P. ANGLES D'AURIAC

O TENSORZE PRZEPUSZCZALNOŚCI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXC
TOM IX • ZESZYT 2 • ROK 1961

SPIS TREŚCI

Założenia

1. Rozważać będziemy jednorodny obszar gruntu o wymiarach dużych w stosunku do ziaren.

Rozumiemy przez to, że jeśli obierzemy dowolnie obszar Ω dowolnego kształtu duży w stosunku do wymiarów pojedynczego ziarna i jeśli wyobrazimy sobie, że przenieśliśmy go w sposób dowolny na miejsce obszaru Ω', to zachowanie się Ω umieszczonego w miejscu Ω' będzie zawsze takie, jak zachowanie się Ω'.

2. Niech $p = -(\sigma^1+\sigma^2+\sigma^3/3)$, będzie ciśnieniem średnim w pewnym punkcie cieczy. Zakładamy, że p ma postać p_m+p', gdzie p_m zmienia się liniowo w przestrzeni, a p' zmienia się w sposób przypadkowy tak, że w każdym obszarze dużym względem ziarna mamy

$$\iiint p'\, d\Omega = 0.$$

Zatem p_m jest średnią ciśnień średnich. W dalszym ciągu będziemy oznaczać je przez p. Rozkład ciśnień jest zatem scharakteryzowany przez stały w przestrzeni wektor

$$\mathbf{G} = \operatorname{grad} p \quad \left(G^i = \frac{\partial p}{\partial x^i}\right).$$

3. Można określić stały w przestrzeni wektor $\mathbf{V}$ (V^i), taki że jeśli założyć, że jest on określony na całej przestrzeni (z ziarnami włącznie), to wypływ z dowolnej powierzchni dużej względem ziaren obliczony za pomocą V jest dokładnie równy rzeczywistemu wypływowi płynu.

4. Zakładamy jeszcze, że prawo fizyczne przepuszczalności wyraża się związkiem liniowym pomiędzy $\mathbf{G}$ i $\mathbf{V}$. Zachodzi to oczywiście w przypadku, gdy w obszarze nie działają siły. Jeśli występuje ciążenie, to $\mathbf{G}$ definiuje się nie jako gradient ciśnienia, lecz jako gradient naporu.

Tensor przepuszczalności

Związek liniowy pomiędzy wektorami $\mathbf{V}$ i $\mathbf{G}$ określa stały tensor drugiego rzędu P

(1) $$V^j = G^i P^{ij}.$$

Tensor P^{ij} nazywany jest tensorem przepuszczalności. Jest on określony przez 9 parametrów i nie może być uproszczony w oparciu o cztery powyższe założenia.

W szczególności żadne rozważania mechaniki teoretycznej nie mogą doprowadzić do wniosku, że **P** jest symetryczny. Każde uproszczenie tensora **P** będzie wyrazem pewnych specjalnych własności fizycznych gruntu, nie zawartych w powyższych założeniach.

Własności takie mogą być jedynie konsekwencją specjalnej struktury gruntu, na ogół będącej wynikiem działalności natury, czasem człowieka.

Własności ogólne

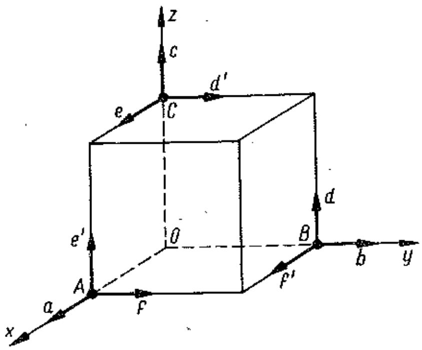
Ze wzoru (1) wynika, że jeśli przy danym rodzaju gruntu (P^{ij} dane) dodać dwa stany ciśnienia p_1 i p_2, to wektor **V** jest sumą wektorów $\mathbf{V}_1$ i $\mathbf{V}_2$ odpowiadających ciśnieniom p_1 i p_2.

W pewnych przypadkach można również dokonywać tego rodzaju dodawania na samym tensorze **P**. Jeśli bowiem przyjąć jako schemat fizyczny układ połączeń przewodów i pominąć spadek hydrauliczny w przewodach, uwzględniając go tylko w skrzyżowaniach (co oczywiście podlega dyskusji), to można przyjąć, że pierwsze z tych połączeń (kolejność jest całkowicie dowolna) określa tensor $\mathbf{P}_1$, drugie — $\mathbf{P}_2$, itd. Zespół wszystkich tych połączeń określi tensor $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots$.

Interpretacja tensora

Tensor **P** algebraicznie wyrazić można jako macierz dziewięcioelementową

$$\begin{matrix} a & f' & e \\ f & b & d' \\ e' & d & c. \end{matrix} \qquad (2)$$



Rys. 1

Umieśćmy na osiach x, y, z układu współrzędnych sześcian jednostkowy. Niech A, B, C będą wierzchołkami leżącymi odpowiednio na osiach x, y, z.

Jeśli przyjmiemy, że powyższa macierz określa przemieszczenie u, v, w w zależności od współrzędnych x, y, z, to przesunięcie punktu A będzie wektorem o składowych a, f, e', przesunięcie B wektorem f', b, d, a przesunięcie C wektorem o składowych e, d', c.

Rozważane składowe zostały zaznaczone na rys. 1, który będzie przydatny w dalszych rozważaniach.

Przepuszczalność izotropowa

Wyobraźmy sobie, że wycięliśmy w gruncie jednorodnym kulę i obróciliśmy ją w dowolny sposób. Jeśli czyniąc to nie zmieniliśmy własności ośrodka, to tensor **P** pozostaje niezmienny przy obrotach. Zwróćmy teraz uwagę na rys. 1 przedstawiający nie kulę, lecz sześcian.

Nie możemy teraz dokonywać obrotów dowolnych tak jak w przypadku kuli, lecz jedynie obroty o $\pi/2$. To jest jednak wystarczające narzędzie dowodu. Rzeczywiście, jeśli dokonamy obrotu o $\pi/2$ dookoła osi z w kierunku od x do y, to zobaczymy na rys. 1, że wektor a przyjmie miejsce wektora b, skąd $a = b$.

Jednocześnie wektor e' zajmie miejsce wektora d, skąd $e' = d$. Dokonując nowego obrotu o $\pi/2$ w tym samym kierunku otrzymamy

$$e' = d = -e', \quad \text{skąd } e' = d = 0.$$

Za pomocą takiego samego postępowania zauważymy, że $f = -f'$ i że

$$e = d' = -e, \text{ skąd } e = d' = 0.$$

Dyskutując kolejno obroty dookoła trzech osi zauważamy, że w przypadku przenikalności izotropowej rzeczą konieczną jest, aby tensor **P** miał postać

$$\begin{matrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a. \end{matrix} \tag{3}$$

Z drugiej strony jest rzeczą widoczną, że taka postać wystarcza dla zapewnienia podanej wyżej własności.

Wpływ sił ciężkości

Założenie, że grunt jest izotropowy, oznacza, że wszystkie trójściany odniesienia mają te same własności i że kierunek sił ciężkości, w szczególności, nie jest uprzywilejowany.

Jednakże siły ciężkości grają dużą rolę w formowaniu się gruntu i mogły one wywrzeć mniej lub bardziej istotny wpływ na kształt i układ ziaren. Przyjmijmy tę hipotezę.

Wydaje się również słuszne założyć, że dowolny obrót dookoła osi pionowej nie zmienia tensora **P**.

Wróćmy do rys. 1. Obrót dookoła osi z o $\pi/2$ daje

$$a = b,$$

$$f = -f'.$$

Z drugiej strony, dwa kolejne obroty o $\pi/2$ dają

$$e = d' = -e, \text{ zatem } e = d' = 0,$$

$$e' = d = -e', \text{ zatem } e' = d = 0.$$

Ostatecznie warunkiem koniecznym jest, aby **P** miał postać

$$\begin{matrix} a & -f & 0 \\ f & a & 0 \\ 0 & 0 & c. \end{matrix} \tag{4}$$

Prosty rachunek wykazuje, że taka postać również wystarcza dla zapewnienia omawianej własności gruntu. Aby tego dowieść, sprawdzamy, że postać (1) przekształcona za pomocą dowolnego obrotu pozostaje niezmieniona.

Przepuszczalność obrotowa

Postać (4) stanowi postać najogólniejszą tensora przepuszczalności obrotowej. Zaskakujące jest, że nie jest ona całkowicie symetryczna (byłaby jedynie dla $f = 0$).

Aby uzyskać wynik $f = 0$ nie wystarczy przyjąć, że obrót dookoła osi z nie zmienia tensora, należy również przyjąć, że nie zmienia go również symetria względem płaszczyzny pionowej. Oznacza to, że grunt jest identyczny ze swym lustrzanym odbiciem.

Otóż w zależności od rozważanego przypadku warunek ten może być lub nie być spełniony.

Załóżmy, że wszystkie ziarna, z których grunt się składa, są małymi kawałkami prawoskrętnej linii śrubowej, że elementy te są ustawione pionowo i połączone w sposób przypadkowy.

Odbicie lustrzane spirali prawoskrętnej jest spiralą lewoskrętną i rzeczą niemożliwą jest je nałożyć. Zatem grunt taki nie jest identyczny z gruntem symetrycznym do niego. Dla takiego gruntu **P** jest tensorem przepuszczalności obrotowej i może nie być symetryczny. Mówimy jedynie, że może nie być symetryczny.

Jeśli przeciwnie, w gruncie jest tyle samo ziaren prawoskrętnych i lewoskrętnych to przepuszczalność będzie obrotowa i symetryczna.

W rzeczywistości grunty nie składają się z małych kawałków spiral, ale ziarna mogą mieć przeciętny kształt śrubowy. Pojęcie kształtu przeciętnego wymagałoby oczywiście sprecyzowania, ale na razie przyjmiemy je intuicyjnie.

Jeśli w gruncie występują te same ilości ziaren prawo- i lewoskrętnych, to symetria tensora **P** będzie konsekwencją tego pojęcia.

Ciekawą jest rzeczą, że jeśli wszystkie ziarna są prawoskrętne i ułożone przypadkowo, to grunt nie jest identyczny ze swym lustrzanym odbiciem, a pomimo to symetria tensora jest rzeczą pewną, ponieważ bezpośrednio można wykazać izotropowość, co pociąga za sobą symetrię.

Grunt uwarstwiony

Rozważać będziemy grunt złożony z warstw poziomych izotropowych o grubościach a i b i przepuszczalności odpowiednio A i B.

Załóżmy, że w gruncie A gradient naporu **G** tworzy kąt α z pionem, a w gruncie B gradient **G**$'$ tworzy z pionem kąt β.

Wzdłuż całej długości poziomej powierzchni podziału spadek naporu powinien być jednakowy z jednej i z drugiej strony, więc

(5) $$\mathbf{G} \sin\alpha = \mathbf{G}' \sin\beta.$$

Jednocześnie przepływ przez powierzchnię podziału daje związek

(6) $$AG\cos\alpha = BG'\cos\beta.$$

Z (5) i (6) otrzymujemy

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{A}{B}.$$

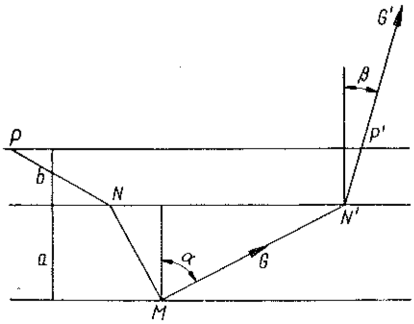
Rozważmy linię łamaną równego naporu MNP i linię łamaną prądu cieczy $MN'P'$. Kierunkiem przeciętnym równego naporu jest MP, kierunkiem przeciętnym prądu cieczy jest MP'. Te dwa kierunki nie są prostopadłe — a to świadczy o fakcie, że przepuszczalność nie jest izotropowa.

Rozważania oparte na obliczeniu wartości naporu prowadzą do wniosku, że przepuszczalność pozioma jest równa

(7) $$P_h = \frac{aA+bB}{a+b}.$$

Badając wypływ cieczy wyliczymy, że przepuszczalność pionowa spełnia związek:

(8) $$\frac{1}{P_v} = \frac{(a/A)+(b/B)}{a+b}.$$



Rys. 2

Inaczej mówiąc, przepuszczalność pozioma jest średnią przepuszczalności (przy uwzględnieniu wymiarów warstw), podczas gdy odwrotność przenikalności pionowej jest średnią odwrotności przepuszczalności.

Jeśli napisać $P_h > P_v$ to uzyskamy warunek $A^2+B^2 > 2AB$ spełniony zawsze, z wyjątkiem przypadku $A = B$.

Uwaga. Jeżeli za model fizyczny gruntu przyjąć zespół połączeń przewodów i jeśli założyć, że spadek hydrauliczny ma miejsce tylko w rurach, to tensor przepuszczalności rur o określonym kierunku jest symetryczny. Suma takich tensorów da oczywiście tensor symetryczny.

Niestety takie założenie jest dyskusyjne, ponieważ w rzeczywistości skrzyżowania wydają się co najmniej tak ważne, jak przewody.

Mimo to jednak utrzymujemy, że jest rzeczą bardzo prawdopodobną, że grunty rzeczywiste mają na ogół tensor przenikalności symetryczny, ponieważ wydaje się, że brak symetrii wymagałby obecności elementów o specjalnym kształcie i nieprzypadkowego ustawienia tych elementów.

Резюме

О ТЕНЗОРЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ

В работе принимается обобщенные законы Дарси в форме (1), $V^j = P^{ij}C^i$. Устанавливаются предположения, при которых можно доказать симметрию тензора P^{ij}. Тез автора состоит в том, что в случае действительных грунтов тензор P^{ij} является симметричеcким.

Интерпретируя тензор P^{ij} геометрически и используя геометрические свойства среды, доказывается, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы проницаемость была изотропной, является форма тензора P^{ij} (3). Аналогичные рассуждения приводят к формуле (4) для грунта, в котором направление сил тяжести играет решающую роль. Эта форма является симметрической при предположении зеркальной симметрии грунта.

В заключение обсуждается также проницаемость в грунте с напластованием.

Summary

THE PERMEABILITY TENSOR

The generalized Darcy law is assumed in the form, (1), $V^j = P^{ij}C^i$. The object of the paper are the assumptions for which the symmetry of the tensor P^{ij} can be shown. The author's opinion is that in the case of real soils the tensor P^{ij} is symmetric.

By means of geometrical interpretation of the tensor and making use of the geometrical properties of the terrain, it is shown that the necessary and sufficient condition for the permeability to be isotropic is that the tensor P^{ij} should have the form (3). Analogous argument leads to the form (4) for a soil where the direction of gravity forces is treated as special. This form is symmetric if «mirror symmetry» of the soil is assumed.

The paper contains also a section concerning the permeability of a layered soil.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE
LABORATOIRE DE MECANIQUE DES FLUIDES

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lutego 1960 r.