

ANDRÉ RIPIANU

WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI SKRĘTNYCH DRGAŃ WŁASNYCH  
SILNIKA RZĘDOWEGO Z DOŁĄCZONYMI MASAMI BOCZNYMI

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CLXXXII

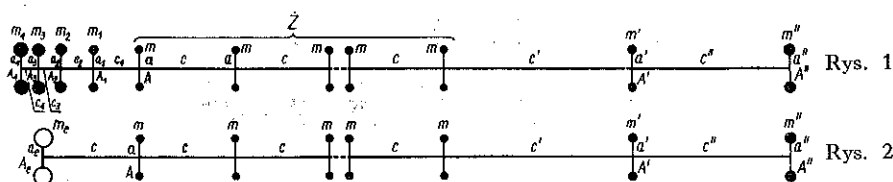
TOM IX • ZESZYT 1 • ROK 1961

1. Większość stosowanych zwykle metod wyznaczania częstości skrętnych drgań własnych wałów wykorbionych wymaga żmudnych rachunków z powodu konieczności przeprowadzenia dużej liczby prób.

Metoda wykreslna podana przez OTTO KRAEMERA, [1], i BERTHOLDA FRANKA, [2], oraz uzupełniona przez ROBERTA ARNOLDA, [3], pozwala wyznaczyć częstości własne wałów wykorbionych bez żadnych prób. W niniejszej pracy podamy zastosowanie tej metody w przypadku bardziej skomplikowanym, mianowicie silnika rzędowego o  $k$  cylindrach z dołączonymi 6-cioma masami bocznymi, z których 4 znajdują się po jednej stronie silnika, a 2 pozostałe po drugiej stronie.

Analogiczne obliczenie można wykonać dla dowolnej liczby mas bocznych otaczających silnik rzędowy. Im tych mas jest więcej, tym bardziej skomplikowane będą rachunki.

2. Rozpatrzmy silnik rzędowy o  $k$  cylindrach (masy napędzające) otoczony masami bocznymi  $M_1, M_2, M_3$  i  $M_4$  z jednej strony i  $M', M''$  z drugiej strony.



Przeprowadzimy redukcję mas i długości otrzymując schemat pokazany na rys. 1, na którym oznaczono:  $m$  przedstawia zredukowaną na promień  $r_0$  masę elementów wirujących oraz części masy układu korbowego, przypadających na jeden cylinder silnika rzędowego w  $\text{kG cm}^{-1} \text{sek}^2$ ;  $m_1, m_2, m_3, m_4$  zredukowane na promień  $r_0$  masy boczne  $M_1, M_2, M_3, M_4$  w  $\text{kG cm}^{-1} \text{sek}^2$ ;  $m', m''$  zredukowane na promień  $r_0$  masy boczne  $M'$  i  $M''$  w  $\text{kG cm}^{-1} \text{sek}^2$ ;

$$c = \frac{C}{r_0^2}, \quad c_1 = \frac{C_1}{r_0^2}, \quad c_2 = \frac{C_2}{r_0^2}, \quad c_3 = \frac{C_3}{r_0^2}, \quad c_4 = \frac{C_4}{r_0^2}, \quad c' = \frac{C'}{r_0^2}, \quad c'' = \frac{C''}{r_0^2}$$

oznaczają stosunki pomiędzy współczynnikami sztywności na skręcanie różnych części wału, zawartych pomiędzy dwiema sąsiednimi masami oraz kwadratem

promienia redukcji w  $\text{kG cm}^{-1}$ ;  $a, a_1, a_2, a_3, a_4, a', a''$  — przemieszczenia liniowe drgań skrętnych, wykonywanych przez masy zredukowane  $m, m_1, m_2, m_3, m_4, m', m''$ , mierzone w cm na kole promienia redukcji  $r_0$ ;  $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A', A''$  — amplitudy liniowe drgań skrętnych, wykonywanych przez masy zredukowane  $m, m_1, m_2, m_3, m_4, m', m''$ , mierzone w cm na kole promienia redukcji  $r_0$ .

Zastąpimy masy zredukowane  $m_1, m_2, m_3, m_4$  zredukowaną masą równoważną dynamicznie  $m_e$  otrzymując układ zredukowany dynamicznie przedstawiony na rys. 2, na którym oznaczono:  $m_e$  oznacza masę zredukowaną dynamicznie równoważną układowi czterech mas zredukowanych  $m_1, m_2, m_3, m_4$ , mierzoną w  $\text{kG cm}^{-1} \text{ sek}^2$ ;  $a_e$  przemieszczenie liniowe drgań skrętnych, wykonywanych przez masę zredukowaną  $m_e$ , mierzone w cm na kole promienia redukcji  $r_0$ ,  $A_e$  amplitudę liniową drgań skrętnych, wykonywanych przez masę zredukowaną  $m_e$ , mierzoną w cm na kole promienia redukcji  $r_0$ .

Oznaczamy przez  $\omega$  własną częstość kątową swobodnych drgań skrętnych, wykonywanych przez układ  $k+6$  mas zredukowanych.

Wychodząc z zasady d'ALEMBERTA, wyrażonej w postaci kinetyczno-statycznej (lub równań LAGRANGE'A drugiego rodzaju) można napisać równania różniczkowe drgań skrętnych wykonywanych przez masy zredukowane  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_e$ :

$$m_4 \frac{d^2 a_4}{dt^2} + c_4 (a_4 - a_3) = 0,$$

$$m_3 \frac{d^2 a_3}{dt^2} + c_4 (a_3 - a_4) + c_3 (a_3 - a_2) = 0,$$

$$m_2 \frac{d^2 a_2}{dt^2} + c_3 (a_2 - a_3) + c_2 (a_2 - a_1) = 0,$$

$$m_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + c_2 (a_1 - a_2) + c_1 (a_1 - a) = 0,$$

$$m_e \frac{d^2 a_e}{dt^2} + c (a_e - a) = 0.$$

Wprowadzając do tych równań rozwiązania

$$a_4 = A_4 \cos(\omega t - \varepsilon), \quad a_3 = A_3 \cos(\omega t - \varepsilon),$$

$$a_2 = A_2 \cos(\omega t - \varepsilon), \quad a_1 = A_1 \cos(\omega t - \varepsilon), \quad a_e = A_e \cos(\omega t - \varepsilon),$$

otrzymamy układ równań:

$$(1) \quad m_4 A_4 \omega^2 - c_4 (A_4 - A_3) = 0,$$

$$(2) \quad m_4 A_4 \omega^2 + m_3 A_3 \omega^2 - c_3 (A_3 - A_2) = 0,$$

$$(3) \quad m_4 A_4 \omega^2 + m_3 A_3 \omega^2 + m_2 A_2 \omega^2 - c_2 (A_2 - A_1) = 0,$$

$$(4) \quad m_4 A_4 \omega^2 + m_3 A_3 \omega^2 + m_2 A_2 \omega^2 + m_1 A_1 \omega^2 - c_1 (A_1 - A) = 0,$$

$$(5) \quad m_e A_e \omega^2 - c (A_e - A) = 0.$$

Dodamy jeszcze warunek równoważności

$$(6) \quad c_1(A_1 - A) = c(A_e - A).$$

Oznaczmy przez  $\omega_p = \sqrt{c/m}$  częstość własną skrętnych drgań swobodnych wykonywanych przez samą masę zredukowaną  $m$ .

Określmy następnie funkcję  $B_e[(\omega/\omega_p)^2]$  przez zależność (por. [1]):

$$(7) \quad B_e = \frac{m}{m_e}.$$

Funkcja  $B_e[(\omega/\omega_p)^2]$  pozwala zastąpić masę zredukowaną  $m_e$  układem równoważnym dynamicznie, utworzonym z układu jednorodnego  $h$  mas  $m$  (rys. 3).

Eliminując amplitudy liniowe  $A_4, A_3, A_2, A_1, A, A_e$  z równań (1)-(7), otrzymamy wyrażenie na funkcję  $B_e[(\omega/\omega_p)^2]$ :

$$(8) \quad B_e \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right] = \left( 1 - \frac{c}{c_1} \right) \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 + \frac{m}{m_1} + \frac{m}{m_1} + \{ m_2 m_3 m_4 c_2 \omega^4 - \\ - [ m_2 m_3 c_2 c_4 + m_2 m_4 c_2 (c_3 + c_4) + m_3 m_4 c_2 c_3 ] \omega^2 + (m_2 + m_3 + m_4) c_2 c_3 c_4 \} : \\ : \{ m_1 m_2 m_3 m_4 \omega^6 - [ m_2 m_3 m_4 c_2 + m_1 m_3 m_4 (c_2 + c_3) + m_1 m_2 m_4 (c_3 + c_4) + \\ + m_1 m_2 m_3 c_4 ] \omega^4 + [ m_1 m_3 c_3 c_4 + m_1 m_3 c_4 (c_2 + c_3) + m_1 m_4 (c_2 c_3 + c_2 c_4 + c_3 c_4) + \\ + m_2 m_3 c_2 c_4 + m_2 m_4 c_2 (c_3 + c_4) + m_3 m_4 c_2 c_3 ] \omega^2 - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) c_2 c_3 c_4 \}.$$

Funkcję  $B_h = B_h[(\omega/\omega_p)^2]$  określimy następująco (por. [2])

$$(9) \quad B_h = \frac{\sin(2f)}{\operatorname{tg}(2hf)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2,$$

gdzie  $f = \arcsin(\omega/2\omega_p)$ , zaś  $h$  jest dowolną liczbą dodatnią całkowitą lub ułamkową.

Z wyrażenia (9) wynika

$$h = \frac{\arcsin \operatorname{tg} \frac{\sin(2f)}{B_h - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2}}{2f}.$$

Pewnej danej wartości zmiennej  $(\omega/\omega_p)^2$  odpowiada nieskończona liczba wartości funkcji  $h$  (por. [3]):

$$h_0, \quad h_0 + \left( \frac{\pi}{2f} \right), \quad h_0 + 2 \left( \frac{\pi}{2f} \right), \quad h_0 + 3 \left( \frac{\pi}{2f} \right), \dots$$

oraz

$$h_0, \quad h_0 - \left( \frac{\pi}{2f} \right), \quad h_0 - 2 \left( \frac{\pi}{2f} \right), \quad h_0 - 3 \left( \frac{\pi}{2f} \right), \dots$$

albo ogólnie

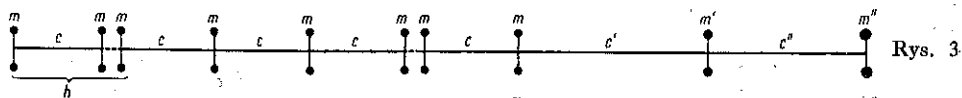
$$h = h_0 + \nu \left( \frac{\pi}{2f} \right),$$

gdzie  $\nu$  jest liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną.

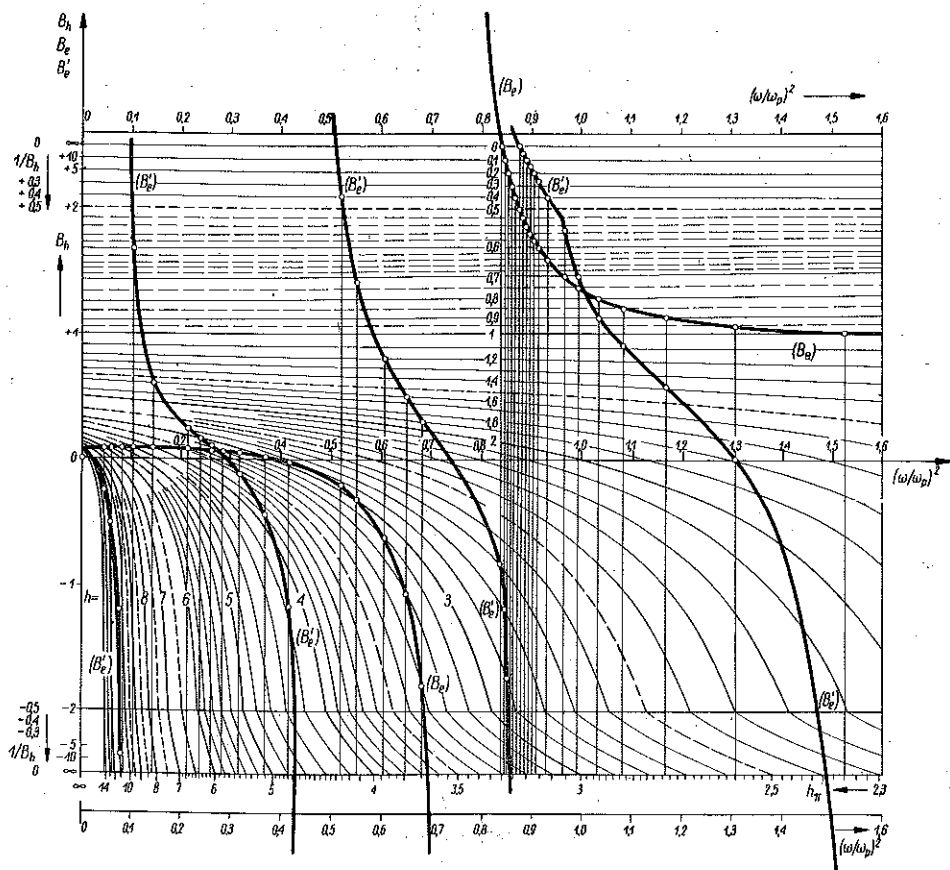
Oznaczmy (por. [3])

$$h_{\pi} = \frac{\pi}{2f} = \frac{\pi}{2 \arcsin\left(\frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_p}\right)} = f \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right].$$

Wartość  $h$  można zmniejszyć o całkowitą dowolną wielokrotność  $h_{\pi}$ , [1].

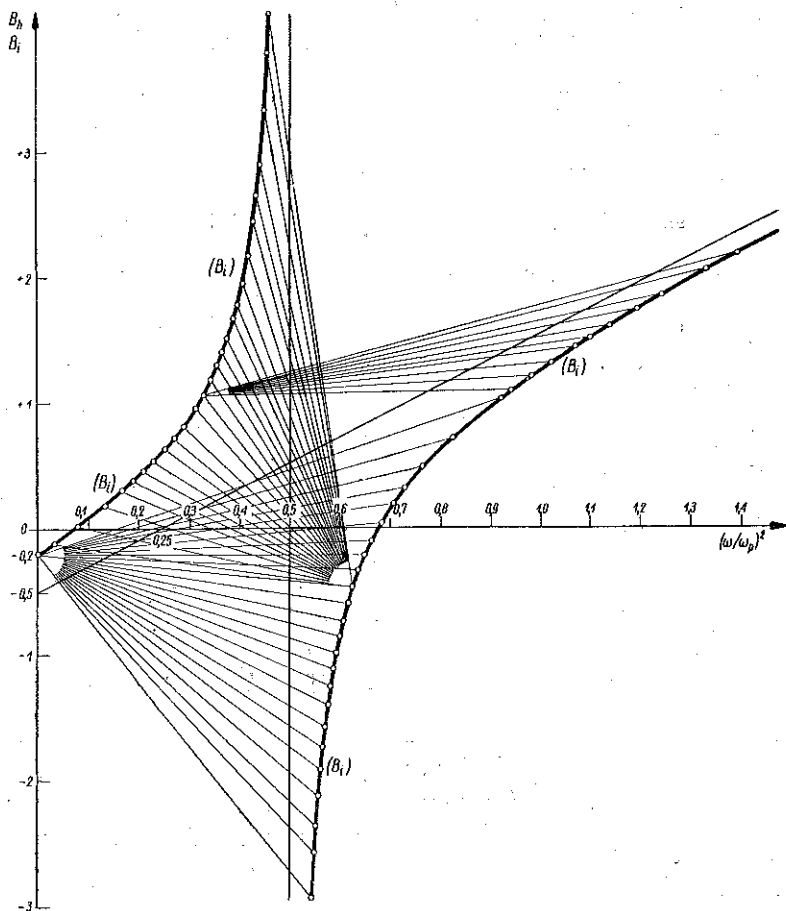


Wykreślmy krzywe  $B_h = B_h[\omega/\omega_p]^2$  (rys. 5), określone przez zależność (9), przyjmując różne wartości na  $h$ . W płaszczyźnie tych krzywych wykreślmy krzywą  $B_e = B_e[\omega/\omega_p]^2$ , określoną przez zależność (8) (rys. 5).



Rys. 5

Przez punkty przecięcia krzywej  $B_e$  z krzywymi  $B_n$  prowadzimy równoległe do osi  $OB_n$ , aż do przecięcia z krzywymi  $B_{n+k}$ , gdzie  $k$  jest liczbą cylindrów silnika rządowego. Gdy punkty przecięcia równoległych do osi  $OB_n$  krzywymi  $B_{n+k}$  wypadają poza rysunkiem, należy zmniejszyć sumę  $h+k$  o całkowitą odpowiednio dobraną wielokrotność  $h_n$  (por. [1]) i znaleźć punkty przecięcia równoległych do osi  $OB_n$  z krzywymi  $B_{n+k-nh_n}$ .



Rys. 6

Otrzymane w ten sposób punkty przecięcia łączymy ciągłą krzywą. Będzie to krzywa  $B'_e = B'_e[(\omega/\omega_p)^2]$  (rys. 5).

Zastąpimy następnie jednorodny układ utworzony z  $k + h$  mas  $m$  (rys. 3) masą równoważną  $m_E$  (rys. 4).

Na płaszczyźnie krzywych  $B_n = B_n[(\omega/\omega_p)^2]$  rysujemy hiperbole  $B_i = B_i[(\omega/\omega_p)^2]$ , odpowiadającą trzem masom  $m_E$ ,  $m'$  i  $m''$  por. [1]) (rys. 6).

Równaniem tej hiperboli jest:

$$(10) \quad B_i \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right] = \frac{c}{c'} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 - \frac{m}{m'} - \frac{\frac{m}{m'} \frac{c''}{m'} \frac{1}{\omega_p^2}}{\left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 - c'' \left( \frac{1}{m'} + \frac{1}{m''} \right) \frac{1}{\omega_p^2}}$$

Odcięte  $(\omega_1/\omega_p)^2$ ,  $(\omega_2/\omega_p)^2$ ,  $(\omega_3/\omega_p)^2, \dots$  punktów przecięcia krzywych  $B'_e = B'_e[(\omega/\omega_p)^2]$  i  $B_i = B_i[(\omega/\omega_p)^2]$  pozwalają wyznaczyć wartości częstości własnych  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  rozważanego układu  $z+6$  mas.

*Przykład liczbowy.* Przyjmujemy liczbę cylindrów silnika rządowego  $z = 6$  oraz następujące wartości liczbowe poszczególnych wielkości:

$$(11) \quad \begin{cases} m = 0,01 \text{ kG cm}^{-1} \text{ sek}^2, & c = 10000 \text{ kG cm}^{-1}, \\ m_1 = 0,02 \text{ kG cm}^{-1} \text{ sek}^2, & c_1 = 20000 \text{ kG cm}^{-1}, \\ m_2 = 0,03 \text{ kG cm}^{-1} \text{ sek}^2, & c_2 = 30000 \text{ kG cm}^{-1}, \\ m_3 = 0,04 \text{ kG cm}^{-1} \text{ sek}^2, & c_3 = 40000 \text{ kG cm}^{-1}, \\ m_4 = 0,05 \text{ kG cm}^{-1} \text{ sek}^2, & c_4 = 50000 \text{ kG cm}^{-1}, \\ m' = 0,02 \text{ kG cm}^{-1} \text{ sek}^2, & c' = 5000 \text{ kG cm}^{-1}, \\ m'' = 0,03 \text{ kG cm}^{-1} \text{ sek}^2, & c'' = 6000 \text{ kG cm}^{-1}. \end{cases}$$

Stąd wynika, że  $\omega_p^2 = 10^6 \text{ sek}^{-2}$ .

Wprowadzając wartości liczbowe (11) do zależności (8) otrzymamy:

$$(12) \quad B_e = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 + 1 + \frac{1,8 \omega^4 - 825 \cdot 10^4 \omega^2 + 72 \cdot 10^{11}}{10^7 \omega^6 - 8,5 \omega^4 + 1695 \cdot 10^4 \omega^2 - 84 \cdot 10^{11}} \right]$$

Następnie na podstawie równania (12) rysujemy krzywą  $B_e = B_e[(\omega/\omega_p)^2]$  na płaszczyźnie krzywych  $B_h = B_h[(\omega/\omega_p)^2]$  i wykreślamy krzywą  $B'_e = B'_e[(\omega/\omega_p)^2]$  (rys. 5). Po podstawieniu wartości liczbowych (11) do zależności (10) rysujemy na tej samej płaszczyźnie hiperbolę  $B_i = B_i[(\omega/\omega_p)^2]$  (rys. 6). Hiperbola na rys. 6. została zbudowana klasyczną metodą wykreślną, gdyż znane są równania dwóch jej asymptot:

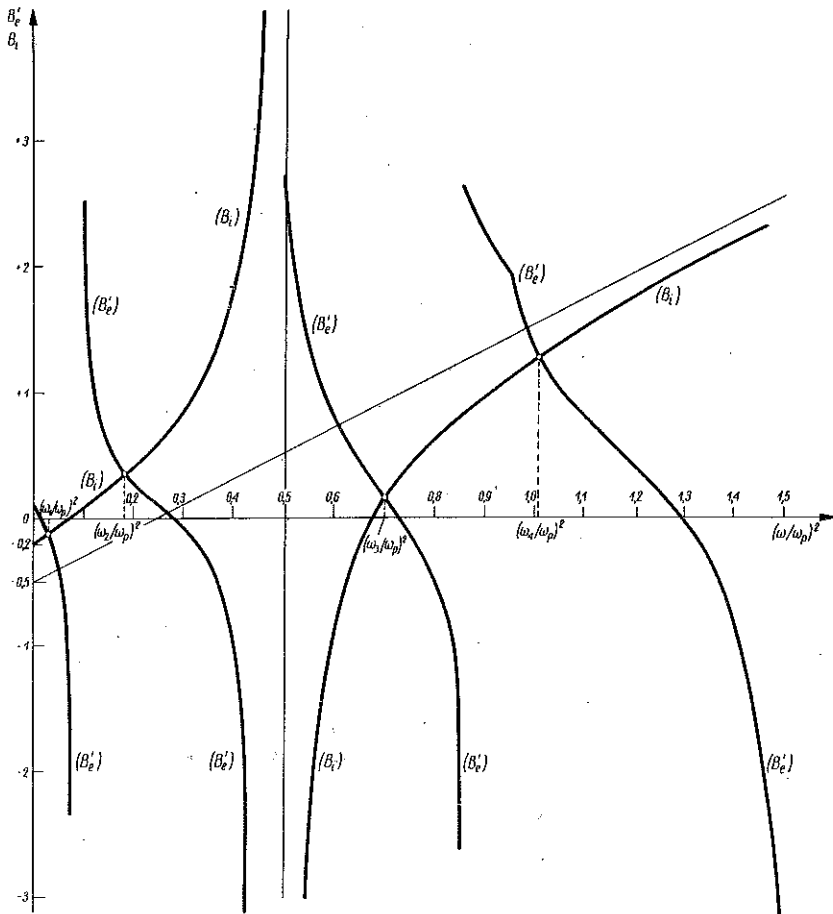
$$\frac{\left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2}{0,25} + \frac{B_i}{-0,5} = 1, \quad \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 = 0,5$$

i wartość rzędnej punktu początkowego

$$[B_i]l_0 = -0,2 \quad \left[ l = \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right].$$

W ten sposób otrzymaliśmy na rys. 7 cztery punkty przecięcia krzywych  $B'_e$  i  $B_i$ . Ich odcięte mają wartości

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_p}\right)^2 = 0,0335, \quad \left(\frac{\omega_2}{\omega_p}\right)^2 = 0,1825, \quad \left(\frac{\omega_3}{\omega_p}\right)^2 = 0,7035, \quad \left(\frac{\omega_4}{\omega_p}\right)^2 = 1,0085.$$



Rys. 7

Znając  $\omega_p^2 = 10^6 \text{ sek}^{-2}$ , obliczamy wartości pierwszych czterech częstości własnych rozważanego układu drgającego złożonego z 12 mas:

$$\omega_1 = 183,03 \text{ sek}^{-1}, \quad \omega_2 = 427,2 \text{ sek}^{-1}, \quad \omega_3 = 838,8 \text{ sek}^{-1}, \quad \omega_4 = 1004,2 \text{ sek}^{-1}.$$

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] OTTO KRAEMER, *Drehschwingungsrechnung*, Umdruck A, Karlsruhe 1954.
- [2] BERTHOLD FRANK, *Abgekürzte Drehschwingungsrechnungen mit Hilfe der Ersatzmasse und der Ersatzkraft*, Dissertation, Karlsruhe 1939.
- [3] ROBERT ARNOLD, Dissertation, Karlsruhe 1944.



## Резюме

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ КРУТИЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА В СЛУЧАЕ ОДНОРЯДНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Предлагается метод определения крутильных колебаний коленчатых валов в однорядных двигателях внутреннего сгорания с противовесами.

В данном случае применяется более сложный графический метод, предложенный О. Крамером, Б. Франком, и дополненный Р. А. Арнольдом. Этот метод дает возможность определить частоты собственных колебаний без всякого испробования. Рассматривается однорядный двигатель с  $k$  цилиндрами, снабженными шестью противовесами.

Констатируется, что аналогичное обсуждение можно провести для произвольного числа противовесов.

Теоретическим основанием предлагаемого метода является понятие приведенной массы, динамически эквивалентной системе масс.

Рассматривается один числовой пример и определяется собственные колебания коленчатого вала в случае однорядного двигателя с количеством цилиндров  $k = 6$ , с шестью противовесами.

## Summary

### DETERMINATION OF THE NATURAL TORSIONAL FREQUENCY OF A ROW ENGINE CRANKSHAFT

This paper presents a method for determining the frequency of torsional vibration of a row engine crankshaft with counterbalance weights.

The method proposed by O. KRAMER and B. FRANK and completed by R. ARNOLD is applied here to a relatively complex case. It enables us to find the natural frequency, no tests being carried out. The case of a  $k$ -cylinder row engine with six counterbalance weights is considered.

It is stressed that analagous considerations may be done for any number of counterbalance weights. The method described is based on the notion of the reduced mass, dynamically equivalent to a system of masses.

A numerical example is given by determining the natural vibration of the crankshaft of a six-cylinder engine with six counterbalance weights.

INSTITUT POLITECHNIQUE DE CLUJ  
ROUMANIE

*Praca została złożona w Redakcji dnia 18 lutego 1960 r.*