VÁCLAV VODIČKA

DRGANIA SWOBODNE NIEJEDNORODNEJ BŁONY PIERŚCIENIOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXL

TOM X • ZESZYT 4 • ROK 1962

SPIS TREŚCI

Wstęp

Praca niniejsza poświęcona jest zagadnieniu swobodnych drgań symetrycznych złożonej błony o kształcie pierścienia kołowego. Niektóre z podanych wyników nie były dotychczas znane.

1. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy błonę o kształcie pierścienia kołowego, ograniczonego promieniami ϱ_0 i ϱ_n, składającą się z n jednorodnych części

$$\varrho_{k-1} \leqslant \varrho \leqslant \varrho_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

których masa na jednostkę powierzchni wynosi odpowiednio σ_k. Zakładamy, że położenie równowagi błony pokrywa się z płaszczyzną $z = 0$, zaś błona poddana jest równomiernemu rozciąganiu siłami o wielkości S. Zagadnienie polega na wyznaczeniu swobodnych drgań błony, gdy jej początkowe przemieszczenia i szybkości dane są w postaci dwóch funkcji $f(\varrho)$, $g(\varrho)$ względem współrzędnej ϱ.

Z matematycznego punktu widzenia mamy znaleźć rozwiązanie $u_k = u_k(\varrho, t)$ równań

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = c_k^2\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial u_k}{\partial \varrho}\right), \quad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad c_k^2 = \frac{S}{\sigma_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{1.1}$$

przy warunkach

$$u_1(\varrho_0, t) = 0, \qquad u_n(\varrho_n, t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} u_{k+1}(\varrho_k, t) = u_k(\varrho_k, t), \qquad t > 0, \\ \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \varrho} = \frac{\partial u_k}{\partial \varrho}, \qquad \varrho = \varrho_k, \qquad t > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$u_k(\varrho, 0) = f(\varrho), \qquad \left[\frac{\partial u_k}{\partial t}\right]_{t=0} = g(\varrho), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

2. Całki szczególne

Przyjmijmy całki $v_k = v_k(\varrho, t)$ równań (1.1) w postaci

$$
(2.1) \quad \begin{aligned} & v_k(\varrho, t) = R_k(\varrho)\, T(t), \qquad R_k(\varrho) = A_k J_0(\lambda_k \varrho) + B_k Y_0(\lambda_k \varrho), \\ & T(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t, \qquad \lambda_k = \frac{\omega}{c_k}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \end{aligned}
$$

Z warunków (1.2), (1.3) znajdujemy wtedy układ równań

$$
(2.2) \quad A_1 J_0(\lambda_1 \varrho_0) + B_1 Y_0(\lambda_1 \varrho_0) = A_n J_0(\lambda_n \varrho_n) + B_n Y_0(\lambda_n \varrho_n) = 0
$$

$$
(2.3) \quad \begin{aligned} & A_{k+1} J_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) + B_{k+1} Y_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) = A_k J_0(\lambda_k \varrho_k) + B_k Y_0(\lambda_k \varrho_k), \\ & A_{k+1} J_1(\lambda_{k+1} \varrho_k) + B_{k+1} Y_1(\lambda_{k+1} \varrho_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} [A_k J_1(\lambda_k \varrho_k) + \\ & \qquad + B_k Y_1(\lambda_k \varrho_k)], \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1. \end{aligned}
$$

Korzystając z Wrońskianu $W\{J_0, Y_0\}$

$$
J_1(x)\, Y_0(x) - J_0(x)\, Y_1(x) = \frac{2}{\pi x}
$$

możemy napisać równania (2.3) w innej postaci

$$
A_{k+1} = \frac{\pi}{2} \lambda_{k+1} \varrho_k (a_k A_k + \alpha_k B_k), \qquad B_{k+1} = \frac{\pi}{2} \lambda_{k+1} \varrho_k (b_k A_k + \beta_k B_k),
$$

$$
(2.3.1) \quad \begin{aligned} & a_k = a_k(\omega) = \Lambda_k J_1(\lambda_k \varrho_k) Y_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) - J_0(\lambda_k \varrho_k) Y_1(\lambda_{k+1} \varrho_k), \\ & \alpha_k = \alpha_k(\omega) = \Lambda_k Y_1(\lambda_k \varrho_k) Y_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) - Y_0(\lambda_k \varrho_k) Y_1(\lambda_{k+1} \varrho_k), \\ & b_k = b_k(\omega) = -\Lambda_k J_1(\lambda_k \varrho_k) J_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) + J_0(\lambda_k \varrho_k) J_1(\lambda_{k+1} \varrho_k), \\ & \beta_k = \beta_k(\omega) = -\Lambda_k Y_1(\lambda_k \varrho_k) J_0(\lambda_{k+1} \varrho_k) + Y_0(\lambda_k \varrho_k) J_1(\lambda_{k+1} \varrho_k), \end{aligned}
$$

$$
\Lambda_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1.
$$

3. Równanie charakterystyczne i widmo wartości własnych

Pisząc związki (2.3.1) w postaci macierzy, [1], [2],

$$
(3.1) \quad \begin{aligned} & K_{k+1} = \frac{\pi}{2} \lambda_{k+1} \varrho_k M_k(\omega) K_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ & K_k = \left\| \begin{matrix} A_k \\ B_k \end{matrix} \right\|, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad M_k(\omega) = \left\| \begin{matrix} a_k(\omega), \alpha_k(\omega) \\ b_k(\omega), \beta_k(\omega) \end{matrix} \right\|, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \end{aligned}
$$

możemy łatwo znaleźć wyrażenie na wszystkie nie znane współczynniki A_k, B_k ($1 \leqslant k \leqslant n$) w zależności od nie określonych wartości A_1, B_1:

$$
(3.2) \quad \begin{aligned} & K_{k+1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{k+1} \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_k Q_k(\omega) \left\| \begin{matrix} A_1 \\ B_1 \end{matrix} \right\|, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ & Q_k(\omega) = M_k(\omega) M_{k-1}(\omega) \ldots M_2(\omega) M_1(\omega), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1. \end{aligned}
$$

Wprowadzając oznaczenia

(3.3) $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_k = \varrho^{(k)}, \quad \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{k+1} = \lambda^{(k)}, \quad Q_k(\omega) = \|q_k^{(r,s)}(\omega)\|,$

$$r, s = 1, 2, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

oraz korzystając z (3.2), otrzymujemy wyrażenia

$$\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \lambda^{(k)} \varrho^{(k)} \frac{(q_k^{(11)} A_1 + q_k^{(12)} B_1)}{(q_k^{(21)} A_1 + q_k^{(22)} B_1)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{3.4}$$

z pomocą których łatwo wyprowadzamy ze związków (2.2) równanie charakterystyczne o dość skomplikowanej postaci:

$$\begin{aligned} J_0(\lambda_1 \varrho_0) [q_{n-1}^{(12)}(\omega) J_0(\lambda_n \varrho_n) + q_{n-1}^{(22)}(\omega) Y_0(\lambda_n \varrho_n)] = \\ = Y_0(\lambda_1 \varrho_0) [q_{n-1}^{(11)}(\omega) J_0(\lambda_n \varrho_n) + q_{n-1}^{(21)}(\omega) Y_0(\lambda_n \varrho_n)]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wielkości λ_1, λ_n określone są związkami (2.1) w zależności od ω.

Dodatnie pierwiastki ω_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) równania (3.5) tworzą widmo wartości własnych zagadnienia, czyli częstości drgań składających się na wypadkowy ruch błony.

4. Rozwiązania szczególne

Rozważmy wartość własną ω_m. Z zależności (3.4) otrzymujemy układ współczynników, odpowiadających tej wartości własnej

$$A_{k+1,m} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \lambda_m^{(k)} \varrho^{(k)} [q_k^{(11)}(\omega_m) A_{1m} + q_k^{(12)}(\omega_m) B_{1m}],$$

$$B_{k+1,m} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \lambda_m^{(k)} \varrho^{(k)} [q_k^{(21)}(\omega_m) A_{1m} + q_k^{(22)}(\omega_m) B_{1m}], \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Tutaj

$$\lambda_{km} = \frac{\omega_m}{c_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \lambda_m^{(k)} \leqslant \lambda_{2m} \lambda_{3m} \dots \lambda_{k+1,m}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{4.1}$$

zaś wartości A_{1m}, B_{1m} spełniają pierwszy ze związków (2.2), to znaczy

$$A_{1m} J_0(\lambda_{1m} \varrho_0) + B_{1m} Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0) = 0. \tag{4.1.1}$$

Wstawienie tych wyrażeń do (2.1) prowadzi do rozwiązania szczególnego

$$v_{km}(\varrho, t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \lambda_m^{(k-1)} \varrho^{(k-1)} S_{km}(\varrho) T_m(t), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{4.2}$$

gdzie

$$\lambda_m^{(0)} = \varrho^{(0)} = 1, \quad S_{1m}(\varrho) = Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0) J_0(\lambda_{1m} \varrho) - J_0(\lambda_{1m} \varrho_0) Y_0(\lambda_{1m} \varrho),$$

$$\begin{aligned} S_{km}(\varrho) = [q_{k-1}^{(11)}(\omega_m) Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0) - q_{k-1}^{(12)}(\omega_m) J_0(\lambda_{1m} \varrho_0)] J_0(\lambda_{km} \varrho) + \\ + [q_{k-1}^{(21)}(\omega_m) Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0) - q_{k-1}^{(22)}(\omega_m) J_0(\lambda_{1m} \varrho_0)] Y_0(\lambda_{km} \varrho), \quad 2 \leqslant k \leqslant n, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

$$T_m(t) = \frac{A_{1m}}{Y_0(\lambda_{1m} \varrho_0)} (C \cos \omega_m t + D \sin \omega_m t).$$

5. Pomocnicze warunki ortogonalności

Spróbujmy teraz znaleźć pewne związki ortogonalności między funkcjami własnymi $S_{km}(\varrho)$ występującymi w (4.2). Ta interesująca próba opiera się na stwierdzeniu, że wyrażenia (4.2) spełniają zarówno układ równań (1.1), jak i warunki (1.2), (1.3).

Ujęcie matematyczne prowadzi do układu równań [symbol (′) wprowadzono dla oznaczenia pochodnych względem ϱ]

$$\frac{d}{d\varrho}(\varrho S'_{km})+\lambda_{km}^2\varrho S_{km}=0, \quad 1\leqslant k\leqslant n, \tag{5.1}$$

$$S_{1m}(\varrho_0)=0, \quad S_{nm}(\varrho_n)=0, \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2}\lambda_{k+1,m}\varrho_k S_{k+1,m}(\varrho_k)=S_{km}(\varrho_k),\\ &\frac{\pi}{2}\lambda_{k+1,m}\varrho_k S'_{k+1,m}(\varrho_k)=S'_{km}(\varrho_k), \quad 1\leqslant k\leqslant n-1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Równania te spełnione są dla $m=1,2,3,\ldots$. Dla pewnych dwóch wartości własnych ω_m, ω_q otrzymujemy ze związków (5.1)

$$(\lambda_{km}^2-\lambda_{kq}^2)\varrho S_{km}S_{kq}=S_{km}\frac{d}{d\varrho}(\varrho S'_{kq})-S_{kq}\frac{d}{d\varrho}(\varrho S'_{km})=$$

$$=\frac{d}{d\varrho}[\varrho(S_{km}S'_{kq}-S'_{km}S_{kq})], \quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Całkując to wyrażenie w granicach $\varrho_{k-1}\leqslant\varrho\leqslant\varrho_k$, znajdujemy

$$(\lambda_{km}^2-\lambda_{kq}^2)\int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k}\varrho S_{km}(\varrho)S_{kq}(\varrho)\,d\varrho=\varrho_k\begin{vmatrix} S_{km}(\varrho_k), & S_{kq}(\varrho_k)\\ S'_{km}(\varrho_k), & S'_{kq}(\varrho_k)\end{vmatrix}-$$

$$-\varrho_{k-1}\begin{vmatrix} S_{km}(\varrho_{k-1}), & S_{kq}(\varrho_{k-1})\\ S'_{km}(\varrho_{k-1}), & S'_{kq}(\varrho_{k-1})\end{vmatrix}, \quad 1\leqslant k\leqslant n, \quad m,q=1,2,3,\ldots$$

Jednak, zgodnie z (5.3), mamy ogólnie

$$S_k(\varrho_{k-1})=\frac{2}{\pi\lambda_k\varrho_{k-1}}S_{k-1}(\varrho_{k-1}), \quad S'_k(\varrho_{k-1})=\frac{2}{\pi\lambda_k\varrho_{k-1}}S'_{k-1}(\varrho_{k-1}), \quad 2\leqslant k\leqslant n,$$

stąd nasze poprzednie związki całkowe przyjmują postać

$$(\lambda_{km}^2-\lambda_{kq}^2)\int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k}\varrho S_{km}(\varrho)S_{kq}(\varrho)\,d\varrho=D_{kmq}-H_{k-1,mq}D_{k-1,mq},$$

$$D_{kmq}=\varrho_k\begin{vmatrix} S_{km}(\varrho_k), & S_{kq}(\varrho_k)\\ S'_{km}(\varrho_k), & S'_{kq}(\varrho_k)\end{vmatrix}, \quad H_{k-1,mq}=\frac{2^2}{\pi^2\varrho_{k-1}^2\lambda_{km}\lambda_{kq}}, \quad 1\leqslant k\leqslant n;$$

oczywiście dla $k=1$ należy napisać zero zamiast $H_{0mq}D_{0mq}$.

Wprowadzenie oznaczeń

$$H_{mq}^{(k)} = H_{kmq} H_{k+1,mq} \dots H_{n-1,mq}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad H_{mq}^{(n)} = 1$$

i utworzenie liniowej kombinacji podanych poprzednio wyrażeń całkowych ze współczynnikami $H_{mq}^{(1)}, H_{mq}^{(2)}, \dots, H_{mq}^{(n)}$ daje [porównaj również drugi ze związków (5.2)]

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_{km}^2 - \lambda_{kq}^2) H_{mq}^{(k)} \int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{km}(\varrho) S_{kq}(\varrho) d\varrho = H_{mq}^{(n)} D_{nmq} = 0, \quad m, q = 1, 2, 3, \dots .$$

Łatwo teraz zauważyć, że

$$H_{mq}^{(k)} = \left(\frac{2^{n-k} \varrho^{(k-1)}}{\pi^{n-k} \varrho^{(n-1)}} \right)^2 \frac{\lambda_m^{(k-1)} \lambda_q^{(k-1)}}{\lambda_m^{(n-1)} \lambda_q^{(n-1)}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

zaś poprzednie równanie przyjmuje postać [porównaj określenie λ_{km} w (4.1)]

$$(\omega_m^2 - \omega_q^2) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi^k \varrho^{(k-1)}}{2^k c_k} \right) \lambda_m^{(k-1)} \lambda_q^{(k-1)} \int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{km}(\varrho) S_{kq}(\varrho) d\varrho = 0,$$

$$m, q = 1, 2, 3, \dots .$$

Otrzymujemy stąd warunki ortogonalności

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi^k \varrho^{(k-1)}}{2^k c_k} \right) \lambda_m^{(k-1)} \lambda_q^{(k-1)} \int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{km}(\varrho) S_{kq}(\varrho) d\varrho = 0, \tag{5.4}$$

$$m \neq q, \; m, q = 1, 2, 3, \dots$$

konieczne do zbudowania ogólnego rozwiązania naszego zagadnienia.

6. Rozwiązanie zagadnienia ruchu błony

Zanim przystąpimy do zbudowania poszukiwanego rozwiązania, zwróćmy uwagę, że zależności (5.4) pozwalają na napisanie rozwinięcia

$$\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \lambda_m^{(k-1)} S_{km}(\varrho) = F_k(\varrho), \quad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$\gamma_m = \frac{Z_m}{N_m}, \quad Z_m = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi^k \varrho^{(k-1)}}{2^k c_k} \right)^2 \lambda_m^{(k-1)} \int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{km}(\varrho) F_k(\varrho) d\varrho, \tag{6.1}$$

$$N_m = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi^k \varrho^{(k-1)} \lambda_m^{(k-1)}}{2^k c_k} \right)^2 \int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{km}^2(\varrho) d\varrho, \quad m = 1, 2, 3, \dots .$$

Wracając do poszukiwanego rozwiązania $u_k(\varrho, t)$ zagadnienia opisanego związkami (1.1)-(1.4), przyjmujemy jak zwykle

$$(6.2) \qquad u_k(\varrho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_{km}(\varrho, t), \qquad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

gdzie wyrażenia $v_{km}(\varrho, t)$ są określone przez (4.2), (4.2.1). Zatem jedyna para nie spełnionych warunków (1.4) przyjmie postać

$$(6.3) \qquad \begin{aligned} C\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \varrho^{(k-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{1m}}{Y_0(\lambda_{1m}\varrho_0)} \lambda_m^{(k-1)} S_{km}(\varrho) &= f(\varrho), \\ D\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \varrho^{(k-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega_m A_{1m}}{Y_0(\lambda_{1m}\varrho_0)} \lambda_m^{(k-1)} S_{km}(\varrho) &= g(\varrho), \\ \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \end{aligned}$$

Z porównania (6.3) i (6.1) otrzymujemy

$$(6.4) \qquad \frac{CA_{1m}}{Y_0(\lambda_{1m}\varrho_0)} = \frac{f_m}{N_m}, \qquad \frac{DA_{1m}}{Y_0(\lambda_{1m}\varrho_0)} = \frac{g_m}{\omega_m N_m}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdzie N_m jest określone przez (6.1), zaś f_m, g_m należy obliczyć z wzorów

$$(6.4.1) \qquad \begin{matrix} f_m \\ g_m \end{matrix} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^{k+1} \varrho^{(k-1)}}{2^{k+1} c_k^2} \lambda_m^{(k-1)} \int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{km}(\varrho) \begin{matrix} f(\varrho) \\ g(\varrho) \end{matrix} d\varrho, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykorzystanie tych związków oraz zależności (4.2), (4.2.1) prowadzi do uzyskania ostatecznego rozwiązania (6.2) w postaci

$$(6.5) \qquad u_k(\varrho, t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \varrho^{(k-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^{(k-1)}}{N_m} S_{km}(\varrho) \left(f_m \cos \omega_m t + \frac{g_m}{\omega_m} \sin \omega_m t \right), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

7. Zestawienie wyników

Uważamy, że korzystne jest podanie krótkiego streszczenia rozważań, które doprowadziły do naszego skomplikowanego wyniku (6.5).

1. Wychodząc z założonych stałych S, σ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_{n-1}$ wyznaczamy na wstępie wielkości pomocnicze

$$(7.1) \qquad c_k = \sqrt{\frac{S}{\sigma_k}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \varrho^{(0)} = 1, \quad \varrho^{(k)} = \varrho_1 \varrho_2, \ldots, \varrho_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

i budujemy wyrażenia

$$(7.2) \qquad \lambda_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n;$$

ω jest nieokreślonym parametrem.

2. Stosujemy wzory (2.3.1) i (3.1) do skonstruowania macierzy $M_k(\omega)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, które służą do ustawienia innego układu macierzy $Q_k(\omega)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, zgodnie z (3.2).

3. Znajomość elementów $q_k^{(r,s)}(\omega)$ macierzy $Q_k(\omega)$, gdzie $r, s = 1, 2$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, pozwala napisać równanie charakterystyczne (3.5) i znaleźć jego dodatnie pierwiastki ω_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$, czyli widmo wartości własnych naszego zagadnienia.

4. Wzory (4.1) pozwalają na wyznaczenie wielkości λ_{km}, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\lambda_m^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $m = 1, 2, 3, \ldots$; prócz tego mamy $\lambda_m^{(0)} = 1$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

5. Wykorzystanie (4.2.1) prowadzi do wyznaczenia funkcji własnych $S_{km}(\varrho)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

6. Z poprzednich wyników uzyskujemy możliwość wyznaczenia wielkości N_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$, zgodnie z (6.1), oraz współczynników Fouriera f_m, g_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$, wyznaczonych przez (6.4.1).

7. Po przeprowadzeniu operacji wskazanych w punktach 1 6 znajdujemy ostateczne rozwiązanie zagadnienia w postaci wzoru (6.5).

8. Błona jednorodna

Dla zilustrowania przeprowadzonych rozważań teoretycznych przynajmniej jednym prostym przykładem, rozważmy przypadek błony jednorodnej $\varrho_0 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_n$ o gęstości powierzchniowej σ, poddanej równomiernemu rozciąganiu siłami o wielkości S.

Mamy wtedy

$$c_k = c = \sqrt{\frac{S}{\sigma}}, \quad \lambda_k = \lambda = \frac{\omega}{c}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \Lambda_k = 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

zaś ze wzorów (2.3.1) otrzymujemy

$$a_k(\omega) = \beta_k(\omega) = \frac{2}{\pi\lambda\varrho_k}, \quad \alpha_k(\omega) = b_k(\omega) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Stąd oraz z (3.1) i (3.2) mamy

$$M_k(\omega) = \frac{2}{\pi\lambda\varrho_k}\begin{Vmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{Vmatrix}, \quad Q_k(\omega) = \frac{2^k}{\pi^k \lambda^k \varrho^{(k)}}\begin{Vmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{Vmatrix}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Wykorzystując podane zależności otrzymujemy równanie charakterystyczne (3.5) w postaci

$$J_0(\lambda\varrho_0)\, Y_0(\lambda\varrho_n) - J_0(\lambda\varrho_n)\, Y_0(\lambda\varrho_0) = 0. \tag{8.1}$$

Z dodatnich pierwiastków ω_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$ tego równania znajdujemy (por. (4.1) i (4.2.1))

$$\lambda_{km} = \lambda_m = \frac{\omega_m}{c}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \lambda_m^{(k)} = \lambda_m^k, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1, \quad m = 1, 2, 3, \ldots;$$

Znając λ_{km} otrzymujemy z (4.2.1) układ funkcji własnych

$$S_{km}(\varrho) = \frac{2^{k-1}}{\pi^{k-1}\varrho^{(k-1)}\lambda_m^{k-1}}\left[Y_0(\lambda_m\varrho_0)J_0(\lambda_m\varrho) - J_0(\lambda_m\varrho_0)Y_0(\lambda_m\varrho)\right],$$
$$1 \leqslant k \leqslant n, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

a ze wzorów (6.1) i (6.4.1) mamy

$$N_m = \frac{\pi^2}{4c^2}\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho_n} \varrho\left[Y_0(\lambda_m\varrho_0)J_0(\lambda_m\varrho) - J_0(\lambda_m\varrho_0)Y_0(\lambda_m\varrho)\right]^2 d\varrho = \\ = \frac{J_0^2(\lambda_m\varrho_0) - J_0^2(\lambda_m\varrho_n)}{2c^2\lambda_m^2 J_0^2(\lambda_m\varrho_0)},$$

$$\begin{matrix} f_m \\ g_m \end{matrix} = \frac{\pi^2}{4c^2}\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho_n} \varrho\left[Y_0(\lambda_m\varrho_0)J_0(\lambda_m\varrho) - J_0(\lambda_m\varrho_0)Y_0(\lambda_m\varrho)\right]\begin{matrix} f(\varrho) \\ g(\varrho) \end{matrix}\, d\varrho.$$

Podstawiając otrzymane wyniki do rozwiązania (6.5) znajdujemy rozwiązanie ogólne zagadnienia sformułowanego związkami (1.1)-(1.4)

$$(8.2) \qquad u(\varrho, t) = \frac{\pi^2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m^2 J_0^2(\lambda_m\varrho_0)\,U(\lambda_m\varrho)}{J_0^2(\lambda_m\varrho_0) - J_0^2(\lambda_m\varrho_n)}\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho_n}\varrho U(\lambda_m\varrho)\Big[f(\varrho)\cos\lambda_m ct + \\ + \frac{g(\varrho)}{c\lambda_m}\sin\lambda_m ct\Big]d\varrho, \qquad \varrho_0 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_n, \qquad t \geqslant 0.$$

Tutaj λ_m oznaczają dodatnie pierwiastki równania charakterystycznego (8.1), zaś przez $U(\lambda_m\varrho)$ oznaczono

$$(8.2.1) \qquad U(\lambda_m\varrho) = Y_0(\lambda_m\varrho_0)J_0(\lambda_m\varrho) - J_0(\lambda_m\varrho_0)Y_0(\lambda_m\varrho).$$

Literatura cytowana w tekście

[1] V. Vodička, Fourier's Classical Problem in the Case of Stratiform Bodies, Arch. Mech. Stos. **1**, **12** (1960).

[2] V. Vodička, Steady Temperature in a Composite Elliptic Cylinder, J. Phys. Soc. Japan **16** (1961), 1630.

Резюме

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ МЕМБРАНЫ

Мембрана в форме кругового кольца $\varrho_0 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_n$ состоит из n однородных частей $\varrho_{k-1} \leqslant \varrho \leqslant \varrho_k, 1 \leqslant k \leqslant n$ плотность поверхности которых равняется $\sigma_k, 1 \leqslant k \leqslant n$.

Следует найти собственные колебания, если начальное состояние определяется данными функциями $f(\varrho)$, $g(\varrho)$ и мембрана растягивается равномерными усилиями S.

Решение получено классическим методом характеристических функций, который представляет интересную точку зрения на этого рода вопрос, и отличается формальными достоинствами. Общие результаты применялись к специальному случаю однородной мембраны.

Summary

FREE VIBRATIONS OF NON-HOMOGENEOUS MEMBRANES

An annular membrane $\varrho_0 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_n$ is assumed to be composed of n homogeneous parts $\varrho_{k-1} \leqslant \varrho \leqslant \varrho_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$ with surface densities σ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. The problem is to determine the natural vibration if the initial state is determined by given functions $f(\varrho)$, $g(\varrho)$ and the membrane is subject to a uniform tension S.

The solution is obtained by means of the classical method of characteristic functions, which gives an interesting view of these problems and has formal advantages. The general results are applied to the special case of a homogeneous membrane.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 stycznia 1962 r.