$$\bar{A}_{mnp} \quad \bar{B}_{mnp} = B_{mnp} \bar{E}_{mnp} \bar{H}_{mn}(h) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2) t]$$

$$\text{[por. (16.14); sumowanie } p = 1, 2, \dots].$$

Jeśli wyrazimy odpowiednio funkcje hiperboliczne szeregami trygonometrycznymi według funkcji $\cos \zeta$, to układ równań, z którego wyznacza się współczynniki $\bar{A}_m^{(1)}, \dots, \bar{B}_n^{(3)}$, sprowadzi się do układu o postaci (16.12), w którym należy dokonać podstawień (16.17).

Przypadek 3. Przypadek ten odpowiada funkcji temperatury opisanej wzorem (14.15) i, podobnie jak temperatura, jest superpozycją obu poprzednich przypadków.

Rozdział VI. Rozwiązanie asymptotyczne

Szeregi, występujące we wzorach podanych w rozdziale V, są szybko zbieżne dla dużych wartości czasu. Dla małych czasów szeregi są wolno zbieżne. Szczególnie kłopotliwym staje się wtedy rozwiązanie nieskończonych układów równań. Aby ominąć tę trudność posłużymy się rozwiązaniem asymptotycznym, które mieć będzie zastosowanie dla małych czasów i warstw powierzchniowych.

Podobnie jak w poprzednim rozdziale rozważymy trzy przypadki ogrzania i odpowiadające im pola naprężeń. Charakter mechanicznych warunków brzegowych oraz sposób ich spełnienia pozostaje bez zmian.

17. Pole temperatury

Przypadek 1. Pole temperatury określone jest równaniem różniczkowym (14.1), warunkiem początkowym (14.2) oraz warunkami brzegowymi (14.3). Do rozwiązania tego zagadnienia posługujemy się transformacją Laplace'a. Transformata rozwiązania podana jest w poprzednim rozdziale, ale przepiszemy ją tutaj w postaci dogodnej dla naszych celów:

$$(17.1) \quad T_L(x, y, z, p) = T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) F_{mnL}(z),$$

gdzie

$$F_{mnL}(z) = \frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch}(az)}{\operatorname{ch}(ah)}, \quad a^2 = \vartheta_{mn}^2 + q^2.$$

Posługując się wzorem asymptotycznym, omówionym w rozdziale II części pierwszej, dla dużych parametrów p otrzymujemy związek

$$F_{mnL}(z) \approx \frac{1}{p} \exp[-a(h - |z|)],$$

a po wykonaniu transformacji odwrotnej, [1], otrzymujemy

$$(17.2) \quad F_{mn}(z, t) = \frac{1}{2} \eta(t) \left\{ \exp[-\vartheta_{mn}(h - |z|)] \operatorname{erfc} \left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} - \sqrt{\kappa \vartheta_{mn}^2 t} \right) + \right. \\ \left. + \exp[\vartheta_{mn}(h - |z|)] \operatorname{erfc} \left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} + \sqrt{\kappa \vartheta_{mn}^2 t} \right) \right\}.$$

Tak więc poszukiwane rozwiązanie asymptotyczne dla małych czasów wyraża się wzorem

$$(17.3) \quad T(x, y, z, t) = \eta(t) T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) F_{mn}(z, t).$$

Zgodnie z tym co powiedzieliśmy w rozdziale II części pierwszej należy pamiętać, że powyższy wzór jest słuszny nie tylko dla małych czasów, ale również dla wartości z bliskich h . Tylko przy tym dodatkowym założeniu wzór (17.3) jest słuszny.

Przypadek 2. W tym przypadku pole temperatury określone jest równaniem różniczkowym (14.1), warunkiem początkowym (14.2) oraz warunkami brzegowymi (14.10). Transformata rozwiązania ma tutaj postać

$$(17.4) \quad T_L(x, y, z, p) = T_0 \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) G_{mnL}(z),$$

gdzie

$$G_{mnL}(z) = \frac{1}{p} \frac{\text{sh}(az)}{\text{sh}(ah)}, \quad \alpha^2 = \vartheta_{mn}^2 + q^2.$$

Posługując się wzorem asymptotycznym dla dużych argumentów i wykonując następnie transformację odwrotną, otrzymujemy

$$(17.5) \quad T(x, y, z, t) = \eta(t) \text{sgn}(z) T_0 \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) F_{mn}(z, t).$$

Przypadek 3. W tym przypadku rozwiązanie musi spełniać równanie (14.1), warunek początkowy (14.2) oraz warunki brzegowe (14.14). Przypadek ten jest więc superpozycją obu poprzednich rozwiązań i rozwiązanie można napisać w następującej postaci:

$$(17.6) \quad T(x, y, z, t) = \eta(t) \eta(z) T_0 \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) F_{mn}(z, t).$$

18. Stan naprężenia

W celu wyznaczenia stanu naprężenia posłużymy się metodą omówioną w rozdziale II części pierwszej. Wyznamy mianowicie transformaty rozwiązania, a następnie wykonamy transformację odwrotną posługując się odpowiednimi przedstawieniami asymptotycznymi dla dużych parametrów p .

Transformata składowych przemieszczenia wyraża się przez transformatę potencjału termosprężystego przemieszczenia za pomocą następujących związków:

$$(18.1) \quad u_L = \frac{\partial \Phi_L}{\partial x}, \quad v_L = \frac{\partial \Phi_L}{\partial y}, \quad w_L = \frac{\partial \Phi_L}{\partial z} a_T.$$

Po uwzględnieniu wzorów (18.1) transformaty równań przemieszczeniowych teorii sprężystości sprowadzają się do jednego równania

$$(18.2) \quad \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial z^2} = \vartheta_0 T, \quad \vartheta_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu}.$$

Podobnie jak poprzednio poszukiwać będziemy takich rozwiązań szczególnych równania (18.2), które spełnią warunki:

$$\Phi_L(x, y, \pm h, p) = \Phi_L(0, y, z, p) = \Phi_L(a, y, z, p) = \Phi_L(x, 0, z, p) = \Phi_L(x, b, z, p) = 0.$$

Przypadek 1. Przypadek ten odpowiada temperaturze określonej wzorem (17.1). Poszukiwane rozwiązanie szczególne równania (18.2) jest tutaj funkcją

$$(18.3) \quad \Phi_L = \kappa \vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) Z_{mnL}(z, p),$$

gdzie

$$Z_{mnL}(z, p) = \frac{1}{p^2} \left[\frac{\text{ch}(az)}{\text{ch}(ah)} - \frac{\text{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\text{ch}(\vartheta_{mn} h)} \right].$$

Składowe stanu naprężenia określa się za pomocą potencjału ze znanego związku:

$$(18.4) \quad \sigma_{ijL} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi_L}{\partial i \partial j} - \nabla^2 \Phi_L \delta_{ij} \right), \quad i, j = x, y, z.$$

Transformaty składowych stanu naprężenia mają postać:

$$(18.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{xxL} = 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) [\beta_n^2 Z_{mnL}(z, p) - Z_{mnL}''(z, p)], \\ \bar{\sigma}_{yyL} = 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) [\alpha_m^2 Z_{mnL}(z, p) - Z_{mnL}''(z, p)], \\ \bar{\sigma}_{zzL} = 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \vartheta_{mn}^2 Z_{mnL}(z, p), \\ \tau_{xyL} = 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \alpha_m \beta_n \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) Z_{mnL}(z, p), \\ \tau_{xzL} = 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \alpha_m \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) Z_{mnL}'(z, p), \\ \tau_{yzL} = 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \beta_n \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) Z_{mnL}'(z, p), \end{array} \right.$$

gdzie

$$Z_{mnL}'(z, p) = \frac{1}{p^2} \left[\alpha \frac{\text{sh}(az)}{\text{ch}(ah)} - \vartheta_{mn} \frac{\text{sh}(\vartheta_{mn} z)}{\text{ch}(\vartheta_{mn} h)} \right],$$

$$Z_{mnL}''(z, p) = \frac{1}{p^2} \left[\alpha^2 \frac{\text{ch}(az)}{\text{ch}(ah)} - \vartheta_{mn}^2 \frac{\text{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\text{ch}(\vartheta_{mn} h)} \right].$$

Stan naprężenia powinien spełniać na powierzchniach $z = \pm h$ warunki brzegowe

$$\sigma_{zz}(x, y, \pm h, p) = 0 \quad \text{oraz} \quad \tau_{xz}(x, y, \pm h, p) = \tau_{yz}(x, y, \pm h, p) = 0.$$

Składowe stanu naprężenia określone potencjałem spełniają jedynie pierwszy z tych warunków. Celem spełnienia drugiego warunku dodamy składowe stanu naprężenia $(\bar{\sigma}_{ijL})$, który określa funkcja Galerkinowa spełniająca równanie biharmoniczne. Składowe stanu naprężenia wyrażone przez funkcję Galerkinową określa wzór (16.3). Występującą w tym wzorze funkcję φ będziemy uważać za transformatę Laplace'a i przyjmijmy ją w postaci

$$\varphi_L(x, y, z, p) = \kappa \vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) M_{mnL}(z, p),$$

gdzie

$$M_{mnL}(z, p) = C_{mnL} \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z) + D_{mnL} \vartheta_{mn} z \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z).$$

Stałe C_{mnL} i D_{mnL} wyznaczmy z warunków brzegowych przy $z = \pm h$:

$$(18.6) \quad \begin{cases} C_{mnL} = (1 - 2\nu) [(1 - 2\nu) - \vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] D_{mn} Z'_{mnL}(z, p), \\ D_{mnL} = (1 - 2\nu) D_{mn} Z'_{mnL}(z, p), \end{cases}$$

gdzie

$$D_{mn} = [\vartheta_{mn}^2 \{ \vartheta_{mn} h + [1 - \vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h) \} \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)]^{-1},$$

$$Z'_{mnL} = \frac{1}{p^2} \left[\alpha \operatorname{th}(\alpha h) - \vartheta_{mn} \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h) \right].$$

Mając na uwadze transformację odwrotną funkcję Galerkinową napiszemy ostatecznie w postaci

$$(18.7) \quad \varphi_L(x, y, z, p) = \kappa \vartheta_0 T_0 (1 - 2\nu) \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \times \\ \times \{ \vartheta_{mn} z \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z) + [(1 - 2\nu) - \vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z) \} Z'_{mnL}(h, p),$$

gdzie

$$\bar{A}_{mn} = A_{mn} D_{mn}.$$

Wypisywanie sumy składowych stanów naprężenia $(\bar{\sigma}_{ijL})$ oraz $(\bar{\sigma}_{ijL})$ nie prowadzi do uproszczeń wzorów i wobec tego stan naprężenia $(\bar{\sigma}_{ijL})$ napiszemy oddzielnie:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{xxL} &= 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \{2\nu\vartheta_{mn}^3 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z) + \\
 &\quad + \alpha_m^2 M'_{mn}(z)\} Z'_{mnL}(h, p), \\
 \bar{\sigma}_{yyL} &= 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \{2\nu\vartheta_{mn}^3 \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z) + \\
 &\quad + \beta_n^2 M'_{mn}(z)\} Z'_{mnL}(h, p), \\
 \bar{\sigma}_{zzL} &= 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \vartheta_{mn}^3 \times \\
 &\quad \times \{\vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h) \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z) - \vartheta_{mn} z \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z)\} Z'_{mnL}(h, p), \\
 \bar{\tau}_{xyL} &= 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \alpha_m \beta_n \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) M'_{mn}(z) Z'_{mnL}(h, p), \\
 \bar{\tau}_{xzL} &= 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \alpha_m \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \vartheta_{mn}^2 \times \\
 &\quad \times \{[1 + \vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z) - \vartheta_{mn} z \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z)\} Z'_{mnL}(h, p), \\
 \bar{\tau}_{yzL} &= 2G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \beta_n \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \vartheta_{mn}^2 \times \\
 &\quad \times \{[1 + \vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z) - \vartheta_{mn} z \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z)\} Z'_{mnL}(h, p),
 \end{aligned}
 \tag{18.8}$$

gdzie

$$M'_{mn}(z) = \{\vartheta_{mn} z \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z) + [2(1-\nu) - \vartheta_{mn} h \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z)\} \vartheta_{mn}.$$

Suma wyznaczonych składowych stanów naprężenia spełnia warunki na powierzchniach $z = \pm h$ w sposób ścisły, ale nie spełnia warunków na brzegach pionowych płyty. Widoczne jest, że na tych brzegach naprężenia normalne równe są zeru, a naprężenia styczne tworzą siłę wypadkową

$$\begin{aligned}
 (18.9) \quad Q_L &= \int_{-h}^h \tau_{xyL}(x, y, z, p) dz = 4G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m,n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \alpha_m \beta_n \cos(\alpha_m x) \times \\
 &\quad \times \cos(\beta_n y) [\bar{Z}_{mnL}(h, p) + \bar{D}_{mn} Z'_{mnL}(h, p)],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{D}_{mn} = D_{mn} \frac{(1-2\nu) \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h) \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h) + \vartheta_{mn} h}{\operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)},$$

$$\bar{Z}_{mnL} = \frac{1}{p^2} \left[\frac{1}{a} \operatorname{th}(ah) - \frac{1}{\vartheta_{mn}} \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h) \right].$$

Wstawiając do wyrażenia (18.9) kolejno $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, otrzymamy wypadkowe siły stycznych, występujące na brzegach płyty.

Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy w poprzednim rozdziale, przyjmiemy, że na brzegu $x = 0$ działa siła styczna $-Q_L(0)/2h$, na brzegu $x = a$ siła styczna $-Q_L(a)/2h$, na brzegu $y = 0 - Q_L(0)/2h$ i na brzegu $y = b$ siła styczna $-Q_L(b)/2h$. Siły te wywołają w płycie płaski stan naprężenia scharakteryzowany wielkościami σ''_{xxL} , σ''_{yyL} i τ''_{xyL} . Dodanie składowych stanu naprężenia (σ''_{ijL}) do składowych stanu (σ_{ijL}) daje transformatę składowych stanu naprężenia (σ_{ijL}), w którym warunki brzegowe w płaszczyznach $z = \pm h$ będą spełnione w sposób ścisły, a w pozostałych płaszczyznach ograniczających płytę w sposób przybliżony. Sposób wyznaczenia stanu naprężenia (σ''_{ijL}) omówiony był szczegółowo w poprzednim rozdziale i wydaje się, że nie ma potrzeby wypisywania funkcji Airy'ego i równań, z których wyznacza się współczynniki funkcji Airy'ego. Zmianie ulegną jedynie prawe strony równań (17.3) (po uprzednim wykonaniu transformacji odwrotnej).

Pozostaje jedynie wykonanie transformacji odwrotnych, odpowiadających małym czasom. Korzystając z omówionych uprzednio przedstawień asymptotycznych otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 Z_{mnL}(z, p) &\approx \frac{1}{p^2} \left\{ \exp \left[-\alpha(h - |z|) - \frac{\text{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\text{ch}(\vartheta_{mn} h)} \right] \right\} \doteq -t \frac{\text{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\text{ch}(\vartheta_{mn} h)} + \\
 &\quad + 2t \left\{ \exp \left[-\vartheta_{mn}(h - |z|) \right] i^2 \text{erfc} \left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} - \vartheta_{mn}\sqrt{\kappa t} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \exp \left[\vartheta_{mn}(h - |z|) \right] i^2 \text{erfc} \left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} + \vartheta_{mn}\sqrt{\kappa t} \right) \right\}, \\
 Z'_{mnL}(z, p) &\approx \frac{1}{p^2} \left\{ \text{sgn}(z) \alpha \exp \left[-\alpha(h - |z|) \right] - \vartheta_{mn} \frac{\text{sh}(\vartheta_{mn} z)}{\text{ch}(\vartheta_{mn} h)} \right\} \doteq \\
 &\quad \doteq \frac{\text{sgn}(z)}{2\kappa\vartheta_{mn}} \left\{ \exp \left[-\vartheta_{mn}(h - |z|) \right] \text{erfc} \left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} - \vartheta_{mn}\sqrt{\kappa t} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \exp \left[\vartheta_{mn}(h - |z|) \right] \text{erfc} \left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} + \vartheta_{mn}\sqrt{\kappa t} \right) \right\} - \vartheta_{mn} t \frac{\text{sh}(\vartheta_{mn} z)}{\text{ch}(\vartheta_{mn} h)} + \\
 &\quad + 2\vartheta_{mn} t \text{sgn}(z) \left\{ \exp \left[-\vartheta_{mn}(h - |z|) \right] i^2 \text{erfc} \left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} - \vartheta_{mn}\sqrt{\kappa t} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \exp \left[\vartheta_{mn}(h - |z|) \right] i^2 \text{erfc} \left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} + \vartheta_{mn}\sqrt{\kappa t} \right) \right\}, \\
 (18.10) \quad Z''_{mnL}(z, p) &\approx \frac{1}{p^2} \left\{ \alpha^2 \exp \left[-\alpha(h - |z|) \right] - \vartheta_{mn}^2 \frac{\text{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\text{ch}(\vartheta_{mn} h)} \right\} \doteq \\
 &\quad \doteq -\vartheta_{mn}^2 t \frac{\text{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\text{ch}(\vartheta_{mn} h)} + 2\vartheta_{mn}^2 t \left\{ \exp \left[-\vartheta_{mn}(h - |z|) \right] \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} - \vartheta_{mn} \sqrt{\kappa t} \right) + \exp [\vartheta_{mn}(h-|z|)] i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} + \vartheta_{mn} \sqrt{\kappa t} \right) \Big\} + \\
& \quad + \frac{1}{2\kappa} \left\{ \exp [-\vartheta_{mn}(h-|z|)] \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} - \vartheta_{mn} \sqrt{\kappa t} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \exp [\vartheta_{mn}(h-|z|)] \operatorname{erfc} \left(\frac{h-|z|}{2\sqrt{\kappa t}} + \vartheta_{mn} \sqrt{\kappa t} \right) \right\}, \\
Z'_{mnL}(h, p) & \approx \frac{1}{p^2} [\alpha - \vartheta_{mn} \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] \doteq \vartheta_{mn} t [\operatorname{erf}(\vartheta_{mn} \sqrt{\kappa t}) - \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h)] + \\
& \quad + \frac{1}{2\kappa \vartheta_{mn}} \operatorname{erf}(\vartheta_{mn} \sqrt{\kappa t}) + \sqrt{\frac{t}{\pi \kappa}} \exp [-\kappa \vartheta_{mn}^2 t], \\
\bar{Z}_{mnL}(h, p) & \approx \frac{1}{p^2} \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\vartheta_{mn}} \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h) \right] \doteq -\frac{t}{\vartheta_{mn}} \operatorname{th}(\vartheta_{mn} h) + \\
& \quad + \frac{t}{\vartheta_{mn}} \left\{ \operatorname{erf}(\vartheta_{mn} \sqrt{\kappa t}) + \sqrt{\frac{1}{\vartheta_{mn}^2 \pi \kappa t}} \exp [-\kappa \vartheta_{mn}^2 t] \right\}.
\end{aligned}$$

Przypadek 2. Z porównania pól temperatur w przypadku 1 i 2 wynika, że transformaty funkcji potencjału i funkcji Galerkina będą mieć taką budowę jak w przypadku 1. Wzory będą się różniły jedynie częścią zależną od zmiennej z ; zamiast funkcji symetrycznych wystąpią funkcje antysymetryczne. Na to, aby otrzymać transformaty składowych stanu naprężenia ($\bar{\sigma}_{ijL}$) oraz ($\bar{\sigma}'_{ijL}$), wystarczy we wzorach (18.5) i (18.8) wykonać podstawienia:

	zamiast	podstawić
(18.11)	ch (ζ)	sh (ζ),
	sh (ζ)	ch (ζ),
	th (ζ)	cth (ζ).

Otrzymane w ten sposób składowe stanu naprężenia nie spełniają oczywiście warunków brzegowych na pionowych płaszczyznach ograniczających płytę. Składowe normalne równe są zeru, ale naprężenia styczne τ'_{xyL} dają moment równy

$$(18.12) \quad M_L = \int_{-h}^h \tau'_{xyL}(x, y, z, p) z dz = 4G\kappa\vartheta_0 T_0 \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \alpha_m \beta_n \cos(\alpha_m x) \times \\
\times \cos(\beta_n y) [S'_{mnL}(h, p) - \bar{E}_{mn} S'_{mnL}(h, p)],$$

gdzie

$$\bar{E}_{mn} = \frac{2\nu \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h) [\operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h) - \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h)] + \vartheta_{mn} h [\vartheta_{mn} h + \operatorname{sh}^2(\vartheta_{mn} h) \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)]}{\vartheta_{mn}^4 \{ \vartheta_{mn} h + [1 - \vartheta_{mn} h \operatorname{cth}(\vartheta_{mn} h)] \operatorname{cth}(\vartheta_{mn} h) \} \operatorname{sh}^2(\vartheta_{mn} h)},$$

$$\bar{S}_{mnL} = \frac{1}{p^2} \left[\frac{h}{\alpha} \operatorname{cth}(ah) - \frac{h}{\vartheta_{mn}} \operatorname{cth}(\vartheta_{mn} h) - \frac{p}{\kappa \vartheta_{mn}^2 a^2} \right],$$

$$S'_{mn} = \frac{1}{p^2} [\alpha \operatorname{cth}(ah) - \vartheta_{mn} \operatorname{cth}(\vartheta_{mn} h)].$$

Przybliżony sposób spełnienia warunków brzegowych na pionowych płaszczyznach ograniczających płytę omówiony jest szczegółowo w poprzednim rozdziale. W taki sam sposób przyjmuje się funkcję Airy'ego. Ulegają zmianie jedynie prawe strony układu równań, z którego wyznaczamy współczynniki określające funkcję Airy'ego (po uprzednim wykonaniu transformacji odwrotnej).

Wiedząc, że zachodzi odpowiedniość $Z_{mnL}^{(n)}(z, p) \leftrightarrow S_{mnL}^{(n)}(z, p)$, możemy przy odwracaniu transformacji korzystać ze wzorów (18.10), z wyjątkiem ostatniego z tych wzorów. W czterech pierwszych należy jedynie przy funkcjach błędu i funkcjach wykładniczych zmienić współczynniki oraz wykonać podstawienia według wzoru (18.11).

$$(18.13) \quad \begin{array}{cc} & \text{zamiast} \\ & \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \operatorname{sgn}(z) \end{array} \right. \\ & \text{podstawić} \\ & \left. \begin{array}{l} \operatorname{sgn}(z), \\ 1. \end{array} \right. \end{array}$$

Zamiast ostatniego ze wzorów (18.10) wystąpi funkcja $\bar{S}_{mnL}(h, p)$, której transformata dla małych czasów ma postać

$$(18.14) \quad \begin{aligned} \bar{S}_{mnL}(h, p) &\approx \frac{1}{p^2} \left[\frac{h}{a} - \frac{h}{\vartheta_{mn}} \operatorname{cth}(\vartheta_{mn} h) - \frac{p}{\kappa \vartheta_{mn}^2 a^2} \right] \doteq \\ &\doteq - \frac{ht}{\vartheta_{mn}} \left\{ \operatorname{cth}(\vartheta_{mn} h) + \operatorname{erf}(\vartheta_{mn} \sqrt{\kappa t}) + \sqrt{\frac{1}{\vartheta_{mn}^2 \kappa t}} \exp[-\kappa \vartheta_{mn}^2 t] \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{\kappa \vartheta_{mn}^4} \exp[-\vartheta_{mn}^2 \kappa t]. \end{aligned}$$

Przypadek 3. Jak wiadomo, przypadek ten jest superpozycją obu poprzednich.

Rozdział VII. Rozwiązanie w przypadku warunków termicznych typu Neumanna

Jednym z technicznie możliwych przypadków jest przypadek izolacji termicznej na części powierzchni $z = \pm h$. Warunki na płaszczyznach pionowych ograniczających płytę pozostawimy w tym rozdziale bez zmian.

19. Pole temperatury

Przypadek 1. Podobnie jak w poprzednich rozdziałach, przypadek ten odpowiada polu temperatury symetrycznemu względem płaszczyzny $z = 0$. Pole temperatury opisane jest równaniem (14.1), warunkiem początkowym (14.2) oraz warunkami brzegowymi

$$(19.1) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \begin{cases} \pm \frac{Q}{2} f(x, y) & \text{na obszarze } \Gamma(0 < x < a, 0 < y < b), \text{ jeśli } z = \pm h; \\ 0 & \text{na powierzchni } P \rightarrow \Gamma, \text{ jeśli } z = \pm h \end{cases}$$

i na pozostałych powierzchniach jak w (14.3).

Wiedząc, że funkcję $f(x, y)$ rozwija się w podwójny szereg trygonometryczny (14.6) możemy natychmiast napisać

$$(19.2) \quad T(x, y, z, t) = \frac{Q}{2\lambda} \eta(t) \left\{ \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) \frac{\operatorname{ch}(\vartheta_{mn} z)}{\vartheta_{mn} \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h)} - \sum_{m, n, p=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_p} B_{mnp} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) \cos(\omega_p z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \omega_p^2)t] \right\},$$

gdzie A_{mn} oraz B_{mnp} i ω_p są takie same jak w rozdziale V.

Przypadek 2. Przypadek odpowiada antysymetrycznemu polu temperatury. Rozwiązanie będzie więc opisane równaniem (14.1), warunkiem początkowym (14.2) oraz warunkami (14.10), z których pierwszy ma tutaj postać

$$(19.3) \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \begin{cases} \frac{Q}{2} f(x, y) & \text{na obszarze } \Gamma (0 < x < a, 0 < y < b), \text{ jeśli } z = \pm h; \\ 0 & \text{na powierzchni } P - \Gamma, \text{ jeśli } z = \pm h. \end{cases}$$

Odpowiadające tym warunkom rozwiązanie ma postać

$$(19.4) \quad T(x, y, z, t) = \frac{Q}{2\lambda} \eta(t) \left\{ \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) \frac{\operatorname{sh}(\vartheta_{mn} z)}{\vartheta_{mn} \operatorname{ch}(\vartheta_{mn} h)} - \sum_{m, n, k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} A_{mnk} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) \sin(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\vartheta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \right\},$$

gdzie A_{mnk} oraz γ_k określone są w rozdziale V.

Przypadek 3. Ten przypadek odpowiada ogrzaniu jedynie powierzchni $z = h$ i wobec tego jest superpozycją obu poprzednich.

20. Pole temperatury (rozwiązanie asymptotyczne)

Przypadek 1. Przypadek ten odpowiada warunkom początkowym i brzegowym podanym w poprzednim paragrafie. Posługując się przy rozwiązywaniu transformacją Laplace'a stwierdzimy, że część transformaty temperatury zależna od parametru p ma postać

$$F_{mn1L}(z, p) = \frac{1}{p\alpha} \frac{\operatorname{ch}(az)}{\operatorname{sh}(ah)}.$$

Stosując przedstawienie asymptotyczne dla dużych wartości parametru p otrzymujemy

$$(20.1) \quad F_{mn1L}(z, p) \approx \frac{1}{p\alpha} \exp[-\alpha(h - |z|)] \frac{\eta(t)}{2\vartheta_{mn}} \left\{ \exp[-\vartheta_{mn}(h - |z|)] \times \times \operatorname{erfc}\left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} - \vartheta_{mn}\sqrt{\kappa t}\right) - \exp[\vartheta_{mn}(h - |z|)] \operatorname{erfc}\left(\frac{h - |z|}{2\sqrt{\kappa t}} + \vartheta_{mn}\sqrt{\kappa t}\right) \right\}.$$

Oznaczając otrzymany wynik przez $F_{mn1}(z, t)$ możemy napisać, że rozwiązanie dla małych czasów ma postać

$$(20.2) \quad T(x, y, z, t) = \frac{Q}{2\lambda} \eta(t) \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(a_m x) \sin(\beta_n y) F_{mn1}(z, t).$$

Przypadek 2. Sformułowanie tego przypadku podane jest w poprzednim paragrafie. Postępując jak wyżej stwierdzimy, że pole temperatury można przedstawić wzorem (20.2) mnożąc prawą stronę przez $\operatorname{sgn}(z)$.

Przypadek 3. Jak wiadomo, przypadek ten jest superpozycją obu poprzednich i temperaturę można przedstawić wzorem (20.2) mnożąc prawą stronę przez $2\eta(z)$.

Uwaga. Między funkcją $F_{mn1}(z, t)$ i występującą we wzorze na temperaturę w rozdziale II funkcją $F_{mn}(z, t)$ zachodzi następujący związek całkowy

$$(20.3) \quad F_{mn1}(z, t) = \int_h^z F_{mn}(\zeta, t) d\zeta.$$

Wzór (20.3) wykorzystamy omawiając sposób wyznaczenia pola naprężeń.

21. Stan naprężenia

O ile porównamy wzory opisujące pola temperatur w rozdziale V i w obecnym, to okaże się, że ich budowa jest taka sama i że różnią się między sobą jedynie współczynniki. Z tego wynika, że to samo dotyczy wzorów opisujących stan naprężenia.

Przypadek 1. Na to, aby otrzymać poszukiwane składowe stanu naprężenia, trzeba w odpowiednich wzorach z rozdziału piątego, paragraf 16, przypadek 1, dokonać następujących podstawień:

	zamiast	podstawić
(21.1)	T_0	$\frac{Q}{2\lambda}$
	γ_k	ω_p
	A_{mnk}	$\frac{B_{mnp}}{\omega_p}$

a w szeregach pojedynczych, w mianownikach zamiast $ch(\vartheta_{mn} h)$ podstawić $\vartheta_{mn} \operatorname{sh}(\vartheta_{mn} h)$.

Przypadek 2. We wzorach omówionych w rozdziale V, paragraf 16, przypadek 2, należy wykonać następujące podstawienia:

	zamiast	podstawić
(21.2)	T_0	$\frac{Q}{2\lambda}$,
	ω_p	γ_k ,
	B_{mnp}	$\frac{A_{mnk}}{\gamma_k}$;

a w szeregach pojedynczych, w mianownikach zamiast $\text{sh}(\vartheta_{mn} h)$ podstawić $\vartheta_{mn} \text{ch}(\vartheta_{mn} h)$.

Przypadek 3 jest superpozycją obu poprzednich.

22. Stan naprężenia (rozwiązanie asymptotyczne)

Wyznaczenie składowych stanu naprężenia sprowadza się w tym przypadku do odpowiedniego wykorzystania wzorów podanych w rozdziale VI. Możliwe są dwie drogi. Pierwsza droga, to całkowanie względem zmiennej z transformaty rozwiązania i następnie wykonanie transformacji odwrotnej. Druga droga, to całkowanie względem zmiennej z retransformaty [por. wzór (20.3)]. Transformacja jest operacją liniową, a więc obie drogi są sobie równoważne.

Rozdział VIII. Rozwiązanie w przypadku ogólnych warunków brzegowych

W rozdziale tym omówimy przypadek, w którym przez płaszczyzny pionowe ograniczające płytę przepływa strumień ciepła (prawo Newtona). Takie warunki brzegowe prowadzą do zagadnienia brzegowego Fouriera drugiego rodzaju.

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach, rozważymy trzy przypadki odpowiadające trzem różnym termicznym warunkom brzegowym na powierzchniach płyty $z = \pm h$.

23. Pole temperatury

Przypadek 1. Pole temperatury określone jest równaniem (14.1), warunkiem początkowym (14.2) oraz warunkami brzegowymi:

$$(23.1) \quad \begin{cases} T = \begin{cases} T_0 f(x, y) \text{ na obszarze } \Gamma (0 < x < a, 0 < y < b), \text{ jeśli } z = \pm h; \\ 0 \text{ na powierzchni } P \rightarrow \Gamma, & \text{jeśli } z = \pm h; \end{cases} \\ \frac{\partial T}{\partial x} + hT = 0, \quad \text{jeśli } x = 0 \quad \text{oraz} \quad x = a; \\ \frac{\partial T}{\partial y} + hT = 0, \quad \text{jeśli } y = 0 \quad \text{oraz} \quad y = b. \end{cases}$$

Postępując się transformacją Laplace'a sprowadzimy zagadnienie do rozwiązania równania (14.4) z warunkami brzegowymi

$$(23.2) \quad \begin{cases} T_L = \begin{cases} \frac{T_0}{p} f(x, y) \text{ na obszarze } \Gamma (0 < x < a, 0 < y < b), \text{ jeśli } z = \pm h; \\ 0 \text{ na powierzchni } P - \Gamma, & \text{jeśli } z = \pm h; \end{cases} \\ \frac{\partial T_L}{\partial x} + h T_L = 0, \quad \text{jeśli } x = 0 \quad \text{oraz} \quad x = a; \\ \frac{\partial T_L}{\partial y} + h T_L = 0, \quad \text{jeśli } y = 0 \quad \text{oraz} \quad y = b. \end{cases}$$

Rozwiązanie równania (14.4) przyjmiemy w postaci, [24],

$$(23.3) \quad T_L(x, y, z, p) = \frac{T_0}{p} \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \frac{\text{ch}(\beta z)}{\text{ch}(\beta h)},$$

gdzie

$$X_m(x) = \lambda_m \cos(\lambda_m x) + \hbar \sin(\lambda_m x),$$

$$Y_n(y) = \mu_n \cos(\mu_n y) + \hbar \sin(\mu_n y);$$

liczby A_{mn} są współczynnikami rozkładu w szereg Fouriera funkcji $f(x, y)$

$$f(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} X_m(x) Y_n(y),$$

a wartości własne λ_m oraz μ_n są pierwiastkami równań przestępnych

$$(23.4) \quad \text{tg}(\lambda a) = \frac{2\lambda \hbar}{\lambda^2 + \hbar^2}$$

oraz

$$(23.5) \quad \text{tg}(\mu b) = \frac{2\mu \hbar}{\mu^2 + \hbar^2}.$$

Wykonując transformację odwrotną otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie

$$(23.6) \quad T(x, y, z, t) = \eta(t) T_0 \left\{ \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \frac{\text{ch}(\theta_{mn} z)}{\text{ch}(\theta_{mn} h)} - \sum_{m, n, k=1}^{\infty} A_{mnk} X_m(x) Y_n(y) \cos(\gamma_k z) \exp[-\kappa(\theta_{mn}^2 + \gamma_k^2)t] \right\},$$

gdzie

$$\theta_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2, \quad A_{mnk} = \frac{2A_{mn} \gamma_k (-1)^{k-1}}{h(\theta_{mn}^2 + \gamma_k^2)}.$$

Przypadek 2. Pole temperatury jest antysymetryczne względem płaszczyzny $z = 0$, tzn. opisane jest równaniem (14.1), warunkiem początkowym (14.2) i warunkami brzegowymi

$$(23.7) \quad T = \begin{cases} \pm T_0 f(x, y) \text{ na obszarze } \Gamma (0 < x < a, 0 < y < b), & \text{jeśli } z = \pm h; \\ 0 \text{ na powierzchni } P - \Gamma, & \text{jeśli } z = \pm h; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} + hT = 0, & \text{jeśli } x = 0 \quad \text{oraz} \quad x = a; \\ \frac{\partial T}{\partial y} + hT = 0, & \text{jeśli } y = 0 \quad \text{oraz} \quad y = b. \end{cases}$$

Ponieważ funkcja jest antysymetryczna względem zmiennej z , to na miejscu funkcji $\text{ch}(\theta_{mn} z)$ wystąpi funkcja $\text{sh}(\theta_{mn} z)$ i poszukiwane rozwiązanie wyrazi się wzorem

$$(23.8) \quad T(x, y, z, t) = \eta(t) T_0 \left\{ \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \frac{\text{sh}(\theta_{mn} z)}{\text{sh}(\theta_{mn} h)} - \sum_{m, n, p=1}^{\infty} B_{mnp} X_m(x) Y_n(y) \sin(\omega_p z) \exp[-\kappa(\theta_{mn}^2 + \omega_p^2)t] \right\},$$

gdzie

$$\theta_{mn}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2, \quad B_{mnp} = \frac{2A_{mn} \omega_p (-1)^p}{h(\theta_{mn}^2 + \omega_p^2)}.$$

Przypadek 3. Przypadek ten odpowiada ekspozycji ciepła jedynie na płaszczyźnie $z = h$. Na płaszczyźnie $z = -h$ panuje temperatura $T = 0$. Rozwiązanie jest więc superpozycją obu poprzednich.

W przypadku warunków brzegowych na płaszczyznach $z = \pm h$ takich, jakie występują w rozdziale V, zmianie ulega jedynie stały czynnik, występujący przed znakiem szeregu, zmianie ulega funkcja zależna od zmiennej z i współczynnik w szeregach potrójnych. Funkcje $X_m(x)$ oraz $Y_n(y)$ nie zmieniają się. Otrzymanie odpowiedniego rozwiązania nie następuje więc trudności.

Na podstawie poprzednich rozdziałów można stwierdzić, że w przypadku rozwiązania asymptotycznego, odpowiadającego małym czasom, zmianie podlega jedynie ta część wzoru, która zależy od zmiennej z i t . Funkcje $X_m(x)$ oraz $Y_n(y)$ pozostają niezmiennione. Znając podane poprzednio rozwiązania można bez trudu napisać rozwiązanie dla małych czasów w przypadku omawianych w tym rozdziale warunków brzegowych.

24. Stan naprężenia

Metoda wyznaczania stanu naprężenia jest taka sama, jak omówiona w poprzednich rozdziałach. Różnica zawarta będzie w budowie funkcji potencjału i funkcji Galerkinia. Jak wynika z porównania funkcji temperatury otrzymanych w tym

rozdziale z funkcjami temperatur z poprzednich rozdziałów, różnica polegać będzie na tym, że zamiast funkcji $\sin(\alpha_m x)$ oraz $\sin(\beta_n y)$ wystąpią w odpowiednich wzorach funkcje $X_m(x)$ oraz $Y_n(y)$.

Stan naprężenia określony funkcją potencjału i funkcją Galerkina spełni w sposób ścisły warunki mechaniczne na płaszczyznach $z = \pm h$. Warunki mechaniczne na płaszczyznach pionowych ograniczających płytę można będzie spełnić w sposób całkowity przyjmując odpowiednio rozwiązanie opisane funkcją Airy'ego.

CZĘŚĆ III. PRZYKŁAD LICZBOWY I WNIOSKI KOŃCOWE

25. Przykład liczbowy

Omawiany tutaj przykład liczbowy ma na celu jedynie zilustrowanie charakteru zmienności składowych stanu naprężenia wzdłuż grubości płyty z uwzględnieniem zmian w czasie. Podanie wykresów odpowiadających wszystkim lub ważniejszym omówionym przypadkom dla różnych stosunków wymiarowych i różnych czasów przekracza możliwości autora. Z tych właśnie względów ograniczymy się tutaj do przypadku płyty kołowej, w której stan naprężenia wywołany jest symetrycznym względem płaszczyzny $z = 0$ polem temperatury. Przykład ma na celu pokazanie charakteru zmienności składowych stanu naprężenia wzdłuż grubości płyty, a więc wystarczy ograniczyć się do jednej tylko wartości r , przyjętej tutaj dla uproszczenia $r = 0$. Ograniczymy się nadto do dwóch różnych wartości czasu.

Odpowiadające temu przypadkowi pole temperatury określone jest wzorem (1.10). We wzorze tym przyjmiemy, że $f(r) = 1$. Składowe stanu naprężenia określone są wzorami (3.8) i (10.1). W wymienionych wzorach występują w naszym przypadku ilorazy nieokreślone

$$\frac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r}$$

typu $0/0$.

Zastosowanie reguły de L'Hospitala prowadzi do następującego wyniku, [13],

$$(25.1) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}.$$

W tych przypadkach, kiedy trzeba było znaleźć wartość funkcji Bessela dla dużych argumentów nie objętych tablicami, wykorzystano przedstawienie asymptotyczne, [27],

$$(25.2) \quad J_n(x) = \frac{P_n(x) \cos \varphi - Q_n(x) \sin \varphi}{\sqrt{\frac{x\pi}{2}}},$$

gdzie

$$\varphi = x - (n+0,5) \frac{\pi}{2},$$

$$P_n(x) = 1 - \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!(8x)^2} + \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49)}{4!(8x)^4} - \dots,$$

$$Q_n(x) = \frac{4n^2-1}{8x} - \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}{3!(8x)^3} + \dots$$

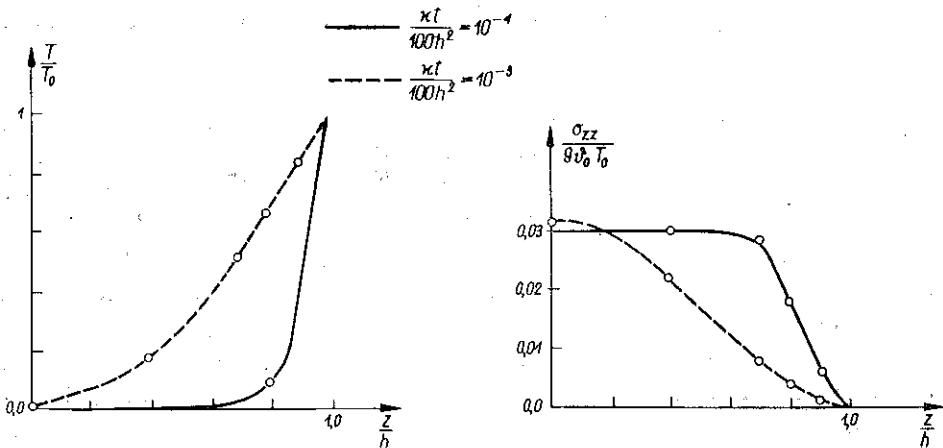
i dla dużych argumentów przyjmuje się

$$(25.3) \quad J_n(x) \approx \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\frac{\pi x}{2}}}.$$

W obliczeniach przyjęto następujące wymiary płyty:

- a) stosunek promienia obszaru ekspozycji ciepła do promienia płyty $a/b = 1/2$,
- b) stosunek grubości płyty do jej promienia $2h/b = 1/5$. Obliczenia wykonano w następujących punktach: $z/h = 1,0; 0,9; 0,8; 0,7; 0,4; 0,0$ dla dwóch różnych czasów:

$$\frac{\kappa t}{100 h^2} = 10^{-4} \quad \text{oraz} \quad 10^{-3}.$$



Rys. 1

Poczynając od czasu $\kappa t / 100 h^2 = 10^{-4}$ można było przy wyliczaniu szeregu podwójnego poprzestać na 10 wyrazach względem m i 10 względem n . W przypadku czasu $\kappa t / 100 h^2 = 10^{-6}$ należałoby uwzględnić około 30 wyrazów względem m i taką samą ilość względem n . Jest to możliwe przy obecnej technice liczenia na maszynach elektronowych.

Przejdziemy obecnie do podania i krótkiego omówienia wykresów.

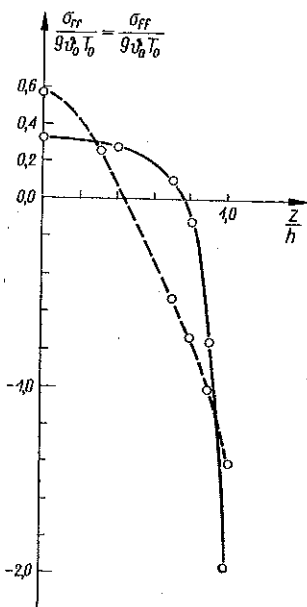
Z podanych wykresów wynikają następujące wnioski:

1. Naprężenia σ_{zz} są małe w porównaniu z naprężeniami σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ i można je pominąć.

2. Największe naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ (ściskające) występują w warstwach powierzchniowych.

3. Największe naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$, występujące w warstwach powierzchniowych, maleją z upływem czasu; w granicy, gdy $t \rightarrow \infty$, osiągają wartość naprężeń stacjonarnych, które są mniejsze od wartości odpowiadającej skończonym wartościom czasu.

4. Na podstawie powyższych uwag można wyciągnąć wniosek, że dla bardzo małych czasów (początek procesu nagrzewania) wystarczy ograniczyć się do obliczenia naprężeń jedynie w warstwach powierzchniowych płyty.



Rys. 2

26. Uwagi końcowe

1. Z termicznych warunków brzegowych rozpatrywanych zagadnień i z budowy wzorów określających składowe stanu naprężenia i przemieszczenia wynika, że wielkości te, gdy $t \rightarrow \infty$, dążą do wartości odpowiadających odpowiednim ustalonym polom temperatury. Otrzymane wzory (odpowiadające rozwiązaniom ścisłym) składają się z dwóch części: z części, która jest jedynie funkcją miejsca i z części, która przedstawia funkcję miejsca i czasu. Druga część wraz z czasem $t \rightarrow \infty$ dąży do zera. Część pierwsza odpowiada rozwiązaniu stacjonarnemu.

2. Część rozwiązań stacjonarnych pokrywa się z rozwiązaniami, które zostały otrzymane w pracy [19] i [20]. (W niniejszej pracy otrzymano większą liczbę rozwiązań dla obszarów ograniczonych, niż w wymienionych pracach).

3. Z zamieszczonych wykresów wynika, że naprężenia wywołane działaniem nieustalonych pól temperatur osiągają w pewnej części obszaru wartości (bezwzględne) większe, niż odpowiednie naprężenia wywołane działaniem ustalonych pól temperatur.

4. Czas trwania naprężeń przekraczających wielkości dopuszczalne zależy od grubości płyty. W tej części wzoru, która zależy od czasu, występuje funkcja wykładnicza, której ujemny wykładnik jest wprost proporcjonalny do kwadratu wartości własnej γ_b , β_m lub ω_p . Wartości te są pierwiastkami równań przestępnych $\cos(\beta h) = 0$ i $\sin(\gamma h) = 0$. Wartości te są odwrotnie proporcjonalne do grubości płyty $2h$.

5. Z uwagi 4 można wyciągnąć wniosek, że płytę, której powierzchnia podlega nagłym ogrzaniom, należy projektować na minimum grubości. «Zapas» grubości wpływa na zmniejszenie trwałości konstrukcji.

6. We wszystkich rozważanych przypadkach składowe stanu naprężenia σ_{iz} charakteryzują się następującymi własnościami:

- a) część wzoru, która jest funkcją miejsca, równa się zeru;
- b) część, która zależy od miejsca i czasu dąży do zera, gdy $t \rightarrow \infty$;
- c) całka po grubości płyty z naprężeń stycznych σ_{iz} równa się zeru.

7. Z podanych wykresów wynika, że dla małych czasów największe naprężenia występują w warstwach powierzchniowych płyty i wtedy należy posługiwać się podanymi rozwiązaniami asymptotycznymi, ponieważ rozwiązania ściśle wyrażają się szeregami bardzo wolno zbieżnymi dla małych czasów.

8. Podane rozwiązania odnoszą się do ogrzewania scharakteryzowanego w czasie funkcją Heavyside'a. Stosując całkę Duhamela możemy bez trudu przystosować podane wzory do przypadku dowolnie zmiennego w czasie ogrzewania płyty.

Literatura cytowana w tekście

- [1] H. BATEMAN, *Tables of Integral Transforms*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York 1954.
- [2] H. C. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Press, 1950.
- [3] W. DERSKI, *Nieustalone naprężenia cieplne w nieskończonej rurze grubościowej*, Arch. Inżyn. Łódzkiej, 2, 4 (1958).
- [4] W. DERSKI, *Stan naprężenia i przemieszczenia w grubej płycie kołowej, wywołany działaniem nieustalonego pola temperatury*, Rozpr. Inż., 1, 9 (1961).
- [5] W. DERSKI, *The State of Stress and Displacement in a Thick Circular Plate due to a Non-Stationary Temperature Field*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Tech., 1, 7 (1959).
- [6] Б. Г. ГИЛЕРКИН, *Определение напряжений и деформаций в упругом изотропном теле при помощи трех функций*, Собр. Соч., Москва 1952.
- [7] B. E., GATEWOOD, *Thermal Stresses*, McGraw-Hill, New York 1957.
- [8] K. GIRKMAN, *Dźwigary powierzchniowe* (tłum. z niem.), Warszawa 1958 Arkady.
- [9] S. GOLDSTEIN, *Proc. Lond. Math. Soc.*, ser. 2, Vol. 34, 1939.
- [10] J. N. GOODIER, *On the Integration of Thermo-Elastic Equations*, *Phil. Mag.*, Vol. 23, 23, 1937.
- [11] A. GRAY and Mc ROBERT, *A Treatise on Bessel Functions*, Londyn 1952.
- [12] M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, t. 4 i 5, Warszawa PWN 1954.
- [13] K. KNOPP, *Szeregi nieskończone* (tłum. z niem.), Warszawa 1956 PWN.
- [14] A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge Univ. Press, 1927.
- [15] N. W. McLACHLAN, *Bessel Functions*, Oxford Press, 1955.
- [16] E. MELAN, *Spannungen infolge nichtstationärer Temperaturfelder*, Österreich. Ing.-Archiv, 2—3, 9 1955.
- [17] E. MELAN, H. PARKUS, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Wieden 1953.
- [18] A. NÁDAI, *Elastische Platten*, Berlin 1925.
- [19] W. NOWACKI, *Stan naprężenia w grubej płycie kołowej, wywołany działaniem pola temperatury*, AIL, 4, 3 (1957).
- [20] W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1960 PWN.

- [21] H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Wiedeń 1959.
 [22] I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill 1951.
 [23] A. TIMPE, *Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern*, ZAMM, 1924.
 [24] G. TOLSTOW, *Szeregi Fouriera* (tłum. z ros.), Warszawa 1954 PWN.
 [25] C. J. TRANTER, *Integral Transforms in Mathematical Physics*, Londyn 1950.
 [26] K. W. WAGNER, *Rachunek operatorowy i przekształcenie Laplace'a* (tłum. z niem.), Warszawa 1960 PWN.
 [27] G. N. WATSON, *The Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press. 1944.

Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ТОЛСТЫХ ПЛАСТИНКАХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Работа состоит из трех частей. В первой части рассматривается круговая пластинка, а вторая касается прямоугольной пластинки. В третьей же приводится дискуссия результатов и числовой пример.

Цель работы состоит в определении напряженного состояния и перемещения в пластинках толщиной $2h$, вызванных действием нестационарного температурного поля. Поверхностный нагрев определяется с помощью данного распределения температуры. Рассматриваются три случая поверхностного нагрева. В первом случае область и характер поверхностного нагрева симметричен по отношению к срединной плоскости пластинки $z = 0$. Во втором случае температурное поле определяется антисимметричными краевыми условиями по отношению к плоскости $z = 0$. В третьем случае область поверхностного нагрева находится только на плоскости $z = h$. В каждом из этих случаев проводится дискуссия физически возможных случаев термических краевых условий на той части края пластинки, которая не является областью поверхностного нагрева.

Для определения составляющих перемещения и напряженного состояния используется общеизвестная функция потенциала температурного перемещения.

На поверхностях $z = \pm h$ механическим краевым условиям удовлетворяются точно, а на боковых поверхностях — интегральным способом. В случае прямоугольных пластинок даже приближенное удовлетворение краевым условиям на боковых поверхностях довело к бесконечной системе уравнений.

Полученные решения имеют вид одинарных, двойных и тройных тригонометрических рядов, которые для малых значений времени оказались медленно сходимыми. Для устранения этого даются асимптотические решения, возможные для малых времен.

Summary

THE STATE OF STRESS AND DISPLACEMENT IN THICK PLATES PRODUCED BY A NON-STEADY-STATE TEMPERATURE FIELD

The paper is composed of three parts. The first is devoted to a circular plate, the second — to a rectangular plate and the third contains a discussion of the results and a numerical example.

The aim of the paper is the determination of the state of stress and displacement in a thick plate, due to the action of a non-steady-state temperature field. The thermal action is determined by means of a prescribed temperature distribution. Three cases are considered. In the first the region and the character of the thermal action is symmetric in relation to the middle plane of the plate $z = 0$. In the second — the temperature field is determined by boundary conditions asymmetric

in relation to the plane $z = 0$. In the third case the region of thermal action lies in the plane $z = h$ only. In each of these three cases are discussed physically possible thermal boundary conditions on the part of the boundary that does not constitute the region of thermal action.

To determine the stress and displacement components the potential of thermoelastic displacement is used as usually.

Mechanical boundary conditions are satisfied in an accurate manner on the surfaces $z = \pm h$ and in the integral manner on the lateral surfaces. In the case of rectangular plates even an approximate satisfaction of the boundary conditions on the lateral surfaces leads to an infinite system of differential equations.

The solutions obtained have the form of simple double and triple trigonometric series converging slowly for small values of time. To overcome this difficulty asymptotic solutions are given valid for small values of time.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA
WYDZIAŁ BUDOWNICTWA LĄDOWEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 czerwca 1961 r.
