

ROMAN SOLECKI

DRGANIA SWOBODNE I WYMUSZONE PŁYTY TRÓJKĄTNEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXLII

TOM VIII . ZESZYT I . ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	77
2. Płyta swobodnie podparta na obwodzie	78
2.1. Drgania swobodne	78
2.2. Drgania wymuszone	79
3. Płyta swobodnie podparta na obwodzie i posiadająca dodatkowe podpory punktowe	84
3.1. Drgania swobodne	84
3.2. Drgania wymuszone	86
4. Płyta utwierdzona wzdłuż jednej, dwu lub trzech krawędzi	87
4.1. Przykład liczbowy	90

1. Wstęp

W artykule niniejszym rozważać będziemy drgania płyty trójkątnej stanowiącej połowę trójkąta równobocznego.

Rozpatrzmy następujące zadania: (1) płyta swobodnie podparta na obwodzie, (2) płyta swobodnie podparta na obwodzie i punktowo podparta wewnątrz swego obszaru, (3) płyta całkowicie utwierdzona na obwodzie lub też utwierdzona wzdłuż jednej lub dwu krawędzi, na pozostałych zaś swobodnie podparta.

Z wymienionych zadań jedynie pierwsze znalazło ściśle rozwiązanie w pracy PAN LI-CHOW, [10], przy czym autor rozważając płytę poddaną działaniu obciążenia, leżącego w płaszczyźnie płyty, ograniczył się do podania równania podstawowej formy drgań i odpowiadającej częstości. Dla wyznaczenia rozwiązania ogólnego zadania pierwszego trzeba więc było sięgnąć do innych prac. Autor oparł się na interesującej publikacji H. SCHAEFERA i A. HAVERSA, [12]; w pracy tej rozpatrzone zostały drgania płyty trójkątnej równobocznej na obwodzie swobodnie podpartej i znaleziono rozwiązanie ogólne problemu. Rozwiązanie to nie zostało podane w postaci szeregu, co utrudnia dokonanie dalszych uogólnień. Korzystamy więc z pracy R. GIRTLERA, [2], dotyczącej problemów statyki trójkątnej swobodnie podpartej płyty równobocznej. Wyznaczona została m.in. powierzchnia wpływu ugięcia oraz podane własne rozwiązanie w postaci sumy dwóch szeregów nieskończonych, z których jeden opisuje ugięcia spowodowane obciążeniem symetrycznym względem środkowej trójkąta, drugi zaś ugięcia wywołane obciążeniem antysymetrycznym.

Ponieważ rozwiązanie dotyczące ugięć antysymetrycznych trójkąta równobocznego spełnia zarazem warunki brzegowe $w = 0$ oraz $\partial^2 w / \partial n^2 = 0$ dla trójkąta prostokątnego o kącie ostrym 30° , porównano funkcję R. GIRTLERA z rozwiązaniem podanym w pracy [12]. Funkcje te są identyczne, a zatem funkcja zapisana przez R. GIRTLERA rozwiązuje zadanie postawione w niniejszym artykule nie obejmując jednak wszystkich postaci drgań. Okazało się możliwe uzupełnienie wyżej wymienionej funkcji i wyznaczenie rozwiązania ogólnego naszego zadania w postaci szeregu. Rozwiązanie to jest podstawą do badania drgań płyt podanych w punktach (2) i (3). Zastosowano przy tym metody podane przez W. NOWACKIEGO w pracach [8] i [9] zmieniając

niecio (w przypadku punktowego podparcia) sposób wyznaczania dynamicznej funkcji wpływu przez poszukiwanie rozwiązań w postaci szeregu według funkcji właściwych.

Zwróćmy uwagę, że mało jest ścisłych rozwiązań dotyczących drgań płyt trójkątnych o ogólniejszym kształcie. Rozwiązania obejmują następujące przypadki: płytę trójkątną prostokątną równoramienną, [4], [11] i [15], oraz płytę trójkątną równoboczną na obwodzie swobodnie podpartą, [5], [14] (w obu publikacjach rozpatruje się wyłącznie drgania symetryczne o trzech osiach symetrii) oraz [12].

2. Płyta swobodnie podparta na obwodzie

2.1. Drgania swobodne. Za podstawę wszystkich dalszych rozważań przyjęto równanie różniczkowe drgań liniowych płyty o średniej grubości przy pominięciu wpływu bezwładności obrotowej, ścinania i tłumienia:

$$(2.1) \quad N \nabla^2 \nabla^2 w(x, y, t) + \frac{\gamma h}{g} \ddot{w}(x, y, t) = 0,$$

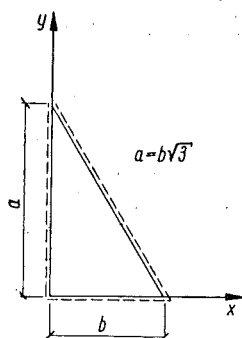
gdzie h jest grubością płyty, γ ciężarem właściwym oraz $N = Eh^3/12(1-\nu^2)$.

Z równania (2.1) po dokonaniu rozdzielania zmiennych otrzymujemy znane równanie różniczkowe dynamicznej powierzchni ugięć

$$(2.2) \quad \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) - k_{mn}^4 w(x, y) = 0,$$

gdzie

$$(2.3) \quad k_{mn}^4 = \frac{\gamma h}{Ng} \omega_{mn}^2,$$



Rys. 1

zaś ω_{mn} jest częstością drgań własnych mn -tego rzędu. Rozwiązanie ogólne równania (2.2) czyniące zadość warunkom brzegowym

$$(2.4) \quad w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial n^2} = 0$$

na wszystkich krawędziach, ma postać

$$(2.5) \quad w(x, y) = \sum_{\substack{m=2 \\ n=1 \\ m>n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\sin \frac{(2m+n)\pi}{3b} x \sin \frac{n\pi}{a} y - \right. \\ \left. - (-1)^{m+n} \sin \frac{(m+2n)\pi}{3b} x \sin \frac{m\pi}{a} y + \right. \\ \left. + (-1)^m \sin \frac{(m-n)\pi}{3b} x \sin \frac{(m+n)\pi}{a} y \right] = \sum_{\substack{m=2 \\ n=1 \\ m>n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \Phi_{mn}(x, y),$$

gdzie $\Phi_{mn}(x, y)$ jest mn -tą funkcją właściwą.

Podstawiając (2.5) do (2.2) otrzymujemy

$$(2.6) \quad k_{mn} = \frac{2\pi}{3a} \sqrt{3(m^2 + mn + n^2)} = \frac{\pi}{a} \sqrt{(m+n)^2 + \frac{(m-n)^2}{3}},$$

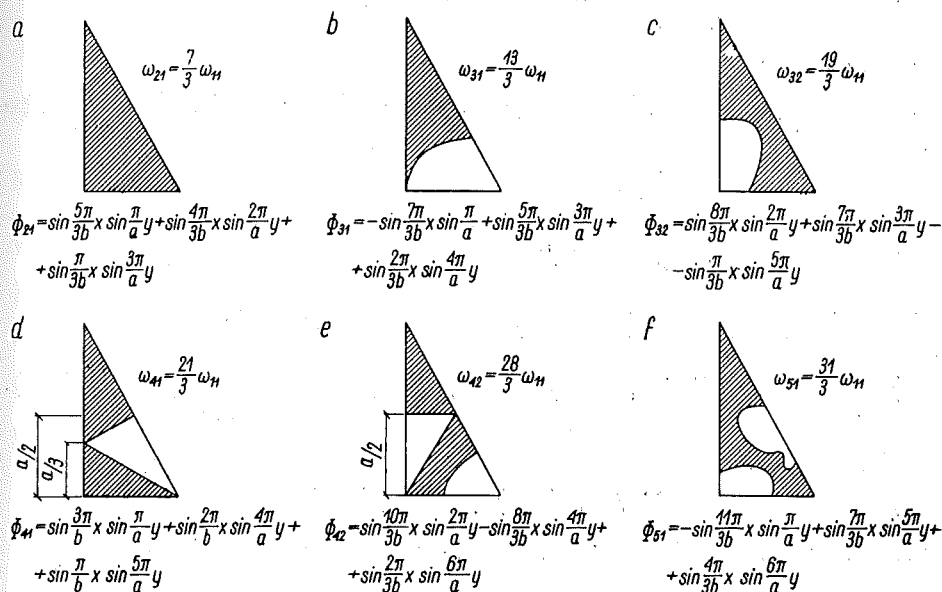
a zatem z (2.3)

$$(2.7) \quad \omega_{mn} = \frac{4\pi^2(m^2 + mn + n^2)}{3a^2} \sqrt{\frac{Ng}{\gamma h}} = \frac{m^2 + mn + n^2}{3} \omega_{11},$$

przy czym ω_{11} jest częstością drgań podstawowych płyty równobocznej i określone jest wzorem

$$(2.8) \quad \omega_{11} = \frac{4\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{Ng}{\gamma h}}.$$

Na rysunku 2 podane są linie węzłowe sześciu kolejnych postaci drgań.



Rys. 2

2.2. Drgania wymuszone. Przechodząc do drgań wymuszonych rozważać będziemy równanie

$$(2.9) \quad N\nabla^2 \nabla^2 w(x, y, t) + \frac{\gamma h}{g} \ddot{w}(x, y, t) = p(x, y, t).$$

Poszukujemy całki szczególnej równania (2.9) odpowiadającej drganiom ustalonym, tzn. występującym po stłumieniu drgań swobodnych; w tym celu

rozkładamy zarówno obciążenie wymuszające $p(x, y, t)$, jak i badaną funkcję $w(x, y, t)$ w szeregi według funkcji właściwych¹

$$(2.10) \quad w(x, y, t) = \sum_{m, n} T_{mn}(t) \Phi_{mn}(x, y),$$

$$(2.11) \quad p(x, y, t) = \sum_{m, n} p_{mn}(t) \Phi_{mn}(x, y),$$

gdzie jak wiadomo

$$(2.12) \quad p_{mn}(t) = \frac{\iint p(x, y, t) \Phi_{mn}(x, y) dx dy}{\iint [\Phi_{mn}(x, y)]^2 dx dy}.$$

Związek (2.12) wynika z ortogonalności układu funkcji właściwych:

$$(2.13) \quad \int_0^a \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}(a-y)} \Phi_{mn}(x, y) \Phi_{m_1 n_1}(x, y) dx dy = 0,$$

jeśli $m \neq m_1$ lub $n \neq n_1$.

Po żmudnych, lecz nieskomplikowanych obliczeniach znajdziemy nadto dla $m = m_1$ i $n = n_1$

$$(2.14) \quad \int_0^a \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}(a-y)} [\Phi_{mn}(x, y)]^2 dx dy = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}.$$

Podstawiając (2.10) i (2.11) do (2.9) otrzymujemy równanie

$$(2.15) \quad \sum_{m, n} [NT_{mn}(t) \nabla^2 \nabla^2 \Phi_{mn}(x, y) + \frac{\gamma h}{g} \ddot{T}_{mn}(t) \Phi_{mn}(x, y)] = \sum_{m, n} p_{mn}(t) \Phi_{mn}(x, y).$$

Biorąc pod uwagę równanie

$$(2.16) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi_{mn}(x, y) = k_{mn}^4 \Phi_{mn}(x, y),$$

wyznaczamy dla każdej dopuszczalnej pary wartości m i n związek

$$(2.17) \quad \ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = \frac{g}{\gamma h} p_{mn}(t),$$

gdzie ω_{mn} określone jest przez (2.7).

W dalszym ciągu rozwiążemy kilka przykładów.

2.2.1. Obciążenie wymuszające równomiernie rozłożone, $p(x, y, t) = p \sin \Omega t$.

¹ Tu i w dalszym ciągu dla uproszczenia zapisu stosujemy oznaczenie $\sum_{m, n}$ zamiast $\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty}$.

Z równania (2.12) mamy

$$(2.18) \quad p_{mn}(t) = \frac{8p \sin \Omega t}{\pi^2} (-1)^{mn} \left\{ \frac{1 - (-1)^n}{n(2m+n)} + \frac{(-1)^n [1 - (-1)]^m}{m(m+2n)} + \frac{(-1)^m - (-1)^n}{m^2 - n^2} \right\} = \frac{8p \sin \Omega t}{\pi^2} F_{mn},$$

przy czym F_{mn} można określić za pomocą następujących wzorów:

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{gdy } m \text{ i } n \text{ są parzyste, } F_{mn} = 0; \\ \text{gdy } m \text{ jest nieparzyste, } n \text{ zaś parzyste, } F_{mn} = \frac{-2n(2m+n)}{m(m^2-n^2)(m+2n)}; \\ \text{gdy } m \text{ jest parzyste, } n \text{ nieparzyste, } F_{mn} = \frac{2m(m+2n)}{n(m^2-n^2)(2m+n)}; \\ \text{gdy } m \text{ i } n \text{ są nieparzyste, } F_{mn} = \frac{-2(m^2-n^2)}{mn(2m+n)(m+2n)}. \end{array} \right.$$

Podstawiając całkę równania (2.17) do (2.10) otrzymujemy rozwiązanie o postaci

$$(2.20) \quad w(x, y, t) = \frac{8pg \sin \Omega t}{\pi^2 \gamma h} \sum_{m,n} \frac{F_{mn}}{D_{mn}} \Phi_{mn}(x, y),$$

gdzie

$$(2.21) \quad D_{mn} = \left(\frac{m^2 + mn + n^2}{3} \omega_{11} \right)^2 - \Omega^2.$$

Z równania (2.20) możemy obliczyć amplitudę ugięcia dowolnego punktu płyty. Np. dla punktu $(b/3, a/3)$ mamy

$$\begin{aligned} \max w\left(\frac{b}{3}, \frac{a}{3}\right) &= \frac{8pg}{\pi^2 \gamma h} \left[\frac{4}{15} \frac{(\sqrt{3}+3)}{\omega_{11}^2 - \Omega^2} + \frac{4}{105} \frac{(3-\sqrt{3})}{\omega_{11}^2 - \Omega^2} + \frac{8}{105} \frac{(3-\sqrt{3})}{\omega_{11}^2 - \Omega^2} + \dots \right] \approx \\ &\approx \frac{pa^4}{8,6 \pi^4 N} \frac{1}{1 - \left(\frac{3\Omega}{7\omega_{11}}\right)^2} \quad (\text{dla } \Omega < \omega_{11}). \end{aligned}$$

2.2.2. Obciążenie siłą $\sin \Omega t$ przyłożoną w punkcie (ξ, η) .

Zadanie to rozwiążemy zastępując najpierw dane obciążenie skupione obciążeniem ciągłym równomiernym zalegającym obszar ograniczony prostymi $x = \xi$, $x = \xi + c$, $y = \eta$, $y = \eta + d$ i wykonując następnie przejście graniczne $c \rightarrow 0$, $d \rightarrow 0$, przy czym $qcd = 1$.

Po przekształceniach mamy

$$(2.22) \quad p_{mn}(t) = \frac{8\sqrt{3} \sin \Omega t}{3a^2} \Phi_{mn}(\xi, \eta).$$

Poszukiwane równanie amplitud ugięć ma zatem postać:

$$(2.23.1) \quad G_1(x, y; \xi, \eta) = C \sum_{m,n} \frac{\Phi_{mn}(x, y) \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{D_{mn}},$$

gdzie $C = 8 \sqrt{3} g / 3 \gamma h a^2$.

Dla punktu zaczepienia siły wymuszającej otrzymujemy stąd

$$(2.23.2) \quad G_1(\xi, \eta; \xi, \eta) = C \sum_{m,n} \frac{[\Phi_{mn}(\xi, \eta)]^2}{D_{mn}}.$$

Z równania (2.23.1) wyznaczmy nachylenia powierzchni odkształconej odpowiednio w kierunku Ox lub Oy :

$$(2.24) \quad \frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} = C \sum_{m,n} \frac{\Phi_{mn}(\xi, \eta)}{D_{mn}} \frac{\partial \Phi_{mn}(x, y)}{\partial x},$$

$$(2.25) \quad \frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial y} = C \sum_{m,n} \frac{\Phi_{mn}(\xi, \eta)}{D_{mn}} \frac{\partial \Phi_{mn}(x, y)}{\partial y}.$$

2.2.3. Obciążenie momentem skupionym $\sin \Omega t$ działającym w punkcie (ξ, η) .

Przy wyprowadzeniu podanych niżej zależności korzystamy z tego, że pochodna funkcji określającej linię wpływową związaną z siłą jednostkową, zaczepioną w punkcie ξ , równa jest funkcji określającej linię wpływową, obliczoną dla tej samej wielkości mechanicznej przy obciążeniu układu momentem jednostkowym, zaczepionym w punkcie ξ .

Niech wektor momentu skupionego $\sin \Omega t$, zaczepionego w punkcie (ξ, η) , posiada kierunek równoległy i zwrot zgodny z Oy . Ugięcie dowolnego punktu (x, y) obliczymy zatem jako pochodną $\partial G_1(x, y; \xi, \eta) / \partial \xi$, gdzie $G_1(x, y; \xi, \eta)$ określona jest równaniem (2.23.1).

Mamy więc

$$(2.26) \quad G_2(x, y; \xi, \eta) = \frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi} = C \sum_{m,n} \frac{\Phi_{mn}(x, y)}{D_{mn}} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi}.$$

Obliczymy nachylenia powierzchni odkształconej w kierunku Oy i Ox . Mamy

$$(2.27) \quad \frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial y} = \frac{\partial^2 G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi \partial y} = C \sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \frac{\partial \Phi_{mn}(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi},$$

$$(2.28) \quad \frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial^2 G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi \partial x} = C \sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \frac{\partial \Phi_{mn}(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi}.$$

Niech wektor momentu posiada kierunek równoległy, zaś zwrot przeciwny do Ox . W tym przypadku powierzchnia odkształcona określona jest przez związek

$$(2.29) \quad G_3(x, y; \xi, \eta) = \frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta} = C \sum_{m,n} \frac{\Phi_{mn}(x, y)}{D_{mn}} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta},$$

zaś jej nachylenie w kierunku Oy lub Ox wynosi

$$(2.30) \quad \frac{\partial G_3(x, y; \xi, \eta)}{\partial y} = \frac{\partial^2 G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta \partial y} = C \sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \frac{\partial \Phi_{mn}(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta},$$

$$(2.31) \quad \frac{\partial G_3(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial^2 G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta \partial x} = C \sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \frac{\partial \Phi_{mn}(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta}.$$

Zgodnie z zasadą BETTI'EGO mamy oczywiście

$$(2.32) \quad \left[\frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial y} \right]_{x=\xi, y=\eta} = \left[\frac{\partial G_3(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} \right]_{x=\xi, y=\eta}.$$

Ze względu na późniejsze zastosowania interesować nas jeszcze będzie efekt działania momentu $\sin \Omega t$ o wektorze równoległym do krawędzi $(x/b) + (y/a) = 1$. Rozkładając wektor momentu na kierunki równoległe do Ox i Oy i stosując zasadę superpozycji otrzymujemy dla amplitudy powierzchni odkształconej związek

$$(2.33) \quad G_4(x, y; \xi, \eta) = \frac{\sqrt{3}}{2} G_2(x, y; \xi, \eta) + \frac{1}{2} G_3(x, y; \xi, \eta) = \\ = C \sum_{m,n} \frac{\Phi_{mn}(x, y)}{D_{mn}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right].$$

Obliczmy nachylenia powierzchni G_4 w kierunkach: l_2 — normalnym do rozpatrywanej krawędzi oraz l_1 — równoległym do niej.

Mamy, [1],

$$(2.34) \quad \frac{\partial G_4(x, y; \xi, \eta)}{\partial l_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial G_4(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial G_4(x, y; \xi, \eta)}{\partial y} = \\ = C \sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(x, y)}{\partial y} \right] \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right].$$

Podobnie

$$(2.35) \quad \frac{\partial G_4(x, y; \xi, \eta)}{\partial l_1} = C \sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(x, y)}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(x, y)}{\partial y} \right] \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right].$$

Niech w szczególności moment skupiony zaczepiony będzie do rozważanej krawędzi w punkcie $(\xi, a - (a/b)\xi)$. Obliczmy nachylenie powierzchni w tym punkcie w kierunku l_2 . Stosownie do (2.34) mamy

$$(2.34.1) \quad \frac{\partial G_4\left(\xi, a - \frac{a}{b}\xi; \xi, a - \frac{a}{b}\xi\right)}{\partial l_2} = \\ = C \sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta = a - \frac{a}{b}\xi}^2.$$

Ponadto mamy

$$(2.35.1) \quad \frac{\partial G_4 \left(\xi, a - \frac{a}{b} \xi; \xi, a - \frac{a}{b} \xi \right)}{\partial l_1} = C \sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right)^2 \right]_{\eta = a - \frac{a}{b} \xi} = 0.$$

Stąd

$$\sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right)^2 \right]_{\eta = a - \frac{a}{b} \xi},$$

a zatem (2.34.1) można przedstawić w postaci

$$(2.34.2) \quad \frac{\partial G_4 \left(\xi, a - \frac{a}{b} \xi; \xi, a - \frac{a}{b} \xi \right)}{\partial l_2} = C \sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right)^2 \right]_{\eta = a - \frac{a}{b} \xi}.$$

3. Płyta swobodnie podparta na obwodzie i posiadająca dodatkowe podpory punktowe

3.1. Drgania swobodne

3.1.1. Przypadek pojedynczej podpory punktowej. Niech rozważana płyta będzie podparta dodatkowo w punkcie (ξ, η) , rys. 3. Dla rozwiązania zadania zastosujemy metodę sił.

Układem podstawowym (por. [9]) będzie w naszym przypadku płyta z rys. 1 z przyłożoną w punkcie (ξ, η) okresowo-zmienną reakcją $R \sin \omega t$, posiadającą częstość ω badanego układu. Równanie metody sił możemy zapisać symbolicznie w postaci

$$(3.1) \quad R \delta_{11} = 0,$$

gdzie δ_{11} jest ugięciem punktu (ξ, η) pod działaniem siły $\sin \omega t$ zaczepionej w tym punkcie (por. 2.23.2). Z (3.1) w związku z (2.23.2) otrzymujemy zatem poszukiwane równanie częstości

$$(3.2) \quad \sum_{m,n} \frac{[\Phi_{mn}(\xi, \eta)]^2}{D_{mn}} = 0,$$

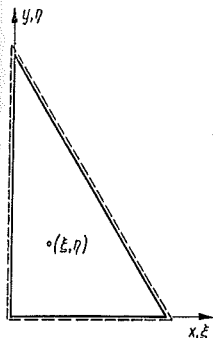
przy czym we wzorze (2.21) należy zamienić Ω przez ω .

Niech punkt podparcia posiada współrzędne $(\xi, a/2)$. W tym przypadku mamy

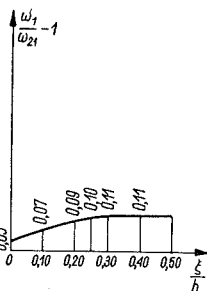
$$(3.3.1) \sum_{m,n} \left[\sin \frac{(2m+n)\pi}{3b} \xi \sin \frac{n\pi}{2} - (-1)^{m+n} \sin \frac{(m+2n)\pi}{3b} \xi \sin \frac{m\pi}{2} + (-1)^m \sin \frac{(m-n)\pi}{3b} \xi \sin \frac{(m+n)\pi}{2} \right]^2 : D_{mn} = 0.$$

W szczególności np. dla punktu $(b/4, a/2)$ mamy stąd²

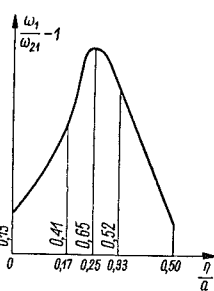
$$(3.3.2) \frac{0,5}{D_{21}} + \frac{2+\sqrt{3}}{D_{31}} + \frac{1,5}{D_{32}} + \frac{2}{D_{41}} + \frac{0}{D_{42}} + \frac{0,5}{D_{51}} + \frac{2-\sqrt{3}}{D_{43}} + \dots = 0.$$



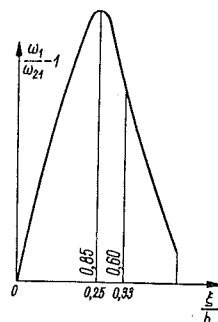
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Wartości trzech kolejnych częstości przy podparciu w jednym z punktów prostej $\eta = a/2$ podane są w tabl. 1 oraz na wykresie (rys. 4). Niech współrzędne punktu podparcia będą $(b/2, \eta)$. Wówczas równanie (3.2) przyjmie postać

$$(3.4) \sum_{m,n} \left[\sin \frac{(2m+n)\pi}{6} \sin \frac{n\pi}{a} \eta - (-1)^{m+n} \sin \frac{(m+2n)\pi}{6} \sin \frac{m\pi}{a} \eta + (-1)^m \sin \frac{(m-n)\pi}{6} \sin \frac{(m+n)\pi}{a} \eta \right]^2 : D_{mn} = 0.$$

Tablica 1. Podparcie w punkcie $(\xi, a/2)$

$\frac{\xi}{b}$	$\frac{\omega_1}{\omega_{11}}$	$\frac{\omega_1}{\omega_{21}}$	$\frac{\omega_2}{\omega_{11}}$	$\frac{\omega_2}{\omega_{31}}$	$\frac{\omega_3}{\omega_{11}}$	$\frac{\omega_3}{\omega_{32}}$
0,10	2,48	1,07	5,20	1,20	6,54	1,03
0,20	2,53	1,09	5,48	1,26	6,62	1,04
0,25	2,56	1,10	5,56	1,28	6,67	1,05
0,30	2,58	1,11	5,58	1,29	6,70	1,05
0,40	2,58	1,11	4,79	1,10	6,58	1,04

² Dla uzyskania należytej dokładności przy obliczaniu częstości podanych w tablicach 1-3 brano pod uwagę około 50 wyrazów szeregu (3.2).

Obliczone stąd częstości dla trzech różnych punktów podparcia podane są w tablicy 2 oraz na wykresie (rys. 5).

Na zakończenie wyznaczmy równanie częstości dla przypadku podparcia w jednym z punktów prostej $x = by/a$. Mamy wówczas

$$(3.5) \quad \sum_{m, n} \left[\sin \frac{(2m+n)\pi}{3a} y \sin \frac{n\pi}{a} y - (-1)^{m+n} \sin \frac{(m+2n)\pi}{3a} y \sin \frac{m\pi}{a} y + \right. \\ \left. + (-1)^m \sin \frac{(m-n)\pi}{3a} y \sin \frac{(m+n)\pi}{a} y \right]^2 : D_{mn} = 0.$$

Wyniki obliczeń podane są w tabl. 3 oraz na rys. 6.

Tablica 2. Podparcie w punkcie $(b/2, \eta)$

η	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
a	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{41}	ω_{51}	ω_{61}
1/6	3,29	1,41	5,48	1,26	7,00	1,10
1/4	3,86	1,65	5,22	1,21	6,33	1,00
1/3	3,55	1,52	4,44	1,03	6,34	1,00

Tablica 3. Podparcie w punkcie $(\xi, \eta = \xi)$

ξ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
b	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{41}	ω_{51}	ω_{61}
1/4	4,32	1,85	4,33	1,00	7,00	1,10
1/3	3,73	1,60	5,92	1,37	6,69	1,05

Nadmienimy, że szeregi (3.3)-(3.5) są wolnozbieżne.

3.1.2. Płyta podparta w kilku punktach.

Niech rozważana płyta będzie podparta w dowolnej skończonej liczbie punktów. Powtarzając poprzednio podane rozumowanie otrzymujemy następujący układ równań jednorodnych:

$$(3.6) \quad \begin{cases} R_1 \delta_{11} + R_2 \delta_{12} + \dots + R_k \delta_{1k} = 0, \\ R_1 \delta_{12} + R_2 \delta_{22} + \dots + R_k \delta_{2k} = 0, \\ \dots \\ R_1 \delta_{1k} + R_2 \delta_{2k} + \dots + R_k \delta_{kk} = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(3.7) \quad \delta_{ij} = \sum_{m, n} \frac{\Phi_{mn}(\xi_i, \eta_i) \Phi_{mn}(\xi_j, \eta_j)}{D_{mn}}.$$

Przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny układu (3.6) otrzymujemy poszukiwane równanie częstości.

3.2. Drgania wymuszone. Dla uproszczenia zapisu rozważać będziemy płytę podpartą dodatkowo w jednym punkcie (ξ, η) . Stosując zasadę superpozycji przedstawimy amplitudę ugięcia dynamicznego w punkcie (x, y) płyty jako sumę dwóch amplitud: ugięcia w_0 obliczonego dla układu podstawowego według zasad podanych w (2.2) oraz ugięcia w_R układu rzeczywistego, obciążonego w punkcie (ξ, η) siłą skupioną $R \sin \Omega t$.

Mamy zatem

$$(3.8) \quad w(x, y) = w_0(x, y) + w_R(x, y) = w_0(x, y) + RG_1(x, y; \xi, \eta),$$

przy czym nie znaną reakcję R wyznaczymy z równania

$$(3.9) \quad w(\xi, \eta) = w_0(\xi, \eta) + RG_1(\xi, \eta; \xi, \eta) = 0.$$

Mamy więc ostatecznie

$$(3.10) \quad w(x, y) = w_0(x, y) - \frac{w_0(\xi, \eta)}{G_1(\xi, \eta; \xi, \eta)} G_1(x, y; \xi, \eta).$$

Niech np. na płytę działa obciążenie wymuszające $p \sin \Omega t$ o amplitudzie p . Mamy wówczas

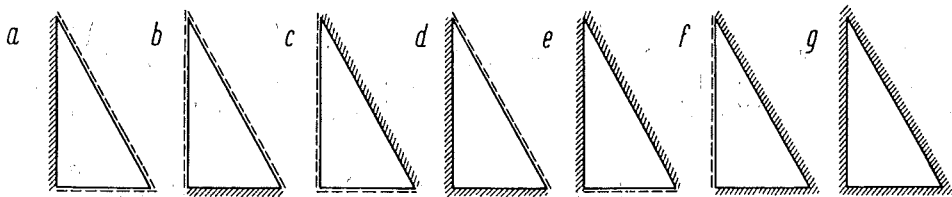
$$(3.11) \quad w(x, y) = \frac{8pg}{\pi^2 \gamma h} \left[\sum_{m,n} \frac{F_{mn}}{D_{mn}} \Phi_{mn}(x, y) - \frac{\sum_{m,n} \frac{F_{mn}}{D_{mn}} \Phi_{mn}(\xi, \eta)}{\sum_{m,n} \frac{[\Phi_{mn}(\xi, \eta)]^2}{D_{mn}}} \sum_{m,n} \frac{\Phi_{mn}(\xi, \eta)}{D_{mn}} \Phi_{mn}(x, y) \right].$$

Znając $w(x, y)$ możemy bez trudu obliczyć naprężenia dynamiczne na podstawie znanych wzorów teorii płyt.

4. Płyta utwierdzona wzdłuż jednej, dwu lub trzech krawędzi

Dla ułożenia równania częstości zastosujemy metodę podaną przez W. NOWACKIEGO, [9].

Przyjmując za układ podstawowy płytę swobodnie podpartą zaczepiamy do utwierdzonej krawędzi rozłożony w sposób ciągły nie znany moment utwierdzenia o amplitudzie M (gdzie M jest funkcją ξ lub η). Z warunku, że nachylenie



Rys. 7

powierzchni odkształconej w dowolnym punkcie rozważanej krawędzi jest równe zero, otrzymujemy równanie całkowe FREDHOLMA pierwszego rodzaju, którego jądrem jest jedna z obliczonych poprzednio powierzchni wpływowych.

Niżej podajemy równania dla różnych przypadków utwierdzenia.

a) Dla płyt z rys. 7a-7c mamy odpowiednio

$$(4.1) \quad \int_0^a M(\eta) \frac{\partial G_2(0, y; 0, \eta)}{\partial x} d\eta = 0,$$

$$(4.2) \quad \int_0^b M(\xi) \frac{\partial G_3(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0,$$

$$(4.3) \quad \int_0^b M\left(\xi, a - \frac{a}{b}\xi\right) \frac{\partial G_4\left(x, a - \frac{a}{b}x; \xi, a - \frac{a}{b}\xi\right)}{\partial l_2} d\xi = 0.$$

b) Dla płyt pokazanych na rys. 7d-7f otrzymujemy odpowiednio układy równań całkowych

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^a M(\eta) \frac{\partial G_2(0, y; 0, \eta)}{\partial x} d\eta + \int_0^b M(\xi) \frac{\partial G_3(0, y; \xi, 0)}{\partial x} d\xi = 0, \\ \int_0^a M(\eta) \frac{\partial G_2(x, 0; 0, \eta)}{\partial y} d\eta + \int_0^b M(\xi) \frac{\partial G_3(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0; \end{array} \right.$$

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^a M(\eta) \frac{\partial G_2(0, y; 0, \eta)}{\partial x} d\eta + \\ \quad + \int_0^b M\left(\xi, a - \frac{a}{b}\xi\right) \frac{\partial G_4\left(0, y; \xi, a - \frac{a}{b}\xi\right)}{\partial x} d\xi = 0, \\ \int_0^a M(\eta) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial G_2\left(x, a - \frac{a}{b}x; 0, \eta\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial G_2\left(x, a - \frac{a}{b}x; 0, \eta\right)}{\partial y} \right] d\eta + \\ \quad + \int_0^b M\left(\xi, a - \frac{a}{b}\xi\right) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial G_4\left(x, a - \frac{a}{b}x; \xi, a - \frac{a}{b}\xi\right)}{\partial x} + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial G_4\left(x, a - \frac{a}{b}x; \xi, a - \frac{a}{b}\xi\right)}{\partial y} \right] d\xi = 0; \end{array} \right.$$

$$(4.6) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^b M(\xi) \frac{\partial G_3(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi + \\ & \qquad \qquad \qquad + \int_0^b M\left(\xi, a - \frac{a}{b}\xi\right) \frac{\partial G_4\left(x, 0; \xi, a - \frac{a}{b}\xi\right)}{\partial y} d\xi = 0, \\ & \int_0^b M(\xi) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial G_3\left(x, a - \frac{a}{b}x; \xi, 0\right)}{\partial x} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial G_3\left(x, a - \frac{a}{b}x; \xi, 0\right)}{\partial y} \right] d\xi + \int_0^b M\left(\xi, a - \frac{a}{b}\xi\right) \times \\ & \qquad \qquad \qquad \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial G_4\left(x, a - \frac{a}{b}x; \xi, a - \frac{a}{b}\xi\right)}{\partial x} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial G_4\left(x, a - \frac{a}{b}x; \xi, a - \frac{a}{b}\xi\right)}{\partial y} \right] d\xi = 0. \end{aligned} \right.$$

c) Dla płyty na obwodzie całkowicie utwierdzonej (rys. 7g) otrzymujemy następujący układ równań całkowych:

$$(4.7) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^a M(\eta) \frac{\partial G_2(0, y; 0, \eta)}{\partial x} d\eta + \int_0^b M(\xi) \frac{\partial G_3(0, y; \xi, 0)}{\partial x} d\xi + \\ & \qquad \qquad \qquad + \int_0^b M\left(\xi, a - \frac{a}{b}\xi\right) \frac{\partial G_4\left(0, y; a - \frac{a}{b}\xi\right)}{\partial x} d\xi = 0, \\ & \int_0^a M(\eta) \frac{\partial G_2(x, 0; 0, \eta)}{\partial y} d\eta + \int_0^b M(\xi) \frac{\partial G_3(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi + \\ & \qquad \qquad \qquad + \int_0^b M\left(\xi, a - \frac{a}{b}\xi\right) \frac{\partial G_4\left(x, 0; \xi, a - \frac{a}{b}\xi\right)}{\partial y} d\xi = 0, \\ & \int_0^a M(\eta) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial G_2\left(x, a - \frac{a}{b}x; 0, \eta\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial G_2\left(x, a - \frac{a}{b}x; 0, \eta\right)}{\partial y} \right] d\eta + \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned}
 & + \int_0^b M(\xi) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial G_3 \left(x, a - \frac{a}{b} x; \xi, 0 \right)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial G_3 \left(x, a - \frac{a}{b} x; \xi, 0 \right)}{\partial y} \right] d\xi + \\
 & + \int_0^b M \left(\xi, a - \frac{a}{b} \xi \right) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial G_4 \left(x, a - \frac{a}{b} x; \xi, a - \frac{a}{b} \xi \right)}{\partial x} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial G_4 \left(x, a - \frac{a}{b} x; \xi, a - \frac{a}{b} \xi \right)}{\partial y} \right] d\xi = 0.
 \end{aligned} \right.$$

Dla uzyskania rozwiązania efektywnego zastępujemy równanie całkowe (lub układ równań) nieskończonym układem równań algebraicznych jednorodnych względem współczynników rozkładu momentu utwierdzenia w szereg pewnego ortogonalnego układu funkcji, [3] i [13]; aby rozwiązanie to miało wartość praktyczną, należy oczywiście wydzielić z otrzymanego wyznacznika podwyznaczniki skończonego rzędu. Przystępując do zera otrzymujemy przybliżone równanie częstości.

4.1. Przykład liczbowy

4.1.1. Płyta utwierdzona wzdłuż dłuższej przyprostokątnej (rys. 7a).

W tym przypadku bierzemy pod uwagę dwa następujące układy funkcji ortogonalne w przedziale $[0, a]$:

$$(4.8) \quad \begin{cases} \varphi_\beta(\eta) = \sin \frac{\pi\beta}{a} \eta & (\beta = 1, 2, \dots), \\ \varphi_\alpha(y) = \sin \frac{\pi\alpha}{a} y & (\alpha = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Po przeprowadzeniu wskazanych w pracach [3] i [13] działań otrzymujemy układ równań

$$(4.9.1) \quad \sum_{\beta=1}^{\infty} M_\beta a_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$M_\beta = \frac{2}{a} \int_0^a M(\eta) \sin \frac{\pi\beta}{a} \eta \, d\eta,$$

zaś

$$(4.9.2) \quad a_{\alpha\beta} = \frac{a^4}{4} \sum_{m,n} \frac{1}{D_{mn}} \left\{ (2m+n) \frac{\sin \pi(n-\beta)}{\pi(n-\beta)} - \right. \\ \left. - (-1)^{m+n} (m+2n) \frac{\sin \pi(m-\beta)}{\pi(m-\beta)} + \right. \\ \left. + (-1)^m (m-n) \frac{\sin \pi(m+n-\beta)}{\pi(m+n-\beta)} \right\} \left\{ (2m+n) \frac{\sin \pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} - \right. \\ \left. - (-1)^{m+n} (m+2n) \frac{\sin \pi(m-\alpha)}{\pi(m-\alpha)} + (-1)^m (m-n) \frac{\sin \pi(m+n-\alpha)}{\pi(m+n-\alpha)} \right\}.$$

Dla obliczenia częstości podstawowej rozwiązano kolejno wyznacznik 2, 3 i 4 rzędu otrzymując ciąg wartości:

$$\omega'_1 = 2,98\omega_{11} = 1,28\omega_{21},$$

$$\omega''_1 = 3,03\omega_{11} = 1,30\omega_{21},$$

$$\omega'''_1 = 3,04\omega_{11} = 1,30\omega_{21}.$$

Nadmienimy, że wyrazy leżące na przekątnej głównej macierzy $\|a_{\alpha\beta}\|$ są szeregami nieskończonymi typu

$$(4.10) \quad \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{(2m+s)^2}{(m^2+ms+s^2)^2-x^2},$$

których sumy nie są znane.

Ponieważ konieczna była ocena wartości liczbowej reszty szeregu (przy ustalonym x), zastosowano więc sposób wynikający z kryterium całkowego CAUCHY'EGO, [1], oraz — dla sprawdzenia — przekształcenie KUMMERA, [7]. Uzyskane wyniki były praktycznie biorąc identyczne.

Literatura cytowana w tekście

[1] Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Москва 1951.

[2] R. GIRTLEK, *Zur Durchbiegung von Dreiecksplatten*, Die Bautechnik, 10/12, 21 (1943), s. 96.

[3] S. KALISKI, W. NOWACKI, *Some Problems of Structural Analysis of Plates with Mixed Boundary Conditions*, Arch. Mech. stos., 4, 8 (1956), s. 413.

[4] Z. KĄCZKOWSKI, *Drgania swobodne i wyboczenie płyty trójkątnej*, Arch. Mech. stos., 1, 8 (1956), s. 13.

[5] Z. KĄCZKOWSKI, *Obliczanie płyt anizotropowych metodą nakładania ugięć fałdowych*, Arch. Mech. stos., 3, 5 (1953), s. 455.

[6] Z. KĄCZKOWSKI, *Ortotropowe płyty prostokątne o brzegach swobodnych*, Arch. Mech. stos., 4, 7 (1955), s. 457.

[7] K. KNOPP, *Szeregi nieskończone* (tłum. z jęz. niemieckiego), PWN Warszawa 1956, s. 274.

- [8] W. NOWACKI, *Drgania własne i wyboczenie płyt prostokątnych podpartych swobodnie na obwodzie i punktowo w obrębie płyty*, Arch. Mech stos., 3, 5 (1953).
- [9] W. NOWACKI, *Zagadnienia dynamiki i statyki płyty o nieciągłych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. stos., 2, 7 (1955), s. 266.
- [10] PAN LI-CHOW, *Equilibrium, Buckling and Vibration of a 30°-60°-90° Triangular Plate Simply Supported at the Edges*, Acta Phys. Sin., 3, 12 (1956), s. 215.
- [11] Z. REIPERT, *Drgania swobodne i wyboczenie płyty trójkątnej wzmocnionej żebrami*, Rozp. inżyn., 2, 6 (1958), s. 231.
- [12] H. SCHAEFER, A. HAVERS, *Die Eigenschwingung der in ihrer Ebene gleichmässig belasteten gleichseitigen Dreiecksplatte*, Ing. Arch. 7 (1936), s. 83.
- [13] W. SCHMEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*, I, rozdz. I, II, 1955 Lipsk.
- [14] B. SEN, *Note on Some Two-Dimensional Problems of Elasticity Connected with Plates Having Triangular Boundaries*, Bull. Calcutta Math. Soc., 26 (1934), s. 65.
- [15] B. R. SETHI, *Transverse Vibrations of Rectilinear Plates*, Proc. Indian. Acad. Sci., Sec. A. 25 (1947), s. 25.

Резюме

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Обсуждаются исследования пластинки, являющейся половиной равно-
стороннего треугольника.

Во втором разделе работы рассматривается пластинка свободно опертая
по всем краям. Исходной точкой для дальнейших решений являются соб-
ственные функции (определенные для равностороннего треугольника
Х. ШЕФЕРом и А. ХАВЕРСОМ) в виде бесконечного ряда.

В третьем разделе автор представляет уравнение частот для пластинки
с добавочными опорами.

Приводятся числовые результаты.

В четвертом разделе исследуется пластинка с заземленными некоторыми
или всеми краями. Уравнения метода «сил» даются здесь в форме инте-
гральных уравнений Фредгольма первого рода. Для одного случая прео-
бразовывается в качестве примера уравнение Фредгольма в систему алге-
браических уравнений, приводя числовые результаты.

Прилагается перечень литературы, касающейся колебаний треуголь-
ных пластинок.

Summary

FREE AND FORCED VIBRATION OF A TRIANGULAR PLATE

The author describes investigations of the vibration of a plate representing
a half of a regular triangle.

In Sec. 2 a plate simply supported on the periphery is considered.
The starting point for further solutions are the eigenfunctions (determined

for a regular triangle by H. SCHAEFER and A. HAVERS) in the form of infinite series. In Sec. 3 the author derives the equations of frequency for a plate having additional point supports. Numerical results are given.

In the Sec. 4 the plate under consideration is a plate with some of or all the edges clamped. The equations of the method of «forces» are represented in the form of FREDHOLM's integral equations of the first kind. In one case the FREDHOLM equation is transformed, for the sake of example, into a system of algebraic equations. A bibliography of the vibration problem of triangular plates is given.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 maja 1959 r.
