TADEUSZ IWIŃSKI

UOGÓLNIONE RÓWNANIA N-GO RZĘDU RICCATIEGO DRUGIEGO RODZAJU. ZASTOSOWANIA W TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXCVII

TOM IX • ZESZYT 3 • ROK 1961

SPIS TREŚCI

Wstęp 365

1. Równania Riccatiego n-go rzędu drugiego rodzaju 366
2. Rola równań $\hat{R}$ w zagadnieniu rozkładu liniowego wyrażenia różniczkowego na iloczyn czynników operatorowych 373
3. Zastosowanie równań $\hat{R}$ w teorii liniowych równań różniczkowych 379
4. Zastosowania metody rozkładu do efektywnego rozwiązywania równań liniowych. Równania liniowe rozkładalne elementarnie E 383
5. Przykład z zakresu teorii sprężystości 395

Wstęp

W pracy [9] podana została teoria nieliniowych równań różniczkowych n-go rzędu, nazwanych uogólnionymi równaniami Riccatiego lub krótko równaniami R. Nazwę tę usprawiedliwiają dwie przyczyny. W przypadku szczególnym, gdy rząd równania wynosi 1, jest to klasyczne równanie Riccatiego; pomiędzy tymi równaniami a liniowymi równaniami zachodzą związki analogiczne do związków pomiędzy równaniami Riccatiego pierwszego rzędu a równaniami liniowymi drugiego rzędu. Związki te sprowadzają rozwiązanie równania nieliniowego do rozwiązania równania liniowego, a więc zadanie na ogół trudniejsze do zadania łatwiejszego, co ma pewne znaczenie w teorii równań nieliniowych. Okazało się również, że wprowadzenie uogólnionych równań Riccatiego n-go rzędu jest bardzo wygodne w teorii równań liniowych. Między innymi możliwe jest określenie klasy równań liniowych o współczynnikach zmiennych, których rząd można obniżyć bez znajomości rozwiązania szczególnego (są to tzw. równania elementarne rozkładalne, por. [9]).

Obniżenie rzędu równania może przyczynić się do znalezienia jego rozwiązania ogólnego. Na tej właśnie drodze możliwe się stało rozwiązanie pewnego zagadnienia dla płyty ortotropowej o dużych ugięciach przy zastosowaniu metody H. M. Bergera, [6]. Okazuje się również, że każde równanie liniowe nierozkładalne elementarnie można uczynić rozkładalnym zmieniając jeden jego współczynnik. Fakt ten może być wykorzystany w zagadnieniach technicznych, gdzie często występują funkcje przybliżone i gdy istnieje określona swoboda ich wyboru lub aproksymacji. Tak więc teoria równań Riccatiego ma znaczenie dla praktycznego rozwiązywania równań różniczkowych, m. in. rozszerza klasę równań o współczynnikach funkcyjnych, które można efektywnie rozwiązać.

W wyżej cytowanej pracy [9] rozpatrywane były liniowe równania różniczkowe (i odpowiadające im równania R) przy założeniu wielokrotnej różniczkowalności współczynników równania liniowego. Okazuje się, że przy założeniu słabszym — ciągłości współczynników równania liniowego $(n+1)$ -go rzędu — określić można inne równania nieliniowe n-go rzędu o własnościach zbliżonych do własności równań omówionych w pracy [9]. W odróżnieniu od równań R te inne równania związane z równaniami liniowymi nazywać będziemy równaniami Riccatiego drugiego rodzaju lub krótko równaniami $\hat{R}$. Symbol $\hat{R}_n$ oznaczać będzie równanie Riccatiego drugiego rodzaju n-go rzędu. Mimo, że pomiędzy teorią równań R oraz tu przedstawioną teorią równań $\hat{R}$ zachodzi dość znaczne podobieństwo, jak zobaczymy, zachodzą również istotne różnice. Sam fakt związania z każdym równaniem liniowym nowego równania nieliniowego, którego rozwiązanie ogólne jest w ustalony sposób określone przez rozwiązanie równania liniowego, daje nową dość obszerną klasę równań nieliniowych, co prawda dość specjalnych, które na tej drodze można rozwiązać. Z drugiej strony pewne wnioski wynikające z teorii równań $\hat{R}$ można wykorzystać do praktycznego rozwiązywania równań liniowych dotychczas nie rozwiązanych.

Przedstawiając teorię równań $\hat{R}$ w czasopiśmie przeznaczonym dla czytelników, których interesują przede wszystkim praktyczne metody rozwiązywania równań różniczkowych, nie unikam jednakże przytoczenia dowodów i rozważań o charakterze bardziej teoretycznym. Czytelnik o nastawieniu ściśle praktycznym może pewne dowody i ustępy teoretyczne pominąć (np. twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań $\hat{R}$).

Jak wiadomo, większość zagadnień technicznych sprowadza się do rozwiązania pewnego zagadnienia matematycznego, najczęściej równania różniczkowego. Mamy nadzieję, że teoria równań $\hat{R}$ ułatwi rozwiązanie niektórych zagadnień technicznych. Mamy tu na myśli przede wszystkim tzw. równania liniowe elementarnie rozkładalne. Stanowią one naturalne rozszerzenie klasy równań o współczynnikach stałych oraz równań Eulera, ale stanowią klasę o współczynnikach funkcyjnych znacznie obszerniejszą.

W zakończeniu tego artykułu podamy przykład zagadnienia technicznego, którego rozwiązanie staje się możliwe na tle przedstawionej tutaj teorii.

1. Równania Riccatiego n-go rzędu drugiego rodzaju

1.1. Na wstępie (przed określeniem uogólnionego równania Riccatiego n-go rzędu) wprowadzimy pewne oznaczenia i umowy oraz wyprowadzimy wzory potrzebne w dalszych wywodach.

Weźmy pod uwagę dwie dowolne funkcje $a(x)$ oraz $f(x)$ określone we wspólnym przedziale (α, β) i należące odpowiednio do klasy C^n oraz C^{n-1}. Przy tych założeniach każdej liczbie naturalnej n przyporządkujemy nieliniowy operator różniczkowy n-go rzędu l_a^n określony na funkcji $f(x)$ rekurencyjnie w następujący sposób[1]:

$$l_a^n[f] = \frac{d}{dx} l_a^{n-1}[f] + a l_a^{n-1}[f],$$

$$l_a^0[f] = f.$$

Rozpatrywać będziemy również operator y^n zdefiniowany $y^n[f] = l_f^n[f]$. Mamy więc

$$\tag{1.1} \begin{cases} I^n[-u] = \dfrac{d}{dx} I^{n-1}[-u] - u I^{n-1}[-u], \\ I^0[-u] = -u. \end{cases}$$

[1] Por. artykuł [9].

Na podstawie powyższego określenia operatora I^n znajdziemy ze wzorów (1.1), gdy $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$:

$$
(1.2) \qquad \begin{cases} I^0[-u] = -u, \\ I^1[-u] = -u'+u^2, \\ I^2[-u] = -u''+3uu'-u^3, \\ I^3[-u] = -u'''+3u'^2+4uu''-6u^2u'+u^4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}
$$

1.2. Na podstawie powyższego określenia operatora I^n łatwo wykazać (indukcyjnie), że wzór określający n-tą pochodną funkcji

$$(1.3) \qquad y = e^{-U(x)}$$

ma postać

$$(1.4) \qquad y^{(n)} = e^{-U} I^{n-1}[-u],$$

gdzie

$$(1.5) \qquad U(x) = \int u(x)\,dx.$$

Oznaczenie (1.5) na funkcję pierwotną zachowamy w dalszym ciągu pracy.

Jeśli wzór (1.3) traktować jako przekształcenie funkcji u w y, to odwrotne przekształcenie ma postać

$$(1.6) \qquad u = -\frac{y'}{y} \qquad (y \neq 0).$$

1.3. Wyrażenie różniczkowe $I^n[-u]$ przy podstawieniu (1.6) przyjmuje postać $y^{(n+1)}/y$, tj.

$$(1.7) \qquad I^n[-u] = \frac{y^{(n+1)}}{y} \qquad \left(u = -\frac{y'}{y}\right).$$

Dowód indukcyjny opiera się na wzorze (1.1).

1.4. Niech będzie dany układ $n+1$ funkcji

$$(1.8) \qquad -u_1, -u_2, \ldots, -u_{n+1}$$

określonych w przedziale (a, b) i należących do klasy C^{n-1}. Będziemy mówili, że *funkcje są istotnie różne* w tym przedziale, jeśli wyznacznik funkcyjny

$$
(1.9) \qquad T(-u_1, -u_2, \ldots, -u_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ I^0[-u_1] & I^0[-u_2] & \ldots & I^0[-u_{n+1}] \\ I^1[-u_1] & I^1[-u_2] & \ldots & I^1[-u_{n+1}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I^{n-1}[-u_1] & I^{n-1}[-u_2] & \ldots & I^{n-1}[-u_{n+1}] \end{vmatrix}
$$

nie jest równy tożsamościowo zeru (por. [9]).

Dla układu dwóch i trzech funkcji mamy

$$T(-u_1, -u_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -u_1 & -u_2 \end{vmatrix},$$

$$T(-u_1, -u_2, -u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 \\ -u_1'+u_1^2 & -u_2'+u_2^2 & -u_3'+u_3^2 \end{vmatrix}.$$

Z postaci wyznacznika T wynika, że dwie funkcje są funkcjami istotnie różnymi w przedziale (a, b), jeśli nie przybierają w nim wartości równych. Przy trzech funkcjach w wyznaczniku T występują nie tylko same funkcje, ale i ich pochodne. Jeśli wszystkie funkcje (1.8) w przedziale (a, b) przyjmują wartości stałe, to wyznacznik T staje się wyznacznikiem Vandermonde'a (z dokładnością do znaku) i zamiast «funkcji istotnie różnych» mamy liczby parami różne.

Lemat 1. *Funkcje*

(1.10) $$e^{-U_1},\ e^{-U_2},\ \ldots,\ e^{-U_{n+1}}$$

są liniowo niezależne w przedziale (a,b) jeśli układ (1.8) pochodnych wykładników U_i jest układem funkcji istotnie różnych i na odwrót.

Dowód wynika ze związku

$$W(e^{-U_1}, e^{-U_2}, \ldots, e^{-U_{n+1}}) = \exp\Big[-\sum_{i=1}^{n+1} U_i\Big]\, T(-u_1, -u_2, \ldots, -u_{n+1}),$$

gdzie W oznacza wyznacznik Wrońskiego.

1.5. Twierdzenie G. Mammany (por. [7], twierdzenie pierwsze): *Dla najogólniejszego równania różniczkowego liniowego n-go rzędu istnieje dowolna liczba par takich rozwiązań szczególnych, które nigdzie nie przyjmują jednocześnie wartości zera.*

W twierdzeniu tym przyjmuje się zwykle założenia ciągłości w całym rozpatrywanym przedziale.

1.6. Po tych rozważaniach wstępnych określamy pewne równanie nieliniowe.

Definicja. *Równaniem różniczkowym Riccatiego n-go rzędu drugiego rodzaju lub krótko równaniem $\hat{R}$ nazywać będziemy równanie*

(1.11) $$\hat{R}_n[u] \equiv a_{n+1,n+1} I^n[-u] + a_{n+1,n} I^{n-1}[-u] + \ldots + a_{n+1,1} I^0[-u] + a_{n+1,0} = 0.$$

O współczynnikach $a_{n+1,i}$ $(i = 0,1,\ldots, n+1)$ zakładać będziemy, że są określone w przedziale (a, b) oraz ciągłe.

Trzy pierwsze równania $\hat{R}_i$ mają następującą postać:

(1.12) $$\begin{cases} a_{22}u' = a_{22}u^2 - a_{21}u + a_{20}, \\ a_{33}(u''-3uu') + a_{32}u' = -a_{33}u^3 + a_{32}u^2 - a_{31}u + a_{30}, \\ a_{44}(u'''-3u'^2-4uu''+6u^2u') + a_{43}(u''-3uu') + a_{42}u' = \\ \qquad = a_{44}u^4 - a_{43}u^3 + a_{42}u^2 - a_{41}u + a_{40}. \end{cases}$$

Tak więc pierwsze z powyższych równań ($i = 1$) jest klasycznym równaniem Riccatiego. Przyjmując, że $a_{22} \neq 0$ oraz dzieląc równanie przez tę funkcję otrzymamy przypadek szczególny, w którym współczynnik przy kwadracie niewiadomej równy jest jedności. Jak wiadomo, najogólniejsze równanie $\hat{R}$ pierwszego rzędu sprowadzić można do postaci występującej we wzorach (1.12) przez podstawienie $u = v\omega$, gdzie ω jest odpowiednio dobraną funkcją. Wynika stąd, że najogólniejsze równanie Riccatiego można sprowadzić do postaci (1.12).

Mając równania $\hat{R}_n$ określone przez (1.11) rozważać będziemy różniczkowe równania liniowe $(n+1)$-go rzędu, którego współczynnikami będą funkcje $a_{n+1,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ występujące w równaniu $\hat{R}_n$. Będą to równania

$$(1.13)\qquad L_{n+1}[y] \equiv a_{n+1,n+1}y^{(n+1)} + a_{n+1,n}y^{(n)} + \ldots + a_{n+1,1}y' + a_{n+1,0}y = b_{n+1}.$$

Tak więc każdemu równaniu $\hat{R}_n$ (1.11) n-go rzędu odpowiada ściśle określone równanie liniowe $(n+1)$-go rzędu i odwrotnie.

Związki pomiędzy odpowiadającymi sobie równaniami sprecyzujemy w następujących twierdzeniach.

Twierdzenie 1. Każde równanie $\hat{R}_n$-go rzędu można sprowadzić do równania liniowego $(n+1)$-go rzędu przez zamianę zmiennych $u = -y'/y$.

Każde równanie liniowe jednorodne $(n+1)$-go rzędu sprowadzić można do równania $\hat{R}_n$ n-go rzędu przez podstawienie

$$y = e^{-\int u dx}.$$

Dowód pierwszej części opiera się na wzorze (1.7). Wystarczy w tym celu wykorzystać wzór (1.7), gdy $n = 0, 1, \ldots$. Otrzymamy

$$(1.14)\qquad y\hat{R}_n\left[-\frac{y'}{y}\right] = L_{n+1}[y],$$

co dowodzi pierwszej tezy.

Na podstawie (1.4) znajdziemy

$$(1.15)\qquad L_{n+1}[e^{-U}] = e^{-U}\hat{R}_n[u],$$

co dowodzi drugiej części twierdzenia.

Twierdzenie 2. Jeśli rozwiązaniem jednorodnego równania liniowego $(n+1)$-go rzędu $L_{n+1}[y] = 0$ jest funkcja

$$(1.16)\qquad y = \sum_{i=1}^{n+1} C_i y_i,$$

to rozwiązaniem ogólnym odpowiadającego mu równania $\hat{R}_n[u] = 0$ jest funkcja

$$(1.17)\qquad u = \frac{-\sum_{i=1}^{n+1} C_i y_i'}{\sum_{i=1}^{n+1} C_i y_i}.$$

Wynika to ze wzoru (1.14).

Zwróćmy uwagę, że funkcja (1.17) w sposób istotny zależy tylko od n stałych dowolnych.

P r z y k ł a d. Rozwiązaniem ogólnym równania Bessela

$$y''+x^{-1}y'+(1-n^2x^{-2})=0$$

jest funkcja cylindryczna

$$y=Z_n=J_n+CN_n, \quad (C=\text{const,})$$

gdzie J_n i N_n są odpowiednio funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju oraz n-go rzędu.

Stosując twierdzenie 2 znajdziemy, że rozwiązaniem ogólnym równania Bessela-Riccatiego ($a_{22}=1$, $a_{21}=x^{-1}$, $a_{20}=1-n^2x^{-2}$)

$$u'=u^2-x^{-1}u+1-n^2x^{-2}$$

lub

$$x^2(u'-u^2)+xu-(x^2-n^2)=0$$

jest funkcja

$$u=\frac{Z_{n-1}-Z_{n+1}}{2Z_n},$$

gdzie Z_{n-1} i Z_{n+1} są również funkcjami cylindrycznymi odpowiednio $(n-1)$-go i $(n+1)$-go rzędu.

W ten sposób możemy rozwiązać tyle równań Riccatiego, ile znamy rozwiązań równań liniowych.

Twierdzenie 3. Jeśli funkcja u_i $(i=1,2,\ldots,n+1)$ są rozwiązaniami szczególnymi równania $\hat{R}$ n-go rzędu oraz jeśli fankcje (1.8) są istotnie różne w przedziale (a,b), to rozwiązaniem ogólnym odpowiadającego mu równania liniowego $(n+1)$-go rzędu jest fankcja

$$y=\sum_{i=1}^{n+1}C_ie^{-U_i(x)}. \tag{1.18}$$

D o w ó d. Ze wzoru (1.15) wynika, że każda z funkcji $y_i=\exp(-U_i)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania (1.13). Należy wykazać jeszcze, że funkcje te są liniowo niezależne w przedziale (a,b). To jednak wynika z tematu 1 oraz z założenia, że funkcje $-u_i$ są istotnie różne.

Z porównania powyższych twierdzeń wynika, że zadanie na ogół trudniejsze, jakim jest rozwiązanie równania nieliniowego, sprowadza się do zadania łatwiejszego, do rozwiązania równania liniowego. W tym przypadku trzeba znaleźć pełne rozwiązanie równania liniowego, tj. jego całkę ogólną. Natomiast przy sprowadzaniu rozwiązania równania liniowego do nieliniowego znajomość rozwiązania ogólnego równania $\hat{R}_n$ nie jest konieczna, wystarczy znać tylko $n+1$ rozwiązań szczególnych równania nieliniowego, spełniających warunek $T(-u_1,-u_2,\ldots,-u_{n+1})\neq 0$.

Twierdzenie 4. Jeśli rozwiązaniem ogólnym równania $\hat{R}_n[u] = 0$ jest funkcja $u(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, to rozwiązaniem ogólnym odpowiadającego mu równania liniowego $L_{n+1}[y] = 0$ jest funkcja

$$y = C_{n+1} e^{-U(x, C_1, \ldots, C_n)}. \tag{1.19}$$

D o w ó d. Istotnie, ze wzoru (1.6) wynika, że y spełnia równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$y' + u(x, C_1, \ldots, C_n) y = 0,$$

skąd wynika (1.19).

P r z y k ł a d. Łatwo sprawdzić, że równanie Riccatiego pierwszego rzędu $(1.12)_1$, gdy $a_{22} = 1$, posiada rozwiązanie szczególne $u = \tilde{c} = \text{const}$, jeśli współczynniki tego równania $a_{21}(x)$ oraz $a_{20}(x)$ spełniają warunek

$$\tilde{c}^2 - a_{21}\tilde{c} + a_{20} \underset{x}{\equiv} 0,$$

a więc jeśli

$$\text{I.} \quad a_{20} = a_{21}\tilde{c} - \tilde{c}^2 \quad \text{lub} \quad \text{II.} \quad a_{21} = \tilde{c} + \frac{a_{20}}{\tilde{c}}.$$

Istnieją więc dwa równania Riccatiego o wspomnianej własności I i II:

$$u' = u^2 - a_{21}u + a_{21}\tilde{c} - \tilde{c}^2$$

oraz

$$u' = u^2 - \left(\tilde{c} + \frac{a_{20}}{\tilde{c}}\right) u + a_{20}.$$

Równaniom tym odpowiadają równania liniowe o współczynnikach funkcyjnych drugiego rzędu odpowiednio

$$y'' + a_{21}y' + (a_{21}\tilde{c} - \tilde{c}^2) y = 0$$

oraz

$$y'' + \left(\tilde{c} + \frac{a_{20}}{\tilde{c}}\right) y' + a_{20} y = 0.$$

Na podstawie wzoru (1.18) znamy jedno rozwiązanie szczególne tych równań, jest nim mianowicie funkcja $y = e^{-\tilde{c}x}$. Znajomość jednego rozwiązania szczególnego, jak wiadomo, wystarczy do znalezienia drugiego rozwiązania liniowo niezależnego równania liniowego drugiego rzędu. Po obliczeniu rozwiązań ogólnych równań liniowych wzór (1.19) daje natychmiast rozwiązania ogólne rozpatrywanych równań Riccatiego. Odpowiednich wzorów nie przytaczamy, gdyż w dalszym ciągu podamy wygodne wzory ogólne.

Przytoczone równania posiadają współczynniki, w których występuje parametr $\tilde{c} \neq 0$ oraz jedna funkcja dowolna. Zawierają one wiele przypadków szczególnych. Np. jeśli przyjąć $\tilde{c} = 1$, $a_{21} = \sin^2 x$, to równanie I przyjmie postać

$$y'' + y' \sin^2 x - y \cos^2 x = 0,$$

które bez trudu rozwiążemy.

Twierdzenie 5 (o istnieniu). *Równanie $\hat{R}_n$ o współczynnikach określonych, ciągłych w przedziale (a, b), posiada rozwiązanie w całym przedziale (a, b) z wyłączeniem być może skończonej lub przeliczalnej ilości punktów.*

D o w ó d. Każdemu równaniu (1.11) można przyporządkować równanie liniowe (1.13). Ponieważ z założenia współczynniki równania (1.13) są ciągłe w przedziale (a, b), to na podstawie twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań liniowych istnieje rozwiązanie równania (1.13) w całym przedziale (a, b). Na podstawie twierdzenia 2 rozwiązaniem równania (1.11) jest funkcja (1.17), która jest określona w całym dziale prócz punktów, w których rozwiązanie równania liniowego znika, co należało wykazać.

Twierdzenie 6 (o istnieniu). *Równanie $\hat{R}_n$ o współczynnikach ciągłych w przedziale (a, b) posiada w dziedzinie funkcji zespolonych zmiennej rzeczywistej rozwiązanie określone w całym przedziale (a, b).*

D o w ó d wynika natychmiast z twierdzenia poprzedniego oraz z cytowanego poprzednio twierdzenia G. Mammany.

Twierdzenie 7. Jeśli znane jest n rozwiązań u_{ni} równania $\hat{R}_n[u] = 0$ takich, że funkcje $-u_{ni}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ stanowią układ funkcji istotnie różnych, to rozwiązanie ogólne tego równania można otrzymać za pomocą kwadratur.

D o w ó d. Istotnie, przy założeniach tego twierdzenia znamy układ n rozwiązań liniowo niezależnych postaci

$$y = e^{-U_{ni}}$$

równania liniowego $L_{n+1}[y] = 0$, odpowiadającego danemu równaniu $\hat{R}_n[u] = 0$ (na podstawie twierdzenia 3 oraz lematu 1). Ale wtedy, jak wiadomo, na ostatnie rozwiązanie liniowo niezależne y_{n+1} istnieje gotowy wzór wyrażony za pomocą kwadratur, wobec tego rozwiązanie ogólne równania $\hat{R}_n$ określa wzór (1.17), co dowodzi tezy naszego twierdzenia.

Analogiczne twierdzenie można sformułować, gdy znamy $n + 1$ rozwiązań szczególnych u_{ni} $(i = 1, 2, ..., n + 1)$ równania $\hat{R}_n$.

Te własności równania $\hat{R}_n$ są dobrze znane w teorii równania Riccatiego pierwszego rzędu. W tym klasycznym twierdzeniu nie trzeba zakładać, że rozwiązania równania Riccatiego są istotnie różne, gdyż w przypadku dwóch funkcji funkcje «istotnie różne» są funkcjami różnymi. W ogólnym przypadku, gdy $n \neq 1$ założenia twierdzenia 7 są istotne.

Na zakończenie nasuwa się następująca uwaga. Rozwiązując równanie Riccatiego wygodnie jest rozważać jednocześnie odpowiadające mu równania liniowe. Np. w przypadku równania rzędu pierwszego $\hat{R}_1$, gdy znamy jedno rozwiązanie szczególne, możemy rozwiązać odpowiadające mu równanie liniowe $L_2[y] = 0$, a po rozwiązaniu tego równania mamy gotowy wzór na rozwiązanie ogólne równania $\hat{R}_1[u] = 0$. Ta wzajemna odpowiedniość równań L_{n+1} i $\hat{R}_n$ znajdzie głębsze powiązanie w teorii rozkładu wyrażenia różniczkowego $L_{n+1}[y]$ na iloczyn symboliczny dwóch czynników operatorowych i roli, jaką w tym rozkładzie spełnia równanie $\hat{R}$.

2. Rola równań $\hat{R}$ w zagadnieniu rozkładu liniowego wyrażenia różniczkowego na iloczyn czynników operatorowych

W paragrafie tym powoływać się będziemy na następujące lematy i określenia.

2.1. *Lemat 2. Niech będzie dany wyznacznik n-go stopnia następującej postaci:*

$$(2.1)\qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Jeśli oznaczyć symbolami D_{n-1}, $D_{n-2}, \dots, D_2$, $D_1 = a_{nn}$ wyznaczniki odpowiednio $(n-1)$, $(n-2)$, ..., drugiego, pierwszego stopnia tej samej postaci co D_n i otrzymane z wyznacznika przez skreślenie odpowiednio pierwszego wiersza i pierwszej kolumny dwóch pierwszych wierszy i dwóch pierwszych kolumn itd., to prawdziwa jest równość

$$(2.2)\qquad D_n = a_{11}D_{n-1} - a_{21}D_{n-2} + a_{31}D_{n-3} + \dots + \\ +(-1)^{n-1}a_{n-2,2}D_2 + (-1)^n a_{n-1,1}D_1 + (-1)^{n+1}a_{n1}.$$

Rozwinięcie (2.2) wyznacznika jest oczywiste.

W szczególności weźmy pod uwagę wyznacznik funkcyjny (wystąpi on w dalszych rozwiązaniach) następującej postaci:

$$(2.3)\quad I_*^n[-u] = \\ (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} \binom{n}{0}u & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{n}{1}u' & \binom{n-1}{0}u & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{n}{2}u'' & \binom{n-1}{1}u' & \binom{n-2}{0}u & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n}{i}u^{(i)} & \binom{n-1}{i-1}u^{(i-1)} & \binom{n-2}{i-2}u^{(i-2)} & \binom{n-3}{i-3}u^{(i-3)} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n}{n-2}u^{(n-2)} & \binom{n-1}{n-3}u^{(n-3)} & \binom{n-2}{n-4}u^{(n-4)} & \binom{n-3}{n-5}u^{(n-5)} & \dots & 1 & 0 \\ \binom{n}{n-1}u^{(n-1)} & \binom{n-1}{n-2}u^{(n-2)} & \binom{n-2}{n-3}u^{(n-3)} & \binom{n-3}{n-4}u^{(n-4)} & \dots & \binom{1}{0}u & 1 \\ \binom{n}{n}u^{(n)} & \binom{n-1}{n-1}u^{(n-1)} & \binom{n-2}{n-2}u^{(n-2)} & \binom{n-3}{n-3}u^{(n-3)} & \dots & \binom{1}{1}u' & u \end{vmatrix}.$$

Stosując wzór (2.2) znajdziemy

$$(2.4)\qquad -I_*^n[-u] = \binom{n}{0}uI_*^{n-1}[-u] + \binom{n}{1}u'I_*^{n-2}[-u] + \dots + \binom{n}{n-1}u^{(n-1)}I_*^0[-u] + \binom{n}{n}u^{(n)}.$$

Lemat 3. Wyrażenia różniczkowe (1.1) $I^n[-u]$ *można rozwinąć w następujący sposób:*

$$(2.5)\qquad -I^n[-u] = \binom{n}{0}uI^{n-1}[-u] + \binom{n}{1}u'I^{n-2}[-u] + \dots + \binom{n}{n-1}u^{(n-1)}I^0[-u] + \binom{n}{n}u^{(n)}.$$

Dowód indukcyjny przy wykorzystaniu wzoru (1.1) nie sprawia trudności.

Lemat 4. Określone powyżej wyrażenia różniczkowe $I_*^n[-u]$ oraz $I^n[-u]$ są identyczne,

$$I^n[-u] = I_*^n[-u]. \tag{2.6}$$

Dowód indukcyjny wynika natychmiast ze wzorów (2.4) i (2.5).

2.2. *Lemat 5. Jeśli symbolem L_n oznaczyć operator liniowy*

$$L_n \equiv a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0,$$

oraz wprowadzić oznaczenie

$$\begin{aligned} B_{ni} \equiv\ & a_n\binom{n}{i}u^{(i)} + a_{n-1}\binom{n-1}{i-1}u^{(n-i)} + a_{n-2}\binom{n-2}{i-2}u^{(n-2)} + \cdots + \\ & + a_{n-i+1}\binom{n-i+1}{1}u' + a_{n-i}\binom{n-i}{0}u \qquad (i = 0, 1, \cdots, n), \end{aligned} \tag{2.7}$$

to dla każdego n naturalnego prawdziwy jest wzór

$$L_n[uv] = \sum_{i=0}^{n} B_{ni} v^{(n-i)}. \tag{2.8}$$

Symbole $u(x)$ i $v(x)$ oznaczają funkcje określone w pewnym przedziale (a, b) należące do klasy $C^n(a, b)$ oraz $\binom{0}{0} = 1$.

Dowód. Prawdziwa jest tożsamość pomocnicza

$$B_{n+1,k} = a_{n+1}\binom{n+1}{k}u^{(k)} + B_{n,k-1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+1). \tag{2.9}$$

Łatwo się o tym przekonać rozwijając lewą i prawą stronę według określenia (2.7).

Tożsamość (2.8) udowodnimy indukcyjnie. Gdy $n = 1$

$$L_1[uv] = \left(a_1 \frac{d}{dx} + a_0\right)[uv] = a_1 uv' + (a_1 u' + a_0 u)v = B_{10}u' + B_{11}v,$$

a więc w tym przypadku wzór (2.8) jest prawdziwy. Przyjmijmy, że wzór (2.8) jest słuszny z założenia. Wtedy

$$\begin{aligned} L_{n+1}[uv] = \left(a_{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} + L_n\right)[uv] &= a_{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[uv] + L_n[uv] = \\ &= a_{n+1}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}u^{(i)}v^{(n+1-i)} + \sum_{i=0}^{n} B_{ni}v^{(n-i)} = \\ &= a_{n+1}\binom{n+1}{0}uv^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{n+1}\left[a_{n+1}\binom{n+1}{i}u^{(i)} + B_{n,i-1}\right]v^{(n-i+1)}. \end{aligned}$$

Korzystając z (2.9) znajdziemy

$$L_{n+1}[nv] = \sum_{i=0}^{n+1} B_{n+1,i} v^{(n+1-i)}$$

i lemat został udowodniony.

2.3. W pracy [9] równaniach Riccatiego pierwszego rodzaju wykazaliśmy, że z tymi równaniami łączy się rozkład wyrażenia liniowego $L_{n+1}[y]$ na czynniki postaci

$$L_{n+1}[y]=\left(\frac{d}{dx}+a_n\right)L_n[y]. \tag{2.10}$$

Obecnie wykażemy, że i w przypadku równań $\hat{R}$ można z równaniami tymi związać inny rozkład liniowego wyrażenia na czynniki operatorowe:

$$L_{n+1}[y]=L_n\left[\frac{dy}{dx}+u_n y\right] \tag{2.11}$$

przy słabszych założeniach o współczynnikach wyrażenia różniczkowego $L_{n+1}[y]$. W przypadku (2.10) o współczynnikach $a_{n+1,i}(i=0,1,\ldots,n+1)$ należało zakładać wielokrotną różniczkowalność w przedziale (a,b); w przypadku (2.11) — jak zobaczymy — wystarczy przyjąć założenie ciągłości tych współczynników w przedziale (a,b).

Weźmy pod uwagę równanie liniowe $(n+1)$-go rzędu (1.13) oraz odpowiadające mu równanie $\hat{R}_n$ (1.11). O współczynnikach tych równań zakładamy, że są określone w pewnym przedziale (a, b) oraz że są funkcjami ciągłymi.

Pragniemy liniowe wyrażenia różniczkowe $L_{n+1}[y]$, stanowiące lewą stronę równania (1.13), przedstawić w postaci iloczynu operatorowego

$$L_{n+1}[y]\equiv\left(a_{nn}\frac{d^n}{dx^n}+a_{n,n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n1}\frac{d}{dx}+a_{n0}\right)[y'+u_n y]. \tag{2.12}$$

O funkcji $u_n(x)$ zakładamy, że jest klasy $C^n(a,b)$, natomiast o funkcjach a_{ni} $(i=0,1,\ldots,n)$ zakładamy, że są ciągłe.

Aby dokonać rozkładu (2.12) na czynniki operatorowe, należy określić funkcje a_{ni} $(i=0,1,\ldots,n)$ oraz u_n w ten sposób, aby była spełniona tożsamość (2.12). Jeśli takie funkcje istnieją, nazywać je będziemy *współczynnikami rozkładu*, a równanie (1.13) nazywać będziemy *rozkładalnym w przedziale* (a,b). Współczynnik u_n nazywać będziemy *wyróżnionym współczynnikiem rozkładu.*

Twierdzenie 8. Jeśli równanie liniowe (1.13) jest rozkładalne, a funkcja u_n jest wyróżnionym współczynnikiem rozkładu, to funkcja

$$y=e^{-U_n} \qquad \left(U_n=\int u\,dx\right) \tag{2.13}$$

spełnia równanie $L_{n+1}[y]=0$.

Inaczej mówiąc każdy wyróżniony współczynnik rozkładu określa pewne rozwiązanie rozpatrywanego równania liniowego.

D o w ó d. Istotnie funkcja (2.13) spełnia równanie liniowe $y'+u_n y=0$. Ponieważ z założenia ma miejsce rozkład (2.12), to drugi czynnik prawej strony (2.12) równy jest tożsamościowo zeru w (a,b), stąd $L_{n+1}[e^{-U_n}]\equiv 0$, co należało wykazać.

Twierdzenie 9. Jeśli równanie liniowe (1.13) jest rozkładalne, a funkcja u_n jest wyróżnionym współczynnikiem rozkładu, to u_n spełnia równanie $\hat{R}_n$, odpowiadające danemu równaniu liniowemu, tj. $\hat{R}_n[u_n] = 0$.

D o w ó d. Istotnie, funkcji u_n na podstawie twierdzenia poprzedniego odpowiada funkcja $y = \exp[-U_n(x)]$, która jest rozwiązaniem równania $L_{n+1}[y] = 0$. Jeśli jednak funkcja $\exp[-U_n]$ spełnia dane równanie liniowe, to funkcja u_n spełnia odpowiadające mu równanie Riccatiego [na podstawie związku (1.15)], co było do wykazania.

Tak więc aby funkcja była wyróżnionym współczynnikiem rozkładu, warunkiem koniecznym jest spełnianie przez nią równania $\hat{R}_n$, odpowiadającego danemu równaniu liniowemu.

W dalszym ciągu wykażemy, że jest to również warunek wystarczający.

Twierdzenie 10. Jesli u_n jest rozwiązaniem równania $\hat{R}_n$ odpowiadającego równaniu liniowemu $L_{n+1}[y] = 0$, to jest wyróżnionym współczynnikiem rozkładu.

D o w ó d. Dla dowodu należy wykazać, że każde rozwiązanie równania $\hat{R}_n$ określa układ współczynników a_{ni} $(i = 0, 1, \ldots, n)$ tworzących wraz z u_n układ funkcji takich, że spełniona jest w rozważalnym przedziale tożsamość (2.12).

W tym celu wyprowadzimy układ równań, który powinny spełniać współczynniki rozkładu różniczkowego wyrażenia liniowego na czynniki operatorowe.

Przepiszemy związek (2.12) w postaci równoważnej

$$L_n[u_n y] + L_n[y] \underset{y^{(i)}}{\equiv} L_{n+1}[y]. \tag{2.14}$$

Na podstawie wzoru (2.8) (jeśli w nim podstawić $u_n = u$, $v = y$ oraz $a_i = a_{ni}$) znajdziemy

$$\sum_{i=0}^{n} B_{ni} y^{(n-i)} + \sum_{i=0}^{n} a_{n,n-i} y^{(n+1-i)} - \sum_{i=0}^{n+1} a_{n+1,n+1-i} y^{(n+1-i)} \underset{y^{(i)}}{\equiv} 0$$

lub

$$(a_{nn} - a_{n+1,n+1}) y^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} (B_{n,i-1} + a_{n,n-i} - a_{n+1,n+1-i}) y^{(n+1-i)} + (B_{nn} - a_{n+1,0}) y \underset{y^{(i)}}{\equiv} 0.$$

Aby ta tożsamość była spełniona, potrzeba i wystarcza, aby współczynniki rozkładu spełniły następujący układ równań:

$$\begin{cases} a_{nn} = a_{n+1,n+1}, \\ B_{n,i-1} + a_{n,n-1} - a_{n+1,n+1-i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ B_{nn} - a_{n+1,0} = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Układ ten — po wykorzystaniu pierwszego związku $a_{nn} = a_{n+1,n+1}$ oraz po zastąpieniu symbolu $B_{n,i-1}$ przez odpowiednie funkcje na podstawie wzorów (2.7) — przyjmuje postać:

$$
(2.16)\quad \begin{cases}
a_{n+1,n+1}\binom{n}{0}u_n - a_{n+1,n} + a_{n,n-1} & = 0,\\
a_{n+1,n+1}\binom{n}{1}u_n' - a_{n+1,n-1} + a_{n,n-1}\binom{n-1}{0}u_n + a_{n,n-2} & = 0,\\
a_{n+1,n+1}\binom{n}{2}u_n'' - a_{n+1,n-2} + a_{n,n-1}\binom{n-1}{1}u_n' + a_{n,n-2}\binom{n-2}{0}u_n + a_{n,n-3} & = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{n+1,n+1}\binom{n}{i}u_n^{(i)} - a_{n+1,n-1} + a_{n,n-1}\binom{n-1}{i-1}u_n^{(i-1)} + a_{n,n-2}\binom{n-2}{i-2}u_n^{(i-2)} + & \\
\qquad + \dots + a_{n,n-1-i} & = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{n+1,n+1}\binom{n}{n-1}u_n^{(n-1)} - a_{n+1,1} + a_{n,n-1}\binom{n-1}{n-2}u_n^{(n-2)} + a_{n,n-2}\binom{n-2}{n-3}u_n^{(n-3)} + & \\
\qquad + \dots + a_{n2}\binom{2}{1}u_n' + a_{n1}\binom{1}{0}u_n + a_{n0} & = 0,\\
a_{n+1,n+1}\binom{n}{n}u_n^{(n)} - a_{n+1,0} + a_{n,n-1}\binom{n-1}{n-1}u_n^{(n-1)} + a_{n,n-2}\binom{n-2}{n-2}u_n^{(n-2)} + & \\
\qquad + \dots + a_{n2}\binom{2}{2}u_n'' + a_{n1}\binom{1}{1}u_n' + a_{n0}\binom{0}{0}u_n & = 0.
\end{cases}
$$

Tak więc zagadnienie rozłożenia wyrażenia liniowego $L_{n+1}[y]$ sprowadza się do rozwiązania układu (2.16) złożonego z $n+1$ równań, w którym niewiadomymi są współczynniki rozkładu a_{ni} $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ i funkcja u_n.

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie układu (2.16) sprowadzić można do rozwiązania jednego równania. Równanie to otrzymamy rugując funkcję a_{ni} $(i = 1, 0, \dots, n-1)$, pozostawiając natomiast niewiadomą u_n. Ponieważ wszystkie niewiadome występują liniowo, to — jak wiadomo — rezultatem rugowania będzie równanie $(n+1)$-go stopnia następującej postaci:

(2.17)

$$
\begin{vmatrix}
a_{n+1,n+1}\binom{n}{0}u_n - a_{n+1,n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
a_{n+1,n+1}\binom{n}{1}u_n' - a_{n+1,n-1} & \binom{n-1}{0}u_n & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
a_{n+1,n+1}\binom{n}{2}a_n'' - a_{n+1,n-2} & \binom{n-1}{1}u_n' & \binom{n-2}{0}u_n & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot\\
a_{a+1,n+1}\binom{n}{i}u_n^{(i)} - a_{n+1,n-i} & \binom{n-1}{i-1}u_n^{(i-1)} & \binom{n-2}{i-2}u_n^{(i-2)} & \binom{n-3}{i-3}u_n^{(i-3)} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot\\
a_{n+1,n+1}\binom{n}{n-1}u_n^{(n-1)} - a_{n+1,1} & \binom{n-1}{n-2}u_n^{(n-2)} & \binom{n-2}{n-3}u_n^{(n-3)} & \binom{n-3}{n-4}u_n^{(n-4)} & \dots & \binom{2}{1}u_n' & \binom{1}{0}u_n & 1\\
a_{n+1,n+1}\binom{n}{n}u_n^{(n)} - a_{n+1,0} & \binom{n-1}{n-1}u_n^{(n-1)} & \binom{n-2}{n-2}u_n^{(n-2)} & \binom{n-3}{n-3}u_n^{(n-3)} & \dots & \binom{2}{2}u_n'' & \binom{1}{1}u_n' & \binom{0}{0}u_n
\end{vmatrix} = 0.
$$

Wyznacznik występujący po lewej stronie równania (2.17) można przedstawić jako różnicę dwóch wyznaczników (rozwijając pierwszą jego kolumnę na różnicę dwóch kolumn). Pierwszy z tych wyznaczników, jak łatwo zauważyć, jest iloczynem $a_{n+1,n+1}(-1)^{n+1}I^n[-u_n]$. Drugi posiada postać, do której odnosi się wzór (2.4). Ponieważ różni się ten drugi wyznacznik od wyznacznika $I^n[-u]$ (jeśli nie brać pod uwagę znaku) tylko elementami pierwszej kolumny, przeto w rozwinięciu (2.4) wystąpią wyznaczniki $I^{n-i}[-u]$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$. Tak więc uwzględniając jeszcze minus, znajdujący się przed drugim wyznacznikiem, przekształcimy lewą stronę równania (2.17) do następującej postaci:

$$(-1)^{n+1}a_{n+1,n+1}I^n[-u_n]-(-1)^n a_{n+1,n}I^{n-1}[-u_n]+ \\ +(-1)^{n-1}a_{n+1,n-1}I^{n-2}[-u_n]- \dots -(-1)^n a_{n+1,1}I^0[-u_n]+(-1)^{n+1}a_{n+1,0}u_n^{(n)}.$$

Stąd dochodzimy do wniosku, że równanie wyznacznikowe (2.17) jest równaniem $\hat{R}_n$ odpowiadającym równaniu $L_{n+1}[y]=0$, którego lewą stronę rozkładamy na iloczyn operatorowy.

Ponieważ równanie $\hat{R}_n$ jest rezultatem wyrugowania niewiadomych z układu (2.16), to układ ten jest równoważny układowi utworzonemu z (2.16) po skreśleniu jednego równania (np. ostatniego) oraz z równania $\hat{R}_n$. Mamy więc

$$(2.18)\qquad \begin{cases} B_{n,i-1}+a_{n,n-1}-a_{n+1,i}=0 & (i=1,2,\dots,n), \\ \hat{R}_n[u_n]=0. \end{cases}$$

Przekształcenie układu (2.16) do postaci (2.18) kończy nasz dowód. Istotnie, dla dokonania efektywnego rozkładu wystarczy wziąć jakiekolwiek rozwiązanie równania $\hat{R}_n[u_n]=0$, następnie z pierwszego równania (2.16) określić $a_{n,n-1}$, z drugiego $a_{n,n-2}$ i postępując tak dalej określić wszystkie współczynniki rozkładu.

Tak więc na podstawie twierdzenia 10 rozkład wyrażenia $L_{n+1}[y]$ na czynniki sprowadza się do znalezienia dowolnego rozwiązania szczególnego równania $\hat{R}_n$, odpowiadającego danemu równaniu liniowemu.

Pozostaje do omówienia zagadnienie istnienia rozkładu równania (1.13) na czynniki (2.11).

Twierdzenie 11. Jeśli współczynniki równania liniowego $L_{n+1}[y]=0$ są określone w przedziale (a, b) i ciągłe, to w dziedzinie zmiennej rzeczywistej lewa strona równania jest rozkładalna w całym przedziale z wyłączeniem pewnych punktów szczególnych (w których nie jest określony współczynnik wyróżniony u_n), natomiast w dziedzinie zespolonej zmiennej rzeczywistej jest rozkładalna w całym przedziale (a, b).

D o w ó d. Wyrażenie $L_{n+1}[y]$ może być rozłożone tam wszędzie, gdzie istnieje u_n (rozwiązanie szczególne odpowiedniego równania $\hat{R}_n$). Z twierdzeń o istnieniu rozwiązań równań $\hat{R}_n$, podanych przy naszych założeniach, jest zagwarantowane istnienie funkcji u_n w przedziale (a, b) w sensie naszego twierdzenia.

Określenie natomiast pozostałych współczynników rozkładu $a_{ni}(i=n-1, \dots, 1,0)$, jak to wynika ze wzorów (2.16), wymaga działań wymiernych i różniczkowania n-krotnego funkcji u_n, a więc działań określonych i zawsze wykonalnych. W ten sposób twierdzenie zostało udowodnione.

Dla celów rachunkowych podamy wzory (2.16) dla $n=1, 2, 3$:
gdy $n=1$

$$(2.19)\qquad \begin{cases} a_{11}=a_{22}, \\ a_{10}=a_{21}-a_{22}u_1; \end{cases}$$

gdy $n=2$

$$
(2.20) \qquad \begin{cases} a_{22} = a_{33}, \\ a_{21} = a_{32} - a_{33}u_2, \\ a_{20} = a_{31} - 2a_{33}u_2' - a_{21}u_2; \end{cases}
$$

gdy $n=3$

$$
(2.21) \qquad \begin{cases} a_{33} = a_{44}, \\ a_{32} = a_{43} - a_{44}u_3, \\ a_{31} = a_{42} - 3a_{44}u_3' - a_{32}u_3, \\ a_{30} = a_{41} - 3a_{33}u_3'' - 2a_{32}u_3' - a_{31}u_3. \end{cases}
$$

Dalsza część pracy poświęcona jest wnioskom, jakie wynikają z możliwości rozkładu lewej strony liniowego równania różniczkowego na czynniki.

3. Zastosowanie równań $\hat{R}$ w teorii liniowych równań różniczkowych

Przedstawiona powyżej teoria równań $\hat{R}$ oraz związki pomiędzy tymi równaniami a odpowiadającymi im równaniami liniowymi pozwalają opracować metodę efektywnego rozwiązywania pewnej klasy równań liniowych oraz przedstawić nowe uproszczone dowody niektórych twierdzeń teorii równań liniowych.

Z rozważań poprzedniego paragrafu wynika jako wniosek następujące

Twierdzenie 12. Jeśli jest znane jakiekolwiek rozwiązanie szczególne równania $\hat{R}_n$ odpowiadającego równaniu liniowemu $L_{n+1}[y] = b_{n+1}$, to całkowanie równania liniowego sprowadza się do całkowania układu równań złożonych z równania liniowego n-go rzędu i równania liniowego:

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} a_{nn}v_n^{(n)} + a_{n,n-1}v_n^{(n-1)} + \dots + a_{n0}v_n = b_{n+1}, \\ y' + u_n y = v_n, \end{cases}
$$

przy czym współczynniki a_{ni} $(i = 0, 1, \dots, n)$ są określone na podstawie wzorów (2.16).

D o w ó d. Równanie (1.13) jest równoważne układowi (3.1). Istotnie, bezpośrednio z (2.12) wynika (3.1). Na odwrót, z układu (3.1) wynika równanie (1.13); wystarczy wyrugować z układu (3.1) funkcję v_n, korzystając przy tym ze związków (2.16).

Twierdzenie to sprowadza obniżenie rzędu równania liniowego do znalezienia jednego rozwiązania równania nieliniowego odpowiadającego danemu równaniu liniowemu. Może ono więc mieć znaczenie praktyczne w takich przypadkach, kiedy nie umiemy znaleźć całki szczególnej równania liniowego, a uda nam się określić całkę równania $\hat{R}_n$.

W przypadku gdy dana jest całka szczególna równania liniowego, twierdzenie staje się wersją twierdzenia o obniżeniu rzędu równania, gdy znamy jego całkę szczególną, przy czym w naszym sformułowaniu mamy gotowe wzory (2.16) na współczynniki równania n-go rzędu, do którego sprowadza się rozwiązanie równania (1.13). Wynika to z prostego związku (1.6) pomiędzy odpowiadającymi sobie rozwiązaniami równań $\hat{R}_n$ oraz L_{n+1}.

P r z y k ł a d 1. Równaniu

$$y'''+a_{32}(x)y''+a_{31}(x)y'+[\mu^3-a_{32}(x)\mu^2+a_{31}(x)\mu]y = b_3(x) \qquad (\mu = \text{const}),$$

gdzie a_{32} i a_{31} są dwiema dowolnymi funkcjami ciągłymi w pewnym wspólnym przedziale, odpowiada następujące równanie $\hat{R}_2$:

$$u_2''-3u_2u_2'+a_{32}u_2' = -u_2^3+a_{32}u_2^2-a_{31}u+(\mu^3-a_{32}\mu^2+a_{31}\mu).$$

Łatwo zauważyć, że to ostatnie równanie posiada rozwiązanie na szczególne $u_2 = \mu$, stąd lewą stronę równania liniowego potrafimy efektywnie rozłożyć, przy czym na podstawie wzorów (2.20) mamy ($a_{33} \equiv 1$)

$$a_{21} = a_{32}-u_2 = a_{32}-\mu,$$

$$a_{20} = a_{31}-2u_2'-a_{21}u_2 = a_{31}-(a_{32}-\mu)\mu.$$

Wobec tego na podstawie twierdzenia 12 nasze liniowe równanie trzeciego rzędu jest równoważne układowi

$$\begin{cases} v_2''+(a_{32}-\mu)v_2'+[a_{31}-(a_{32}-\mu)\mu]v_2 = b_3, \\ y'+\mu y = v_2. \end{cases}$$

W ten sposób dane równanie liniowe trzeciego rzędu sprowadziliśmy do rozwiązania równania

$$v_2''+a_{21}v_2'+(a_{31}-a_{21}\mu)v_2 = b_3,$$

gdzie

$$a_{21} = a_{32}-\mu.$$

P r z y k ł a d 2. Wiadomo, że rozwiązaniem szczególnym równania jednorodnego, odpowiadającego równaniu

$$y'''+f(x)y''+y'+f(x)y = b_3(x),$$

jest funkcja $y = \sin x$. Stąd na podstawie wzoru (1.18) rozwiązaniem szczególnym równania $\hat{R}_2$ odpowiadającego danemu równaniu liniowemu jest funkcja $u_2 = -\operatorname{ctg} x$. Na podstawie wzorów (2.20) obliczymy, jak w przykładzie pierwszym, następujące współczynniki równania (3.1) w przypadku $n = 2$:

$$a_{21} = f+\operatorname{ctg} x, \qquad a_{20} = f\operatorname{ctg} x-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

W ten sposób sprowadziliśmy równanie dane do układu równań (3.1):

$$\begin{cases} v_2''+(f+\operatorname{ctg} x)v_2'+\left(f\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)v_2 = b_3, \\ y'-y\operatorname{ctg} x = v_2. \end{cases}$$

Ponieważ rozwiązaniem równania szczególnego pierwszego z powyższych równań jest funkcja $v_2 = -1/\sin x$, to potrafimy rozwiązać równanie drugiego rzędu i w rezultacie dane równanie trzeciego rzędu. Nie ma oczywiście żadnych przeszkód, aby do równania $L_2[v_2] = 0$ nie zastosować metody rozkładu na czynniki operatorowe. To zagadnienie rozpatrzymy jednak ogólnie powracając do równania (1.13).

Współczynniki pierwszego równania układu (3.1) są ciągłe w przedziale (a, b). Wynika to ze wzorów (2.16) oraz z twierdzenia o regularności rozwiązania równania u_n (funkcja ta jest klasy C^n). Wynika stąd, że do liniowego równania n-go rzędu $(3.1)_1$ można zastosować postępowanie podane powyżej, zastępując je równoważnym układem dwu równań: jednego $(n-1)$-go rzędu, drugiego liniowego. W ten sposób doszliśmy do wniosku, że równanie liniowe $(n+1)$-go rzędu (1.13) jest równoważne układowi trzech równań liniowych

$$(3.2)\qquad \begin{cases} a_{n-1,n-1}v_{n-1}^{(n-1)}+a_{n-1,n-2}v_{n-1}^{(n-2)}+\dots+a_{n-1,0}v_{n-1} = b_{n+1}, \\ v_n'+u_{n-1}v_n = v_{n-1}, \\ y'+u_ny = v_n, \end{cases}$$

gdzie u_{n-1} jest dowolnym rozwiązaniem szczególnym równania $\hat{R}_{n-1}[u_{n-1}] = 0$ odpowiadającego pierwszemu równaniu liniowemu układu (3.2). Współczynniki tego równania są określone za pomocą wzorów (2.16) przepisanych dla wskaźnika $n-1$.

Powtarzając powyższe postępowanie dochodzimy do wniosku, że słuszne jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 13. Każde równanie liniowe $(n+1)$-go rzędu o współczynnikach ciągłych jest równoważne układowi równań liniowych, z których każde zawiera jedną niewiadomą:

$$(3.3)\qquad \begin{cases} v_1'+a_{10}v_1 = b_{n+1}, \\ v_2'+u_1v_2 = v_1, \\ \dots\dots\dots \\ v_n'+u_{n-1}v_n = v_{n-1}, \\ y'+u_ny = v_n. \end{cases}$$

Funkcje u_i $(i = n, n-1, \dots, 1)$ są rozwiązaniami szczególnymi układu równań $\hat{R}_i[u_i] = 0$, odpowiadającymi odpowiednio równaniu (1.13) *oraz następnym równaniom liniowym, otrzymywanym kolejno w procesie obniżania rzędu równania metodą rozkładu na czynniki operatorowe.*

Funkcja a_{10} ma postać

$$(3.4)\qquad a_{10} = a_{n+1,n}-a_{n+1,n+1}\sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Jako bezpośredni wniosek z powyższego twierdzenia wynikają związki pomiędzy układem rozwiązań szczególnych równań $\hat{R}_i[u_i] = 0$ $(i = n, n-1, \dots, 1)$ odpowiadających danemu równaniu (1.13), a rozwiązaniami tego ostatniego równania liniowego.

Twierdzenie 14. Rozwiązaniem ogólnym liniowego równania różniczkowego niejednorodnego o współczynnikach ciągłych jest funkcja

$$(3.5)\quad y = C_{n+1}e^{-U_n}+C_n e^{-U_n}\int e^{U_n-U_{n-1}}dx+C_{n-1}e^{-U_n}\int e^{U_n-U_{n-1}}\int e^{U_{n-1}-U_{n-2}}dx^2+$$
$$+\ldots+C_1 e^{-U_n}\int e^{U_n-U_{n-1}}\int e^{U_{n-1}-U_{n-2}}\int\ldots\int e^{U_2-U_1}\int e^{U_1-A_{10}}dx^n+$$
$$+e^{-U_n}\int e^{U_n-U_{n-1}}\int\ldots\int e^{U_2-U_1}\int e^{U_1-A_{10}}\int e^{A_{10}}b_{n+1}dx^{n+1}.$$

Tak więc układ rozwiązań szczególnych równań $\hat{R}_i$ $(i = n, n-1, \ldots 1)$ odpowiadających danemu równaniu liniowemu określa układ rozwiązań szczególnych równania różniczkowego jednorodnego (1.13), przy czym

$$(3.6)\quad \begin{cases} y_1 = e^{-U_n}, \\ y_2 = e^{-U_n}\int e^{U_n-U_{n-1}}dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n+1} = e^{-U_n}\int e^{U_n-U_{n-1}}\int\ldots\int e^{U_2-U_1}\int e^{U_1-A_{10}}dx^n \end{cases}$$

oraz całkę szczególną równania niejednorodnego

$$(3.7)\qquad Y_{n+1} = e^{-U_n}\int e^{U_n-U_{n-1}}\int\ldots\int e^{U_1-A_{10}}\int e^{A_{10}}b_{n+1}dx^{n+1}.$$

We wzorach powyższych przyjęto oznaczenia

$$U_i = \int u_i dx.$$

Funkcje u_i i a_{10} zostały określone wyżej. Ich istnienie w zakresie funkcji zespolonych zmiennej rzeczywistej gwarantuje twierdzenie 6.

Dowód otrzymamy przez kolejne całkowanie układu równań liniowych pierwszego rzędu (3.3).

P r z y k ł a d 3. Aby rozwiązać równanie

$$y'''+f(x)y''+y'+f(x)y = b_3(x)$$

z przykładu 2 na str. 380 należy wyznaczyć funkcje u_2, u_1 oraz a_{10}. Jak wiemy, $u_2 = -\operatorname{ctg} x$ oraz rozwiązanie szczególne odpowiedniego równania drugiego rzędu $(3.1)_1$ $v_2 = -\sin^{-1}x$. Stąd $u_1 = -v_2'/v_2 = \operatorname{ctg} x$. Ze wzoru (3.4) mamy

$$a_{10} = a_{32}-u_1-u_2 = f.$$

Mamy więc na odpowiednie funkcje występujące we wzorach (3.6) i (3.7) następujące wzory:

$$U_2 = -\ln|\sin x|,\qquad U_1-U_2 = \ln\sin^{-2}x,$$
$$U_1-A_{10} = \ln|\sin x|-F(x),\qquad A_{10} = F(x),$$

gdzie $F(x)$ oznacza funkcję pierwotną funkcji $f(x)$. Po wykonaniu odpowiednich całkowań ze wzorów (3.6) oraz (3.7) znajdziemy rozwiązanie ogólne naszego równania trzeciego rzędu:

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x,$$

$$y_3 = \sin x \int \sin^{-2} x \int \sin x\, K(x)\, dx^2,$$

$$Y_3 = \sin x \int \sin^{-2} x \int \sin x\, K(x) \int b(x) K^{-1}(x)\, dx^3,$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$\exp[-F(x)] = K(x).$$

4. Zastosowania metody rozkładu do efektywnego rozwiązywania równań liniowych. Równania liniowe rozkładalne elementarnie E

Interesować nas będzie w tym paragrafie zastosowanie przedstawionej teorii do praktycznego rozwiązywania równań.

Niektóre przytoczone już twierdzenia mają taki właśnie praktyczny charakter, np. twierdzenie sprowadzające rozwiązanie równania $\hat{R}_n$ do rozwiązania równania L_{n+1} i odwrotnie. Twierdzenie to niejako automatycznie zwiększa liczbę równań, których rozwiązania są znane (na podstawie tej odpowiedniości).

Z praktycznego punktu widzenia interesujące staje się następujące zagadnienie: *należy określić klasę równań liniowych, które można rozłożyć na czynniki operatorowe bez rozwiązania równania różniczkowego* $\hat{R}$.

Wykażemy, że takie równania istnieją. Nazywać je będziemy *równaniami rozkładalnymi elementarnie* i klasę tych równań oznaczać będziemy symbolem E.

Stwierdzenie faktu, że dane równanie należy do klasy E, posiada znaczenie praktyczne, gdyż umożliwia rozłożenie lewej strony tego równania na czynniki i w rezultacie obniżenie rzędu równania.

Łatwo wykazać, że do klasy E należą równania liniowe o współczynnikach stałych oraz równania Eulera. Dobrym wprowadzeniem do postawionego zagadnienia jest zastosowanie omawianych w tej pracy metod do tych dwu prostych typów równań liniowych, tym bardziej że nie jest ono pozbawione walorów metodycznych. Z tego właśnie względu przedstawimy — możliwie najkrócej — jak wygląda teoria równań liniowych Eulera z punktu widzenia rozkładu wyrażenia $L_{n+1}[y]$ na czynniki operatorowe.

4.1. Zastosowanie metody rozkładu do określenia rozwiązań liniowych o współczynnikach stałych. Dla tych równań właściwie mamy gotowe wzory. Wypadnie jedynie udowodnić jedno twierdzenie pomocnicze.

Jeśli współczynniki $a_{n+1,i}$ równania (1.13) są stałe (przyjmujemy również $a_{n+1,n+1} = 1$), to jest rzeczą naturalną poszukiwanie rozkładu lewej strony tego równania w zakresie funkcji stałych. Nasuwa to choćby tożsamościowy pierwszy związek (2.16): $u_n + a_{n,n-1} = a_{n+1,n}$. Jeśli $u_n = \text{const}$, to z pozostałych równań (2.16) wynika, że stałe będą współczynniki równania n-go rzędu $(3.1)_1$. Pozostaje więc wykazać, że można określić liczbę u_n. Liczbę tę określić należy z równania typu $\hat{R}_n$.

Przy założeniu $u_n = \text{const}$ mamy $I^i[-u_n] = (-1)^{i+1} u_n^{i+1}$ i równanie (1.11) się sprowadza do równania algebraicznego. Jak się można spodziewać, będzie to równanie charakterystyczne znane z klasycznej teorii równań różniczkowych (ze zmianą znaku przy niewiadomej):

$$u_n^{n+1} - a_{n+1,n} u_n^n + a_{n+1,n-1} u_n^{n-1} - \ldots \pm a_{n+1,1} u_n \mp a_{n+1,0} = 0. \tag{4.1}$$

Jednocześnie układ (2.16) określający współczynniki $a_{n,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ uprości się i stanie się układem równań algebraicznych następującej postaci:

$$\begin{cases} u_n + a_{n,n-1} - a_{n+1,n} = 0, \\ u_n a_{n,n+1} + a_{n,n-2} - a_{n+1,n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n a_{n1} + a_{n0} - a_{n+1,1} = 0, \\ u_n a_{n0} - a_{n+1,0} = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Przyjmując w tym układzie za u_n jakikolwiek pierwiastek równania charakterystycznego (4.1) znajdziemy wszystkie współczynniki $a_{n,i}$, przy czym będą to liczby.

Jeśli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego $u_{n(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ są różne, to wyznacznik $T(-u_{n(0)}, -u_{n(1)}, \ldots, -u_{n(n)})$ staje się wyznacznikiem Vandermonde'a nie równym zeru i wzór (1.18) daje rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $L_{n+1}[y] = 0$. Nie ma więc w tym przypadku potrzeby dalszego rozkładania na czynniki równania $(3.1)_1$.

Do ogólniejszego jednak rezultatu prowadzą wzory (3.6) oraz (3.7), gdyż dają rozwiązanie równania w obu przypadkach, zarówno gdy równanie charakterystyczne posiada pierwiastki różne, jak i gdy posiada pierwiastki wielokrotne.

Jednak właściwe wykorzystanie tych wzorów wymaga pewnego uzupełnienia. Jak wiadomo, wszystkie rozwiązania liniowo niezależne można określić na podstawie rozwiązania jednego równania charakterystycznego. Natomiast wzory (3.6) oraz (3.7) wykorzystują jeden pierwiastek tego równania, u_n. Inne liczby występujące we wzorach (3.6) i (3.7) są, jak wiemy, pierwiastkami układu równań charakterystycznych odpowiadających układowi liniowych równań różniczkowych, które otrzymamy z równania (1.13) przez kolejne obniżenie rzędu. Wynikałoby stąd, że wykorzystanie wzorów wymaga napisania i rozwiązania układu wszystkich równań algebraicznych, jakie można przyporządkować równaniu (1.13) przez kolejne obniżanie rzędu tego równania, a więc wymaga skomplikowanych rachunków. Wykażemy, że tak nie jest.

Lemat 6. *Pierwiastki równania charakterystycznego*

$$r^k - a_{k,k-1} r^{k-1} + a_{k,k-2} r^{k-2} - \ldots \pm a_{k1} r \mp a_{k0} = 0 \tag{4.3}$$

odpowiadającego pewnemu liniowemu równaniu różniczkowemu k-go rzędu, otrzymanemu w procesie kolejnego obniżania rzędu równania, są zarazem pierwiastkami równania charakterystycznego

$$(4.4)\qquad r^{k+1}-a_{k+1,k}r^{k}+a_{k+1,k-1}r^{k-1}-\ldots\pm a_{k+1,1}r\mp a_{k+1,0}=0,$$

które odpowiada «poprzedniemu» równaniu różniczkowemu $(k+1)$*-go rzędu.*

Niewiadomą równania charakterystycznego (4.1) oznaczyliśmy symbolem r.

Dowód. Pomiędzy współczynnikami obu równań charakterystycznych zachodzą związki (4.2) (przy $n=k$). Wzory te określają współczynniki równania (4.4) za pośrednictwem parametru u_k i współczynników równania (4.3). Na ich podstawie możemy równanie (4.4) przepisać w postaci

$$r^{k+1}-(u_k+a_{k,k-1})r^{k}+(u_k a_{k,k-1}+a_{k,k-2})r^{k-1}-$$
$$-(u_k a_{k,k-2}+a_{k,k-3})r^{k-2}+\ldots\pm(u_k a_{k,1}+a_{k,0})r\mp u_k a_{k,0}=0$$

lub po odpowiednim zgrupowaniu

$$(4.5)\qquad -u_k(r^k-a_{k,k-1}r^{k-1}+a_{k,k-2}r^{k-2}-\ldots\mp a_{k,1}r\pm a_{k,0})+$$
$$+r(r^k-a_{k,k-1}r^{k-1}+a_{k,k-2}r^{k-2}-\ldots\mp a_{k,1}r\pm a_{k,0})=0.$$

Równanie (4.4), które w naszym przypadku ma postać (4.5), jest spełnione przez każdy pierwiastek $r_i (i=1,\ldots,n)$ równania (4.3). W ten sposób lemat został udowodniony.

Wynika stąd, że ciąg liczb, występujących we wzorach (3.6) i (3.7), stanowi zarazem układ rozwiązań równania charakterystycznego (4.1). We wzorach (3.6) i (3.7) należy stałe współczynniki w wykładnikach zastąpić przez pierwiastki równania charakterystycznego, jak to wynika z naszego lematu:

$$u_i=u_{n(i)},\qquad a_{10}=u_{n(0)}\qquad (i=1,\ldots,n).$$

Ponieważ w tym przypadku

$$U_i=u_i x,\qquad A_{10}=a_{10}x\qquad (i=1,\ldots,n),$$

to wzory (3.6) i (3.7) przyjmują postać

$$(4.6)\qquad \begin{cases} y_i=e^{-u_i x}, \quad y_{n+1}=e^{-a_{10}x} & (i=1,\ldots,n)\\ Y_{n+1}=e^{-u_n x}\int e^{(u_n-u_{n-1})x}\int e^{(u_{n-1}-u_{n-2})x}\int\ldots\int e^{(u_1-a_{10})x}\int b_{n+1}e^{a_{10}x}dx^{n+1}, \end{cases}$$

gdy równanie charakterystyczne posiada pierwiastki różne.

Gdy równanie charakterystyczne posiada pierwiastki wielokrotne, to całki występujące we wzorach (3.6) i (3.7) nie tracą sensu. Gdybyśmy więc chcieli w tym przypadku wyprowadzić wzory na całki równania liniowego, to zauważmy, że pierwiastki równania charakterystycznego należy uporządkować w taki sposób, aby w układzie pierwiastków równania charakterystycznego

$$(4.7)\qquad u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1, a_{10}$$

pierwiastki wielokrotne były pogrupowane na prawym końcu. Ułożenie takie jest celowe. Gdyby je ułożyć w inny sposób, można by nie otrzymać wszystkich całek liniowo niezależnych, jak łatwo się o tym przekonać. Aby nie przedłużać wywodów, wyprowadzimy wzory na rozwiązanie dla następującego szczególnego przypadku:

$$u_2 \neq u_1 = a_{10}.$$

W tym przypadku wzory (3.5) przyjmują postać:

$$y_1 = e^{-u_2 x}, \quad y_2 = e^{-u_2 x}\int e^{(u_2-u_1)x}\,dx,$$

$$y_3 = e^{u_2 x}\int e^{(u_2-u_1)x}\,dx^2.$$

Dwa pierwsze wzory dają bezpośrednio poszukiwane rozwiązania szczególne

$$y_1 = e^{-u_2 x}, \quad y_2 = e^{-u_1 x}.$$

Dla trzeciego rozwiązania szczególnego z dokładnością do stałych mamy

$$y_3 = B_1 x e^{-u_1 x} + B_2 e^{-u_1 x} \qquad (B_1, B_2 = \mathrm{const}),$$

wobec czego za trzecie rozwiązanie wystarczy przyjąć

$$y_3 = x e^{-u_1 x}.$$

W ten sposób można łatwo wykazać, że wzory (3.6) i (3.7) dają wszystkie rozwiązania nawet w przypadku, gdy równanie charakterystyczne posiada pierwiastki wielokrotne.

4.2. Zastosowanie metody rozkładu do równań Eulera. Podobnie i w tym przypadku nasza teoria ogólna zawiera gotowe wzory na rozwiązanie równań Eulera. Również i tutaj wypadnie udowodnić jeden lemat podobny do lematu 6.

Niech będzie dane równanie

$$y^{(n+1)} + \tilde{a}_{n+1,n}x^{-1}y^{(n)} + \tilde{a}_{n+1,n-1}x^{-2}y^{(n-1)} + \ldots + \qquad (a_{n+1,n+1} = 1). \tag{4.8}$$
$$+ \tilde{a}_{n+1,1}x^{-n}y' + \tilde{a}_{n+1,0}x^{-(n+1)}y = b_{n+1}(x),$$

W równaniu tym (a również wszędzie w dalszych częściach artykułu) symbole z wężykami oznaczają wielkości stałe. Szukać będziemy rozkładu (2.12) przy narzucającym się założeniu

$$u_n = \tilde{u}_n x^{-1}. \tag{4.9}$$

Stąd

$$a_{n,n-1} = \tilde{a}_{n,n-1}x^{-1}.$$

I w tym przypadku równanie $\hat{R}_n$ odpowiadające równaniu liniowemu (4.8) staje się równaniem algebraicznym. Istotnie, biorąc pod uwagę wzór (1.1) wykażemy indukcyjnie, że

$$I^k[\tilde{u}_n x^{-1}] = (-1)^{k+1}[\tilde{u}_n]^{k+1}x^{-(k+1)},$$

gdzie symbolem $[\tilde{u}_n]^k$ oznaczyliśmy iloczyn faktorialny:

$$[\tilde{u}_n]^k \equiv \tilde{u}_n(\tilde{u}_n+1)(\tilde{u}_n+2)\ldots(\tilde{u}_n+k-1).$$

Stąd równanie $\hat{R}_n$ (1.11) przyjmuje postać

$$P_{n+1}(\tilde{u}_n) \equiv [u_n]^{n+1} - a_{n+1,n}[u_n]^n + \ldots \pm a_{n+1,1}[\tilde{u}_n] \mp a_{n0} = 0, \tag{4.10}$$

co należało wykazać.

Jeśli równanie (4.10) posiada wszystkie pierwiastki $\tilde{u}_{n(i)}$ $(i=0,1,\ldots,n)$ różne, to mamy określonych $n+1$ wyróżnionych współczynników rozkładu $u_{n(i)}=\tilde{u}_{n(i)}x^{-1}$. Są to funkcje istotnie różne, gdyż wyznacznik T zgodnie ze wzorem (1.9) po oczywistych uproszczeniach sprowadza się do postaci:

$$T(-u_{n(0)},-u_{n(1)},\ldots,-u_{n(n)})=\pm x^{-p}V(\tilde{u}_{n(0)},\tilde{u}_{n(1)},\ldots,\tilde{u}_{n(n)}),$$

gdzie symbolem V oznaczyliśmy wyznacznik Vandermonde'a. Nie znika on na mocy założenia, że pierwiastki $\tilde{u}_{n(i)}$ są różne. Stąd na podstawie wzoru (1.18) znajdziemy rozwiązanie ogólne jednorodnego równania Eulera:

$$y=\sum_{i=0}^{n}C_i x^{-\tilde{u}_{n(i)}},$$

gdyż

$$U_i=\ln|x|^{\tilde{u}_{n(i)}}.$$

Jednak do ogólniejszych wzorów prowadzą i w tym przypadku wzory (3.6) i (3.7). Występujące w nich funkcje $u_{n(i)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ są, jak wiadomo, rozwiązaniami szczególnymi ciągu równań różniczkowych $\hat{R}_i[u_i]=0$, jakie się pojawiają przy kolejnym rozkładzie różniczkowych wyrażeń liniowych $L_{i+1}[y]$. Rozwiązanie równania (4.8) sprowadza się do wyznaczenia funkcji $u_i(x)$.

Aby wyznaczyć te funkcje, zwróćmy przede wszystkim uwagę, że równanie $(3.1)_1$ jest również równaniem Eulera. Istotnie, wynika to z założenia (4.9) oraz ze wzorów (2.16), z których kolejno wyliczamy $a_{n,n-1},a_{n,n-2},\ldots,a_{n,0}$.

Napiszmy równania (2.16). Podstawiając do (2.16) $u_n=\tilde{u}_n x^{-1}$, wprowadzając oznaczenia $a_{n,i}=\tilde{a}_{ni}x^{i-n}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ oraz biorąc pod uwagę wzór

$$u_n^{(i)}=(-1)^i\,i\,!\,\tilde{u}_n x^{-(i+1)},$$

po podzieleniu obu stron równań (2.16) przez odpowiednią potęgę niewiadomej x, znajdziemy następujący układ równań algebraicznych:

$$\tilde{a}_{n+1,n+1-i}=\tilde{u}_n\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j-1}\frac{(n-j)!}{(n-i+1)!}\tilde{a}_{n,n-j}+\tilde{a}_{n,n-i} \tag{4.11}$$

$$(i=1,2,\ldots,n+1;\ \tilde{a}_{n,-1}=0,\ \tilde{a}_{nn}=1).$$

Wprowadzając macierz pomocniczą

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & \text{jeśli } i\leqslant j,\\ 1, & \text{jeśli } i>j,\end{cases}$$

dopisując jeszcze tożsamość $\tilde{a}_{n+1,n+1}=\tilde{a}_{nn}$ oraz zastępując indeks n przez k, możemy układ (4.11) przepisać w sposób następujący:

$$\tilde{a}_{k+1,k+1-i}=\tilde{u}_k\sum_{j=0}^{k}(-1)^{i-j-1}\delta_{ij}\frac{(k-j)!}{(k+1-i)!}\tilde{a}_{k,k-j}+\tilde{a}_{k,k-i}. \tag{4.12}$$

Związki powyższe określające zależność pomiędzy współczynnikami równań $L_{k+1}[v_{k+1}]=0$ oraz $L_k[v_k]=0$ typu (4.8), pojawiających się w procesie kolejnego rozkładu pozwalają uzasadnić następujący

Lemat 7. Jeśli pierwiastkami równania charakterystycznego $P_k(r)=0$ są liczby $r_{k(i)}$ $(i=1,\ldots,k)$,

$$P_k(r_{k(i)})=0, \tag{4.13}$$

to poprzednie równanie charakterystyczne $P_{k+1}(r)=0$ posiada k takich pierwiastków $r_{k+1(i)}$ $(i=1,\ldots,k)$, że są one różnicą odpowiedniego pierwiastka «następnego» równania charakterystycznego $P_k(r)=0$ oraz jedności:

$$P_{k+1}(r_{k(i)}-1)=0. \tag{4.14}$$

Tak więc pomiędzy pierwiastkami dwóch kolejnych równań charakterystycznych zachodzi związek

$$r_{k+1(i)}=r_{k(i)}-1 \qquad (i=1,\ldots,k). \tag{4.15}$$

D o w ó d. Dla oznaczenia zmiennych niezależnych w równaniach charakterystycznych użyjemy tu symbolu r. Weźmy pod uwagę dwa kolejne równania charakterystyczne

$$P_{k+1}(r)=\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\tilde{a}_{k+1,k+1-i}[r]^{k+1-i} \tag{4.16}$$

oraz

$$P_k(r)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tilde{a}_{k,k-i}[r]^{k-i}. \tag{4.17}$$

Niechaj r_ν oznacza dowolny pierwiastek równania (4.17). Podstawmy do (4.16) $r=r_\nu-1$, znajdziemy

$$P_{k+1}(r_\nu-1)=\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\tilde{a}_{k+1,k+1-i}[r_\nu-1]^{k+1-i}.$$

To ostatnie wyrażenie przekształcimy zastępując współczynniki $\tilde{a}_{k+1,k+1-i}$ przez sumy (4.12):

$$P_{k+1}(r_\nu-1)=(r_\nu-1)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tilde{a}_{k,k-i}[(r_\nu]^{k-i}+$$

$$+\tilde{u}_k\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{2i-1-j}\delta_{ij}\frac{(k-j)!}{(k+1-i)!}[r_\nu-1]^{k+1-i}\tilde{a}_{k,k-j}=$$

$$=(r_\nu-1)P_k(r_\nu)-\tilde{u}_k\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\tilde{a}_{k,k-j}\sum_{i=0}^{k+1}\delta_{ij}\frac{(k-j)!}{(k+1-i)!}[r_\nu-1]^{k+1-i}.$$

Na podstawie definicji symboli δ_{ij} mamy

$$A_{k,j-k} = \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{ij} \frac{(k-j)!}{(k+1-i)!} [r_\nu - 1]^{k+1-i} =$$

$$= \sum_{i=j+1}^{k+1} \frac{(k-j)!}{(k+1-i)!} [r_\nu - 1]^{k+1-i} = \sum_{p=0}^{k-j} \frac{(k-j)!}{p!} [r_\nu - 1]^p .$$

Ponieważ słuszna jest tożsamość

$$\sum_{p=0}^{k-j} \frac{(k-j)!}{p!} [r_\nu - 1]^p = [r_\nu]^{k-j}$$

(dowód indukcyjny nie sprawia trudności), to

$$A_{k,j-k} = [r_\nu]^{k-j}$$

i dochodzimy w ten sposób do tożsamości

$$P_{k+1}(r_\nu - 1) = (r_\nu - 1) P_k(r_\nu) - \tilde{u} P_k(r_\nu) .$$

Wyprowadzenie powyższego związku kończy dowód lematu, gdyż

$$P_k(r_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Na podstawie wzoru (4.15) można pewien pierwiastek $\tilde{u}_k$ równania $P_k(\tilde{u}_k) = 0$ związać z pewnym pierwiastkiem równania (4.10), tj. przyjąć

$$\tilde{u}_{n-k} = \tilde{u}_{n(n-k)} + k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

przy czym, jak łatwo sprawdzić, $\tilde{a}_{10} = u_{n(0)}$.

Stąd

$$\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k = \tilde{u}_{n(k+1)} - \tilde{u}_{n(k)} - 1$$

i wzory (3.6) oraz (3.7) dla równań Eulera przyjmują postać

$$(3.6.1) \quad \begin{cases} y_1 = x^{-\tilde{u}_{n(n)}}, \\ y_2 = x^{-\tilde{u}_{n(n)}} \int x^{\tilde{u}_{n(n)} - \tilde{n}_{n(n-1)} - 1} dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n+1} = x^{-\tilde{u}_{n(n)}} \int x^{\tilde{u}_{n(n)} - \tilde{u}_{n(n-1)} - 1} \int x^{\tilde{u}_{n(n-1)} - \tilde{u}_{n(n-2)} - 1} \int \ldots \\ \qquad\qquad \ldots \int x^{\tilde{u}_{n(1)} - \tilde{u}_{n(0)} - 1} dx^n \end{cases}$$

oraz

$$(3.7.1) \quad Y_{n+1} = x^{-\tilde{u}_{n(n)}} \int x^{\tilde{u}_{n(n)} - \tilde{u}_{n(n-1)} - 1} \int \ldots \int x^{\tilde{u}_{n(1)} - \tilde{u}_{n(0)} - 1} \int b_{n+1}(x) x^{\tilde{u}_{n(0)} + n} dx^{n+1},$$

gdzie liczby $\tilde{u}_{n(i)} (i = 0, 1, \ldots, n)$ są pierwiastkami równania charakterystycznego (4.10), zarówno gdy równanie charakterystyczne posiada pierwiastki wielokrotne, jak i gdy wszystkie pierwiastki są różne.

Gdy równanie charakterystyczne posiada wszystkie pierwiastki różne, łatwo zauważyć, że wszystkie potęgi w kolejnych całkach są różne od -1, wobec czego w całkach (3.6.1) nie wystąpią logarytmy i (po opuszczeniu współczynników stałych) otrzymamy potęgi niewiadomej x, a całka szczególna równania niejednorodnego ma postać całki wielokrotnej (3.7.1).

W przypadku drugim, gdy równanie charakterystyczne posiada pierwiastki wielokrotne, obliczenie powyższych całek nie przedstawia trudności, otrzymamy znane wzory z logarytmami.

Aby otrzymać wszystkie całki liniowo niezależne należy również tak ponumerować pierwiastki $\tilde{u}_{n(i)}$ równania charakterystycznego, aby logarytmy wystąpiły już przy obliczeniu pierwszych całek, a więc trzeba je uporządkować tak samo jak w przypadku równania o współczynnikach stałych. Czytelnik sprawdzi, że wzory (3.6.1) oraz (3.7.1) prowadzą do znanych wzorów z logarytmami.

4.3. Równanie elementarnie rozkładalne. Rozkład na czynniki operatorowe lewej strony równania liniowego o współczynnikach stałych i równania Eulera daje się dokonać bez rozwiązywania równań różniczkowych. W obu przypadkach punktem wyjścia jest poszukiwanie rozwiązania w postaci iloczynu

$$u_n = \tilde{u}_n a_{n+1,n} \qquad (\tilde{u}_n = \text{const}). \tag{4.18}$$

Na przykładzie równania Eulera widać, że podstawienie (4.18) okazało się celowe tylko dlatego, że współczynniki tego równania są odpowiednio dobrane. Stąd staje się interesujące pytanie z punktu widzenia praktycznego rozwiązywania równań liniowych, czy istnieją inne równania, których lewe strony można rozłożyć na czynniki operatorowe bez rozwiązywania równań różniczkowych. Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Równania o tej własności nazywać będziemy elementarnie rozkładalnymi, a klasę tych równań oznaczać symbolem E.

Na tle teorii równań Riccatiego R w pracy [9] sformułowane zostało pewne kryterium, które muszą spełniać współczynniki równania liniowego, aby równanie należało do klasy E.

Posługując się definicją równania Riccatiego drugiego rodzaju $\hat{R}$, odpowiadającego danemu równaniu liniowemu, można również podać inne kryteria rozkładalności elementarnej, a przez to rozszerzyć klasę równań, do których mogą być zastosowane metody rozwiązywania oparte na rozkładzie na czynniki liniowego wyrażenia różniczkowego. Punktem wyjścia będą podstawienia postaci (4.18).

Może się mianowicie zdarzyć, że dla pewnego równania liniowego (o współczynnikach funkcyjnych) istnieje taka liczba $\tilde{u}_n$, że przynajmniej jeden warunek

$$\hat{R}_n[\tilde{u}_n a_{n+1,i}] = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{4.19}$$

jest spełniony tożsamościowo względem x. Równanie o tej własności jest więc elementarnie rozkładalne na tle teorii równań $\hat{R}$. Pisząc wyraźniej warunek (4.19) znajdziemy $(a_{n+1,n+1} = 1)$

$$\begin{aligned} I^n[-\tilde{u}_n a_{n+1,i}] + a_{n+1,n} I^{n-1}[-\tilde{u}_n a_{n+1,i}] + \ldots + \\ + a_{n+1,1} I^0[-\tilde{u}_n a_{n+1,i}] + a_{n+1,0} \underset{x}{\equiv} 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Dla celów praktycznych podamy warunki rozkładalności elementarnej (4.20) dla $n = 1, 2, 3$.

Warunki rozkładalności elementarnej dla równań liniowych drugiego rzędu

$$\left\{\begin{aligned} & a_{21}^2\tilde{u}_1^2-(a_{21}^2+a_{21}')\tilde{u}_1+a_{20} \underset{x}{\equiv} 0 && (u_1'(x) = \tilde{u}_1 a_{21}), \\ & a_{20}^2\tilde{u}_1^2-(a_{21}a_{20}+a_{20}')\tilde{u}_1+a_{20} \underset{x}{\equiv} 0 && (u_2(x) = \tilde{u}_1 a_{20}); \end{aligned}\right. \tag{4.21}$$

dla równania trzeciego rzędu

$$\left\{\begin{aligned} & a_{32}^3\tilde{u}_2^3-(a_{32}^3+3a_{32}a_{32}')\tilde{u}_2^2+(a_{32}''+a_{32}a_{32}'+a_{32}a_{31})\tilde{u}_2-a_{30} \underset{x}{\equiv} 0 && (u_2 = \tilde{u}_2 a_{32}), \\ & a_{31}^3\tilde{u}_2^3-(a_{32}a_{31}^2+3a_{21}a_{31}')\tilde{u}_2^2+(a_{31}''+a_{32}a_{31}'+a_{31}^2)\tilde{u}_2-a_{30} \underset{x}{\equiv} 0 && (u_2 = \tilde{u}_2 a_{31}), \\ & a_{30}^3\tilde{u}_2^3-(a_{32}a_{30}^2+3a_{30}a_{30}')\tilde{u}_2^2+(a_{30}''+a_{32}a_{30}'+a_{31}a_{30})\tilde{u}_2-a_{30} \underset{x}{\equiv} 0 && (u_2 = \tilde{u}_2 a_{30}); \end{aligned}\right. \tag{4.22}$$

dla równania czwartego rzędu

$$\left\{\begin{aligned} & a_{43}^4\tilde{u}_3^4-(6a_{43}^2a_{43}'+a_{43}^4)\tilde{u}_3^3+(3a_{43}'^2+4a_{43}a_{43}''+3a_{43}^2a_{43}'+a_{42}a_{43}^2)\tilde{u}_3^2- \\ & \qquad -(a_{43}'''+a_{43}a_{43}''+a_{42}a_{43}'+a_{41}a_{43})\tilde{u}_3+a_{40} \underset{x}{\equiv} 0 \quad (u_3 = \tilde{u}_3 a_{43}), \\ & a_{42}^4\tilde{u}_3^4-(6a_{42}^2a_{42}'+a_{43}a_{42}^3)\tilde{u}_3^3+(3a_{42}'^2+4a_{42}a_{42}''+3a_{43}a_{42}a_{42}'+a_{42}^3)\tilde{u}_3^2- \\ & \qquad -(a_{42}'''+a_{43}a_{42}''+a_{42}a_{42}'+a_{41}a_{42})\tilde{u}_3+a_{40} \underset{x}{\equiv} 0 \quad (u_3 = \tilde{u}_3 a_{42}), \\ & a_{41}^4\tilde{u}_3^4-(6a_{41}^2a_{41}'+a_{43}a_{41}^3)\tilde{u}_3^3+(3a_{41}'^2+4a_{41}''a_{41}+3a_{43}a_{41}a_{41}'+a_{42}a_{41}^2)\tilde{u}_3^2- \\ & \qquad -(a_{41}'''+a_{43}a_{41}''+a_{42}a_{41}'+u_{41}^2)\tilde{u}_3+a_{40} \underset{x}{\equiv} 0 \quad (u_3 = \tilde{u}_3 a_{41}), \\ & a_{40}^4\tilde{u}_3^4-(6a_{40}^2a_{40}'+a_{43}a_{40}^3)\tilde{u}_3^3+(3a_{40}'^2+4a_{40}a_{40}''+3a_{43}a_{40}a_{40}'+a_{42}a_{40}^2)\tilde{u}_3^2- \\ & \qquad -(a_{40}'''+a_{43}a_{40}''+a_{42}a_{40}'+a_{41}a_{40})\tilde{u}_3+a_{40} \underset{x}{\equiv} 0 \quad (u_3 = \tilde{u}_3 a_{40}). \end{aligned}\right. \tag{4.23}$$

O współczynniku $a_{n+1,i}$ występującym w warunku rozkładalności zakładamy dodatkowo, że jest funkcją klasy C^n.

W związku z warunkiem (4.20) nasuwają się następujące uwagi.

1. Jest to warunek wiążący współczynniki równania liniowego oraz parametr liczbowy $\tilde{u}_n$. Dla równań o współczynnikach stałych i równań Eulera warunki (4.20) sprowadzają do równań charakterystycznych. W pracy [9] udowodniono, że przy podstawieniu (4.18) (gdy $n = 1, 2, 3$) jedynie równania o współczynnikach stałych i równania Eulera posiadają równania charakterystyczne.

2. Klasa równań E jest obszerniejsza od klasy równań Eulera i równań o współczynnikach stałych; to głównie decyduje o przydatności kryteriow rozkładalności elementarnej.

P r z y k ł a d. Równanie

$$y''+\frac{1}{\tilde{\varkappa}^2}\,\frac{e^{x/\tilde{\varkappa}}}{\tilde{k}-e^{x/\tilde{\varkappa}}}\,y = 0 \qquad (\tilde{\varkappa}, \tilde{k} = \mathrm{const}) \tag{4.24}$$

jest rozkładalne elementarnie, gdyż, jak łatwo sprawdzić, warunek (4.21) ma postać ($a_{21} = 0$, $a_{20} = e^{x/\tilde{\varkappa}}/\tilde{\varkappa}^2\ (\tilde{k}-e^{x/\tilde{\varkappa}})$):

$$a_{20}^2\tilde{u}_1^2-a_{20}'\tilde{u}_1+a_{20} = 0 \qquad (u_1 = \tilde{u}_1 a_{20}) \tag{4.25}$$

i jest spełniony, gdy przyjąć $\tilde{u}_1 = \tilde{\varkappa}$.

Wynika stąd, że umiemy rozwiązać równanie (4.24). Istotnie,

$$u_1 = \tilde{u}_1 a_{20} = \frac{e^{x/\tilde{\varkappa}}}{\tilde{\varkappa}(\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}})},$$

a jak wynika ze wzoru $(2.19)_2$ $a_{10} = -u_1$. Stąd

$$U_1 = -\ln|\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}}|, \quad u_1 - a_{10} = 2u_1,$$
$$U_1 - A_{10} = \ln|\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}}|^{-2}$$

i po uwzględnieniu wzorów (3.6) znajdziemy dwa liniowo niezależne rozwiązania równania (4.24):

$$y_1 = \tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}},$$
$$y_2 = y_1 \int (\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}})^{-2} dx$$

lub, po wykonaniu kwadratury,

$$y_2 = \frac{\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}}}{\tilde{k}^2} \ln\left|\frac{e^{x/\tilde{\varkappa}}}{\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}}}\right| + \frac{1}{\tilde{\varkappa}}.$$

Na całkę szczególną równania niejednorodnego mamy zgodnie z (3.7) wzór

$$Y_2 = (\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}}) \int (\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}})^{-2} \int b_2(x) (\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}})\, dx^2.$$

3. Kryteria (4.20) posiadają postać wygodną dla zastosowań, gdyż łatwo jest rozstrzygnąć, czy równanie jest rozkładalne elementarnie, czy nie, podstawiając współczynniki do tożsamości (4.20). Np. równanie (4.24) — jak stwierdziliśmy — jest elementarnie rozkładalne, natomiast równanie Bessela

$$y'' + x^{-1}y' + (1 - n^2x^{-2})y = 0$$

nie jest rozkładalne elementarnie, warunek (4.21) dla tego równania przybiera formę

$$(\tilde{u}_1^2 - n^2)x^2 + 1 \underset{x}{\equiv} 0$$

i nie jest spełniony w żadnym przedziale.

Może się również zdarzyć, że równanie w ogólnym przypadku nierozkładalne da się rozłożyć w przypadku szczególnym. Warunki (4.20) umożliwiają wykrycie takich przypadków. Weźmy dla ilustracji np. równanie Webera

$$y'' - xy' - a(x)y = 0.$$

Nie da się ono rozwiązać w ogólnym przypadku za pomocą kwadratur. Warunek $(4.21)_1$ przybiera dla tego równania formę

$$\tilde{u}_1 x^2(\tilde{u}_1 - 1) + \tilde{u}_1 - a \underset{x}{\equiv} 0.$$

Warunek ten jest spełniony, gdy $\tilde{u}_1 = 1$ oraz $a = 1$, a wzory p. 3 dają natychmiast rozwiązanie ogólne dla tego szczególnego przypadku.

4. Kryteria (4.20) są znacznie prostsze od sformułowanych na tle teorii równań R (por. [9]), gdyż występują w nich pochodne tylko jednego współczynnika $a_{n+1,i}$ i w konsekwencji mogą być spełnione przy słabszych założeniach dotyczących współczynników równania liniowego.

Nie potrafimy podać gotowych rozwiązań dla wielu równań różniczkowych. Rozwiązane zostały tylko takie równania, których współczynniki są w pewien sposób dobrane. Dysponując pojęciem elementarnej rozkładalności możemy powiedzieć, że równania Eulera (a również równania o współczynnikach stałych) mają współczynniki dobrane zgodnie z warunkami (4.20). Jak świadczy przykład podany wyżej, oba te rodzaje nie wyczerpują klasy E. Nawet w przypadku najprostszym, równania rzędu drugiego, nie potrafimy napisać wszystkich równań klasy E. Pewne światło rzuca na to zagadnienie następujące

Twierdzenie 15. Każde równanie różniczkowe liniowe, którego współczynniki są ciągłe oraz jeden współczynnik $a_{n+1,i}$ należy do klasy C^n, nierozkładalne elementarnie, można uczynić rozkładalnym zmieniając odpowiednio jeden jego współczynnik.

D o w ó d. Aby równanie nierozkładalne (1.13) uczynić rozkładalnym należy, jak wynika z warunku (4.20), na współczynnik $a_{n+1,j}$ przyjąć jedną z następujących funkcji:

$$(4.26)\quad a_{n+1,j} = -\{I^{j-1}[-\tilde{u}_n a_{n+1,i}]\}^{-1}\{I^n[-\tilde{u}_n a_{n+1,i}] + a_{n+1,n} I^{n-1}[-\tilde{u}_n a_{n+1,i}] + \\ + \dots + a_{n+1,j+1} I^j[-\tilde{u}_n a_{n+1,i}] + a_{n+1,j-1} I^{j-2}[-\tilde{u}_n a_{n+1,i}] + \dots + a_{n+1,0}\} \\ (j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n).$$

Można również zmienić współczynnik $a_{n+1,i}$ występujący w podstawieniu $u_n = \tilde{u}_n a_{n+1,i}$, ale taka zmiana wymaga rozwiązania nieliniowego równania różniczkowego.

Ze wzoru (4.20) wynika, że najłatwiej zmienić ostatni współczynnik $a_{n+1,0}$.

P r z y k ł a d. 1 Weźmy pod uwagę równanie drugiego rzędu i przyporządkujmy mu równanie elementarnie rozkładalne dobierając współczynnik a_{21} na podstawie warunku $(4.21)_2$. Ponieważ wtedy

$$a_{21} = \tilde{u}_1 a_{20} - \frac{a'_{20}}{a_{20}} + \frac{1}{\tilde{u}_1},$$

to dochodzimy do równania

$$(4.27)\qquad y'' + \left(\tilde{u}_1 a_{20}(x) - \frac{a'_{20}(x)}{a_{20}(x)} + \frac{1}{\tilde{u}_1}\right) y' + a_{20} y = b_2(x).$$

Skreślenie w tym równaniu wyrazu a'_{20}/a_{20} prowadzi do równania O. Olssona (por. [11]). Biorąc pod uwagę wzory $(4.21)_2$ i (2.19) znajdziemy związki

$$u_1 = \tilde{u}_1 a_{20}, \qquad u_1 - a_{10} = \tilde{u}_1 a_{20} - \frac{1}{\tilde{u}_1} + \frac{a'_{20}}{a_{20}}, \qquad a_{10} = \frac{1}{\tilde{u}_1} - \frac{a'_{20}}{a_{20}}$$

i zgodnie z (3.6) oraz (3.7) rozwiązanie ogólne równania (4.27):

$$(4.28)\qquad \begin{cases} y_1 = e^{-\tilde{u}_1 A_{20}}, \quad y_2 = e^{-\tilde{u}_1 A_{20}} \int a_{20} \exp\left[\tilde{u}_1 A_{20} - \dfrac{x}{\tilde{u}_1}\right] dx, \\ Y_2 = e^{-\tilde{u}_1 A_{20}} \int a_{20} \exp\left[\tilde{u}_1 A_{20} - \dfrac{x}{\tilde{u}_1}\right] \int b_2(x) a_{20}^{-1} e^{x/\tilde{u}_1} dx^2, \end{cases}$$

gdzie A_{20} oznacza funkcję pierwotną funkcji a_{20}.

Równanie (4.27) mimo specjalnej budowy, jest dość ogólne, gdyż zawiera funkcję dowolną a_{20}. Podstawiając na a_{20} jakąkolwiek ustaloną funkcję, otrzymujemy wiele równań, rozkładalnych elementarnie, których rozwiązanie na innej drodze mogłoby okazać się trudne. Np. jeśli $\tilde{u}_1 = 1$, $a_{20} = \beta \sin \alpha x$, to mamy następujące równanie klasy E:

$$y'' + (\beta \sin \alpha x - \alpha \operatorname{ctg} \alpha x + 1) y' + (\beta \sin \alpha x) y = b_2(x).$$

Równanie (4.27) spełniające warunek $(4.21)_2$, jak łatwo sprawdzić, nie wyczerpuje wszystkich równań spełniających ten warunek.

P r z y k ł a d 2. Podobnie możemy dobrać współczynnik na podstawie warunku $(4.21)_1$. Odpowiednie równanie ma postać

$$(4.29)\qquad y'' + a_{21} y' + [\tilde{u}_1 a_{21}' + \tilde{u}_1(1-\tilde{u}_1) a_{21}^2] y = b_2(x).$$

Ponieważ dla równania (4.29)

$$u_1 = \tilde{u}_1 a_{21}, \quad a_{10} = a_{21} - u_1 = (1-\tilde{u}_1) a_{21},$$
$$u_1 - a_{10} = 2u_1 a_{21} - a_{21},$$

to rozwiązanie ogólne równania (4.29) zgodnie ze wzorami (3.6) oraz (3.7) jest określone przez następujące trzy funkcje

$$(4.30)\qquad \begin{cases} y_1 = e^{-\tilde{u}_1 A_{21}}, \quad y_2 = e^{-\tilde{u}_1 A_{21}} \int e^{(2\tilde{u}_1 - 1) A_{21}} dx, \\ Y_2 = e^{-\tilde{u}_1 A_{21}} \int e^{(2\tilde{u}_1 - 1) A_{21}} \int b_2 e^{(1-\tilde{u}_1) A_{21}} dx^2. \end{cases}$$

Symbol A_{21} oznacza funkcję pierwotną funkcji a_{21}. Równanie to podał i rozwiązał inną metodą H. Görtler, [10].

I to równanie mimo specjalnej budowy zawiera wiele przypadków szczególnych, gdyż występuje w nim jedna funkcja dowolna. Na przykład gdy $a_{21} = \tilde{a}_{21} x^{-1}$, to mamy równanie Eulera.

4.4. Metoda przybliżonego rozwiązywania różniczkowych równań liniowych oparta na doborze jednego współczynnika. Zauważmy, że dobór jednego współczynnika równania liniowego z warunku rozkładalności elementarnej nie jest jednoznaczny. Współczynnik ten zależy od parametru $\tilde{u}_n$ oraz ewentualnie od innych parametrów występujących w pozostałych współczynnikach równania. W analogicznych zagadnieniach dla równań R wprowadzić można do dobranego współczynnika (na podstawie twierdzenia 15) i stałe całkowe. To uzależnienie zmienionego współczynnika od parametrów może być niekiedy wykorzystane do przybliżonego rozwiązywania pewnych zagadnień, szczególnie jeśli są one zagadnieniami techniki lub fizyki. Istotnie, w takich przypadkach współczynniki równań mają najczęściej wyrażoną interpretację fizykalną i są często funkcjami ustalonymi na drodze doświadczalnej. Biorąc to pod uwagę może się udać takie określenie wartości parametrów w dobranym na podstawie warunku (4.20) współczynniku, że otrzymane równanie dobrze opisuje badane zjawisko.

5. Przykład z zakresu teorii sprężystości

Jak wiadomo, równanie dla belki o zmiennym przekroju, na którą działa siła osiowa ściskająca P oraz dowolne obciążenie poprzeczne $q(x)$, może być sprowadzone do układu dwóch równań

$$\left\{\begin{array}{l} M''(x)+\dfrac{P}{B(x)}M(x)=q(x), \\ By''=M(x), \end{array}\right. \tag{5.1}$$

gdzie $M(x)$ oznacza moment zginający, $B(x)=EJ(x)$ zmienną sztywność na zginanie, $q(x)$ obciążenie pionowe na jednostkę długości oraz $y(x)$ ugięcie belki.

Układ równań (5.1) lub, co na jedno wyjdzie, odpowiadające mu równanie czwartego rzędu, bywa rozwiązywany w sposób przybliżony np. przy rozwinięciu współczynników układu na szeregi nieskończone (por. np. [12]).

Przyjmijmy, że w pewnym przypadku zmienną sztywność belki można dobrze określić za pomocą funkcji

$$B(x)=\frac{\tilde{\varkappa}^2P(\tilde{k}-e^{x/\tilde{\varkappa}})}{e^{x/\tilde{\varkappa}}} \qquad (\tilde{\varkappa},\tilde{k}=\text{const}). \tag{5.2}$$

Funkcja B jest uzależniona od dwóch zmieniających się w szerokim zakresie parametrów $\tilde{\varkappa}$ oraz $\tilde{k}$. W zależności od obciążenia i wymiarów belki będzie można więc dobierać wartość tych parametrów. Sztywność B jest poza tym wprost proporcjonalna do siły ściskającej P.

Łatwo zauważyć, że założenie (5.2) sprowadza równania (5.1) do równania (4.24) i wobec tego, że równanie (4.24) jest elementarnie rozkładalne, potrafiliśmy je rozwiązać. Na moment $M(x)$ znaleźliśmy następujące rozwiązanie ogólne

$$M(x)=A_1(\tilde{k}-e^{x/\tilde{\varkappa}})+A_2\left[\frac{\tilde{k}-e^{x/\tilde{\varkappa}}}{\tilde{k}^2}\ln\left|\frac{e^{x/\tilde{\varkappa}}}{\tilde{k}-e^{x/\tilde{\varkappa}}}\right|+\frac{1}{\tilde{k}}\right]+S_m(x),$$

gdzie

$$S_m(x)=Y_2=(\tilde{k}-e^{x/\tilde{\varkappa}})\int(\tilde{k}-e^{x/\tilde{\varkappa}})^{-2}\int q(x)(\tilde{k}-e^{x/\tilde{\varkappa}})\,dx^2$$

oraz gdzie A_1 i A_2 są stałymi całkowania.

Ponieważ funkcję $M(x)$ znamy, to możemy określić linię ugięcia $y(x)$ z łatwego równania $(5.1)_2$,

$$y''=\frac{M(x)\,e^{x/\tilde{\varkappa}}}{\tilde{\varkappa}^2P(\tilde{k}-e^{x/\tilde{\varkappa}})}.$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja

$$y = A_4 + A_3 x + \frac{1}{P}\left\{A_2 e^{x/\tilde{\varkappa}} + A_1 \left[-\frac{e^{x/\tilde{\varkappa}}}{\tilde{k}^2} \ln \left| \frac{e^{x/\tilde{\varkappa}}}{\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}}} \right| + \frac{1}{\tilde{k}} \ln |\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}}| \right]\right\} + S(x),$$

gdzie S(x) jest funkcją obciążenia, przy czym

$$S(x) = \frac{1}{\tilde{\varkappa}^2 P} \int\int e^{x/\tilde{\varkappa}} \int (\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}})^{-2} \int q(x)(\tilde{k} - e^{x/\tilde{\varkappa}})\, dx^4.$$

Funkcja obciążenia dla naszego zagadnienia została napisana jedynie dla obciążenia ciągłego $q(x)$. W przypadku występowania sił skupionych, momentów rozłożonych w sposób ciągły możemy otrzymać funkcję $S(x)$ stosując znane postępowanie (przejścia graniczne) dla funkcji $q(x)$.

Mając rozwiązanie ogólne układu (5.1) możemy podać rozwiązanie dla każdego przypadku podparcia belki.

Literatura cytowana w tekście

[1] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, 2 B., Leipzig 1889-1916.

[2] E. Kamke, *Differentialgleichungen* (tłum. ros.), Moskwa 1951.

[3] И.Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Москва 1949.

[4] E. Grünfeld, *Über Zusammenhang zwischen den Fundamentaldeterminanten einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung und ihren Adjungirten*, J. Math., **115** (1925).

[5] W. W. Stiepanow, *Równania różniczkowe* (tłum. z ros.), PWN Warszawa 1956.

[6] T. Iwiński, J. Nowiński, *The Problem of Large Deflections of Orthotropic Plates*, Arch. Mech. Stos., 5, **9** (1957).

[7] G. Mammana, *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio equazioni differenziali lineari*, Math. Zeitschr. 33, 1931.

[8] M. Nicolesco, *Sur la décomposition des polynomes différentiels en facteurs du premier ordre*, Math. Zeitschr., 33, 1932.

[9] T. Iwiński, *The Generalized Equations of Riccati and their Applications to the Theory of Linear Differential Equations*. Rozpr. Matem., 23, PWN Warszawa 1961.

[10] H. Görtler, Zeitschr. Angew. Math. Mech., **23** (1942).

[11] O. Olsson, Arkiv för Matematik, 1. **14** (1919).

[12] Ш. Микеладзе, *Некоторые задачи строительной механики*, ОГИЗ. Москва 1948.

Резюме

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ n-ТОГО ПОРЯДКА РИККАТИ ВТОРОГО РОДА. ПРИМЕНЕНИЕ ИХ К ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В некоторых задачах теории упругости (ср. [6], [12]) появляются дифференциальные уравнения, которые позволили установить понятие так наз. обобщенных дифференциальных уравнений Риккати n-того порядка. Этими уравнениями суть нелинейные уравнения, теория которых также тесно связана с линейными уравнениями $(n+1)$-го порядка, L_{n+1}. В опубликованной раньше работе [9] приводится теория этих уравнений, при предположении многократной дифференцируемости коэффициентов уравнения. В настоящей работе представляется теория обобщенных уравнений Риккати второго рода (обозначен-

ных символом $\hat{R}_n$), которые требуют более слабых предположений (единственно непрерывных коэффициентов).

В п. 1 приводится дефиниция уравнений $\hat{R}_n$ и доказывается несколько теорем, касающихся свойств этих уравнений, а также их зависимости с уравнениями L_{n+1}, соответствующих уравнениям $\hat{R}_n$. В п. 2 представляется роль уравнений $\hat{R}_n$, в задаче, касающейся разложения дифференциального линейного выражения $L_{n+1}[y]$ на произведение операционных факторов, а в п. 3 некоторые применения теории уравнений $\hat{R}_n$ к теории линейных уравнений. В п. 4 дается дефиниция дифференциальных так наз. элементарно разлагаемых уравнений (класс E). Класс E к которому, в качестве особого самого простого случая, принадлежат уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера, является естественным расширением класса этих последних уравнений. Приводится общий метод решения (снижения порядка) уравнений класса E.

Теоретические решения иллюстрируются примерами. В п. 5 дается точное решение задачи для упругой балки переменного сечения, определенной с помощью функции (5.2), находящейся под действием произвольной вертикальной нагрузки от $q(x)$ и сжимающей осевой силы P.

Summary

GENERALIZED n-TH ORDER RICCATI EQUATIONS OF THE SECOND KIND. AN APPLICATION TO THE THEORY OF ELASTICITY.

In some problems of the theory of elasticity (cf. [6], [12]) there appear differential equations leading to the notion of generalized n-th order Riccati equations. These are non-linear equations the theory of which is in close connection with the theory of $(n+1)$ -st order linear equations, L_{n+1}. In a previous publication by the present author [9], a theory of these equations has been given assuming multiple differentiability of the coefficients of the equation. In this paper a generalized theory of Riccati equations of the second kind is given (denoted by the symbol $\hat{R}_n$), requiring weaker assumptions (only those of continuity of coefficients).

In Sec. 1 $\hat{R}_n$ — equations are defined and several theorems are proved, concerning the properties of these equations and also their connection with the L_{n+1} equations corresponding to $\hat{R}_n$. Sec. 2 explains the role of $\hat{R}_n$ — equations in the problem of resolution of the linear differential equation $L_{n+1}[y]$ into a product of operator factors. Sec. 3 contains a discussion of some applications of the theory of $\hat{R}_n$ — equations to the theory of linear equations. Sec. 4 brings a definition of the so called elementarly resolvable equations (the E-class). The E-class, to which belong, as the simplest particular cases, the equations with constant coefficients and the Euler equations, constitutes a natural generalization of the letter class. A general method is given for reducing the order of an E-class equation. Theoretical results are illustrated by examples.

Section 5 contains an accurate solution of the problem of an elastic beam with variable cross-section described by the function (5.2) and acted on by an arbitrary vertical load depending on x and a compressive axial force P.

INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1961 r.