WŁODZIMIERZ DERSKI

STAN NAPRĘŻENIA I PRZEMIESZCZENIA W GRUBEJ PŁYCIE KOŁOWEJ WYWOŁANY DZIAŁANIEM NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXXIV

SPIS TREŚCI

Wstęp

Celem pracy jest wyznaczenie stanu naprężenia i przemieszczenia w grubej płycie kołowej o grubości $2h$ i średnicy $2b$, wywołanego działaniem nieustalonego, osiowo-symetrycznego pola temperatury. Ekspozycja ciepła określona jest przez rozkład temperatury, która jest funkcją czasu i miejsca. Rozpatrywane są trzy przypadki ekspozycji ciepła. W pierwszym przypadku pole temperatury jest symetryczne względem płaszczyzny $z=0$. W drugim przypadku pole temperatury określone jest antysymetrycznymi warunkami brzegowymi względem płaszczyzny $z=0$. W trzecim przypadku obszar ekspozycji ciepła znajduje się tylko na powierzchni $z=h$.

Do wyznaczenia składowych stanu naprężenia posłużymy się ogólnie stosowaną funkcją potencjału termo-sprężystego przemieszczenia.

Dążyć będziemy do tego, aby w płaszczyznach $z=\pm h$ spełnić w sposób ścisły wszelkie mechaniczne warunki brzegowe, zadowalając się spełnieniem tych warunków w sposób całkowy na powierzchni $r=b$.

1. Pole temperatury

Przypadek 1a. Pole temperatury określone jest równaniem różniczkowym

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{1.1}$$

warunkiem początkowym

$$T(r,z,0)=0 \tag{1.2}$$

i warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} T(r,\pm h,t)=\begin{cases} f(t)\, f_1(r), & \text{jeśli } 0<t<\tau, \\ f_1(r), & \text{jeśli } t>\tau_1, \end{cases} & \text{dla } 0<r<a; \\ T(r,\pm h,t)=0, & \text{jeśli } a<r<b, \\ T(b,z,t)=0. \end{cases} \tag{1.3}$$

We wzorach tych $2a$ oznacza średnicę koła, które jest obszarem ekspozycji ciepła.

Do rozwiązania równania (1.1) posłużymy się transformacją Laplace'a. Transformatę temperatury określa się całką, [9],

$$T_L = \int_0^\infty T e^{-pt}\, dt.$$

Symbol p oznacza zmienną zespoloną, której część rzeczywistą oznaczymy przez γ. Funkcja T musi być taka, aby zapewniona była zbieżność całki

$$\int_0^\infty |T|\, e^{-\gamma t}\, dt < \infty.$$

Po przetransformowaniu równanie (1.1) przyjmie postać

$$\frac{\partial^2 T_L}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_L}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_L}{\partial z^2} - q^2 T_L = 0; \qquad q = \sqrt{\frac{p}{\varkappa}}. \tag{1.4}$$

Rozwiązanie tego równania musi spełniać przetransformowane warunki brzegowe (1.3). Celem uproszczenia podanych wzorów przyjmiemy funkcję $f(t)$ w następującej postaci

$$f(t) = \frac{t}{\tau}. \tag{1.5}$$

Postać funkcji $f(t)$ ograniczona jest jedynie warunkiem zbieżności całki

$$\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-pt}\, dt < \infty.$$

Transformaty warunku brzegowego (1.3) po uwzględnieniu (1.5) przyjmują postać

$$\begin{cases} T_L(r, \pm h, p) = \dfrac{1 - \exp[-p\tau]}{p^2\tau} f_1(r), & \text{jeśli} \quad 0 < r < a. \\ T_L(r, \pm h, p) = 0, \quad \text{jeśli} \quad a < r < b, \\ T_L(b, z, p) = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Rozwiązanie równania (1.4) można przyjąć w postaci szeregu Fouriera-Bessela

$$T_L(r, z, p) = \sum_{n=1}^\infty A_{nL} \frac{\operatorname{ch}(\lambda z)}{\operatorname{ch}(\lambda h)} J_0(a_n r),$$

gdzie A_{nL} jest współczynnikiem rozkładu na szereg Fouriera-Bessela funkcji T_L $(r, \pm h, p)$, tj.

$$T_L(r, \pm h, p) = \sum_{n=1}^\infty A_{nL} J_0(a_n r).$$

Liczby a_n wyznaczyć trzeba z równania

$$J_0(a_n b) = 0, \tag{1.7}$$

a liczby λ określić z równania

$$q^2 = (ia_n)^2 + \lambda^2 = \frac{p}{\varkappa}. \tag{1.8}$$

Jak wiadomo transformacja odwrotna określona jest całką

$$T(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} T_L(r, z, p)\, e^{pt}\, dp. \tag{1.9}$$

W naszym przypadku funkcja podcałkowa jest jednoznaczną funkcją zmiennej p. Mianownik tej funkcji ma miejsca zerowe w punktach $p = 0$ oraz $p = -\varkappa(a_n^2 + \beta_m^2)$. Punkty te są biegunami pierwszego rodzaju funkcji podcałkowej. Liczby β_m są pierwiastkami równania

$$\cos(\beta_m h) = 0. \tag{1.10}$$

Po prostych przekształceniach rozwiązanie równania (1.1) można napisać w postaci

$$T(r, z, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{\operatorname{ch}(a_n z)}{\operatorname{ch}(a_n h)} J_0(a_n r) + \sum\limits_{n, m=1}^{\infty} A_{nm} \{\exp[-\varkappa(a_n^2 + \beta_m^2) t] - \\ \qquad - 1\} \cos(\beta_m z) J_0(a_n r), \quad \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{\operatorname{ch}(a_n z)}{\operatorname{ch}(a_n h)} J_0(a_n r) + \sum\limits_{n, m=1}^{\infty} A_{nm}\, q_{nm}^{(1)} \{\exp[-\varkappa(a_n^2 + \\ \qquad + \beta_m^2) t]\} \cos(\beta_m z) J_0(a_n r), \quad \text{jeśli} \quad t > \tau. \end{cases}$$

gdzie

$$A_n = \frac{2 \int\limits_0^a r f_1(r) J_0(a_n r)\, dr}{b^2 J_1^2(a_n b)},$$

$$A_{nm} = A_n \frac{2\beta_m}{\varkappa(a_n^2 + \beta_m^2)^2 h\tau} (-1)^{m+1},$$

$$q_{nm}^{(1)} = 1 - \exp[\varkappa(a_n^2 + \beta_m^2)\tau].$$

Gdy $f_1(r) = T_0$, otrzymamy także wzór dwuczęściowy. Zmienią się jedynie współczynniki, które tutaj przyjmą wartości następujące:

$$A_n^{(1)} = \frac{2 T_0 a J_1(a_n a)}{a_n b^2 J_1^2(a_n b)}, \tag{1.11}$$

$$A_{nm}^{(1)} = A_n^{(1)} \frac{2\beta_m}{\varkappa(a_n^2 + \beta_m^2)^2 h\tau} (-1)^{m+1}. \tag{1.12}$$

Jeżeli w dalszym ciągu przyjmiemy, że $\tau \to 0$, to otrzymamy przypadek nagłego ogrzania na obszarze ekspozycji ciepła do temperatury T_0. Przy tym przejściu granicznym pierwsza część wzoru odpada, a druga część przyjmuje wartość

$$T(r,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{\operatorname{ch}(a_n z)}{\operatorname{ch}(a_n h)} J_0(a_n r) -$$

$$- \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}^{(2)} \exp\left[-\varkappa(a_n^2+\beta_m^2)t\right] \cos(\beta_m z) J_0(a_n r).$$

Uległ tutaj zmianie tylko współczynnik A_{nm} i wyraża się wzorem

$$A_{nm}^{(2)} = \frac{2\beta_m}{h(a_n^2+\beta_m^2)}(-1)^{m+1}. \tag{1.13}$$

Przypadek 2a. Pole temperatury określone jest równaniem (1.1), warunkiem początkowym (1.2) i warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} T(r,\pm h,t) = \pm\begin{cases} f(t)f_1(r), & \text{jeśli} \quad 0<r<\tau, \\ f_1(r), & \text{jeśli} \quad t>\tau \end{cases} & \text{dla} \quad 0<r<a; \\ T(r,\pm h,t) = 0, & \text{jeśli} \quad a<r<b, \\ T(b,z,t) = 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Podobnie jak w przypadku 1a do rozwiązania równania (1.1) zastosujemy transformację L a p l a c e' a. Transformata spełniająca warunki brzegowe (1.14) ma postać:

$$\begin{cases} T(r,\pm h,p) = \pm\dfrac{1-\exp[-p\tau]}{p^2\tau}, & \text{jeśli} \quad 0<r<a, \\ T(r,\pm h,p) = 0, & \text{jeśli} \quad a<r<b, \\ T(r,z,p) = 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

W tym przypadku rozwiązanie równania (1.4) przyjmiemy w postaci następującego szeregu F o u r i e r a - B e s s e l a:

$$T_L(r,z,p) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{nL} \frac{\operatorname{sh}(\lambda z)}{\operatorname{sh}(\lambda h)} J_0(a_n r),$$

gdzie liczby a_n są pierwiastkami równania (1.7), a liczby λ pierwiastkami równania (1.8), zaś B_{nL} są współczynnikami rozkładu na szereg

$$T_L(r,\pm h,p) = \pm\sum_{n=1}^{\infty} B_{nL} J_0(a_n r).$$

Transformacja odwrotna określona jest wzorem (1.9). Mianownik funkcji podcałkowej posiada miejsca zerowe w punktach $p=0$ oraz $p=-\varkappa(\alpha_n^2+\gamma_m^2)$. Liczby γ_m są pierwiastkami równania

$$\sin(\gamma_m h)=0. \tag{1.16}$$

Poszukiwane rozwiązanie można zapisać w postaci

$$T(r,z,t)=\begin{cases} \dfrac{t}{\tau}\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \dfrac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)} J_0(\alpha_n r)+\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} B_{nm}\{\exp[-\varkappa(\alpha_n^2+ \\ \quad +\gamma_m^2)t]-1\}\sin(\gamma_m z)J_0(\alpha_n r), \quad \text{jeśli} \quad 0<t<\tau, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \dfrac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)} J_0(\alpha_n r)+\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} B_{nm}q_{nm}^{(2)}\{\exp[-\varkappa(\alpha_n^2+ \\ \quad +\gamma_m^2)t]\}\sin(\gamma_m z)J_0(\alpha_n r), \quad \text{jeśli} \quad t>\tau, \end{cases} \tag{1.17}$$

gdzie

$$\begin{cases} B_n=A_n=\dfrac{2\int\limits_0^a r f_1(r) J_0(\alpha_n r)\,dr}{b^2 J_1^2(\alpha_n b)}, \\ B_{nm}=B_n\dfrac{2\gamma_m}{\varkappa(\alpha_n^2+\gamma_m^2)^2 h\tau}(-1)^{m+1}, \\ q_{nm}^{(2)}=1-\exp[\varkappa(\alpha_k^2+\gamma_m^2)\tau]. \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio można podać rozwiązania w przypadkach szczególnych. Gdy $f_1(r)=T_0$ we wzorze (1.17) ulegną zmianie tylko współczynniki i przyjmą postać

$$\begin{cases} B_n^{(1)}=A_n^{(1)}=\dfrac{2T_0 a J_1(\alpha_n a)}{\alpha_n b J_1^2(\alpha_n b)}, \\ B_{nm}^{(1)}=B_n^{(1)}\dfrac{2\gamma_m}{\varkappa(\alpha_n^2+\gamma_m^2)^2 h\tau}(-1)^{m+1}. \end{cases} \tag{1.18}$$

Jeśli $\tau\to 0$, to otrzymuje się przypadek nagłego ogrzania do temperatury T_0 na obszarze ekspozycji ciepła na powierzchni $z=h$ i nagłego oziębienia do temperatury $-T_0$ na powierzchni $z=-h$. Wzór ma postać

$$T(r,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(1)}\frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}J_0(\alpha_n r)+ \\ +\sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm}^{(2)}\exp[-\varkappa(\alpha_n^2+\gamma_m^2)t]\sin(\gamma_m z)J_0(\alpha_n r), \tag{1.19}$$

gdzie

$$B_{nm}^{(2)}=B_n^{(1)}\frac{2\gamma_m}{h(\alpha_n^2+\gamma_m^2)}(-1)^{m+1}, \tag{1.20}$$

a współczynnik $B_n^{(1)}$ nie uległ zmianie.

Przypadek 3a. Ten przypadek określony jest równaniem (1.1), warunkiem początkowym (1.2) i warunkami brzegowymi

$$
(1.21)\quad \begin{cases} T(r,h,t)=\begin{cases} f(t)f_1(r), & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \quad \text{dla}\quad 0<r<a,\\ f_1(r), & \text{jeśli}\quad t>\tau,\end{cases}\\ T(r,-h,t)=0, \qquad \text{jeśli}\quad 0<r<a,\\ T(r,\pm h,t)=0, \qquad \text{jeśli}\quad a<r<b,\\ T(b,z,t)=0. \end{cases}
$$

Rozpatrywany przypadek jest superpozycją obu poprzednich przypadków. Rozwiązanie można łatwo napisać:

$$
(1.22)\quad T(r,z,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\Bigg\{\frac{t}{\tau}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[\frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}+\frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}\right]J_0(\alpha_n r)+\\ \quad+\sum_{n,m=1}^{\infty}\{A_{nm}\left[\exp\left(-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right)-1\right]\cos(\beta_m z)+\\ \quad+B_{nm}\left[\exp\left(-\varkappa(\alpha_n^2+\gamma_m^2)t\right)-1\right]\sin(\gamma_m z)\}J_0(\alpha_n r)\Bigg\}, \\ \qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\ \frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[\frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}+\frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}\right]J_0(\alpha_n r)+\\ \quad+\sum_{n,m=1}^{\infty}\{A_{nm}q_{nm}^{(1)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z)+\\ \quad+B_{nm}q_{nm}^{(2)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\gamma_m^2)t\right]\sin(\gamma_m z)\}J_0(\alpha_n r)\Bigg\}, \\ \qquad\qquad \text{jeśli}\quad t<\tau. \end{cases}
$$

Dla $f_1(r)=T_0$ otrzyma się wzór złożony z dwu części, w którym współczynniki będą określone wzorami (1.11) i (1.12) oraz (1.18) i (1.19). Jeśli w dalszym ciągu przyjąć $\tau\to 0$, otrzyma się przypadek nagłego ogrzania na obszarze ekspozycji ciepła na powierzchni $z=h$:

$$
T(r,z,t)=\frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(1)}\left[\frac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}+\frac{\operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}\right]J_0(\alpha_n r)+
$$
$$
+\sum_{n,m=1}^{\infty}\{A_{nm}^{(2)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z)+
$$
$$
+B_{nm}^{(2)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\gamma_m^2)t\right]\sin(\gamma_m z)\}J_0(\alpha_n r)\Bigg\},
$$

gdzie $A_{n,m}^{(2)}$ oraz $B_{n,m}^{(2)}$ określone są wzorami (1.13) i (1.20).

Z każdego z powyższych przypadków można wyprowadzić przypadek graniczny $b\to\infty$. Trzeba wtedy ostatni z warunków brzegowych (1.3), (1.15) i (1.21) zastąpić warunkiem $T(b,z,t)\to 0$, gdy $b\to\infty$.

Taka postać warunku brzegowego pozwala na zastosowanie do równania (1.4) transformacji całkowej H a n k e l a, [9],

$$T_{LH} = \int_0^\infty T_L r J_0(\alpha_n r)\, dr .$$

Przypadek 1b. Po zastosowaniu transformacji H a n k e l a do równania (1.4) otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{d^2 T_{LH}}{dz^2} = (q^2 + \alpha^2)\, T_{LH}, \tag{1.23}$$

którego rozwiązanie musi spełniać przetransformowany warunek brzegowy (1.6)

$$T_{LH}(\alpha, \pm h, p) = \frac{1 - \exp[-p\tau]}{p^2 \tau} A(\alpha),$$

gdzie

$$A(\alpha) = \int_0^a f_1(r)\, r J_0(\alpha r)\, dr . \tag{1.24}$$

Jak wynika z warunku (1.23), rozwiązanie równania (1.22) musi być parzyste względem zmiennej z. Przyjmiemy więc

$$T_{LH}(\alpha, z, p) = \frac{1 - \exp[-p\tau]}{p^2 \tau} \, \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{q^2 + \alpha^2}\, z)}{\operatorname{ch}(\sqrt{q^2 + \alpha^2}\, h)} A(\alpha).$$

Transformacja odwrotna określona jest całką podwójną

$$T(r, z, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt}\, dp \int_0^\infty T_{LH}\, \alpha J_0(\alpha r)\, d\alpha .$$

Wynik całkowania da się przedstawić w następującej postaci:

$$T(r, z, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau} \displaystyle\int_0^\infty A(\alpha) \frac{\operatorname{ch}(\alpha z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)} \alpha J_0(\alpha r)\, d\alpha + \frac{2}{h} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{m+1} \beta_m \times \\ \times \cos(\beta_m z) \displaystyle\int_0^\infty A(\alpha) \frac{\exp[-\varkappa(\alpha_n^2 + \beta_m^2)\, t] - 1}{\varkappa(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 \tau} \alpha J_0(\alpha r)\, d\alpha , \\ \qquad\qquad \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau , \\ \displaystyle\int_0^\infty A(\alpha) \frac{\operatorname{ch}(\alpha z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)} \alpha J_0(\alpha r)\, d\alpha + \frac{2}{h} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{m+1} \beta_m \times \\ \times \cos(\beta_m z) \displaystyle\int_0^\infty A(\alpha)\, q_m^{(1)}(\alpha) \frac{\exp[-\varkappa(\alpha^2 + \beta_m^2)\, t]}{\varkappa(\alpha^2 + \beta_m^2)^2 \tau} \alpha J_0(\alpha r)\, d\alpha , \\ \qquad\qquad \text{jeśli} \quad t > \tau . \end{cases} \tag{1.25}$$

W tym wzorze β_m są pierwiastkami równania (1.10),

$$q_m^{(1)}(\alpha) = 1 - \exp\left[\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)\tau\right].$$

Gdy $f_1(r) = T_0$ otrzymamy wzór analogiczny do (1.25) z tym zastrzeżeniem, że współczynniki $A(\alpha)$ przyjmują obecnie postać

$$A^{(1)}(\alpha) = T_0\frac{a}{\alpha}J_1(\alpha a),$$

a więc

$$T(r,z,t) = \begin{cases} T_0 a\left\{\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\alpha z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)}J_1(\alpha a)J_0(\alpha r)\,d\alpha + \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\times\right. \\ \left.\times\cos(\beta_m z)\displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]-1}{\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)^2\tau}J_1(\alpha a)J_0(\alpha r)\,d\alpha\right\}, \\ \qquad\qquad \text{jeśli} \quad 0<t<\tau, \\ T_0 a\left\{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\alpha z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)}J_1(\alpha a)J_0(\alpha r)\,d\alpha + \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\times\right. \\ \left.\times\cos(\beta_m z)\displaystyle\int_0^\infty q_m^{(1)}(\alpha)\frac{\exp\left[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t\right]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^2\tau}J_1(\alpha a)J_0(\alpha r)\,d\alpha\right\}, \\ \qquad\qquad \text{jeśli} \quad t>\tau. \end{cases} \tag{1.26}$$

Gdy $\tau \to 0$ ze wzoru (1.26) otrzymujemy

$$T(r,z,t) = T_0 a\left\{\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\alpha z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)}J_1(\alpha a)J_0(\alpha r)\,d\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^\infty \frac{\exp\left[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t\right]}{\alpha^2+\beta_m^2}J_1(\alpha a)J_0(\alpha r)\,d\alpha\right\}.$$

Przypadek 2b. W tym przypadku rozwiązanie równania (1.22) musi spełniać przetransformowane warunki brzegowe (1.15)

$$T_{LH}(\alpha, \pm h, p) = \pm A(\alpha)\frac{1-\exp[-p\tau]}{p^2\tau}, \tag{1.27}$$

gdzie $A(\alpha)$ jest określone całką (1.24). Z uwagi na warunek (1.27) przyjmiemy rozwiązanie

$$T_{LH}(\alpha, z, p) = \frac{1-\exp[-p\tau]}{p^2\tau}\,\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{q^2+\alpha^2}\,z)}{\operatorname{sh}(\sqrt{q^2+\alpha^2}\,h)}A(\alpha).$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymamy

$$T(r, z, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty A(a)\frac{\operatorname{sh}(az)}{\operatorname{sh}(ah)}\, aJ_0(ar)\, da + \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\gamma_m \times \\ \quad \times \sin(\gamma_m z)\displaystyle\int_0^\infty A(a)\frac{\exp[-\varkappa(a^2+\gamma_m^2)t]-1}{\varkappa(a^2+\gamma_m^2)^2\tau}\, aJ_0(ar)\, da, \\ \hfill \text{jeśli} \quad 0<t<\tau, \\ \displaystyle\int_0^\infty A(a)\frac{\operatorname{sh}(az)}{\operatorname{sh}(ah)}\, aJ_0(ar)\, da + \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\gamma_m \times \\ \quad \times \sin(\gamma_m z)\displaystyle\int_0^\infty A(a)\, q_m^{(2)}(a)\frac{\exp[-\varkappa(a^2+\gamma_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\gamma_m^2)^2\tau}\, aJ_0(ar)\, da, \\ \hfill \text{jeśli} \quad t>\tau, \end{cases}$$

gdzie

$$q_m^{(2)}(a) = 1 - \exp[\varkappa(a^2+\gamma_m^2)\tau],$$

a γ_m określone jest równaniem (1.16).

Podobnie jak poprzednio możemy napisać rozwiązanie dla przypadku $f_1(r) = T_0$:

(1 28) $$T(r, z, t) = \begin{cases} T_0 a\left\{\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(az)}{\operatorname{sh}(ah)} J_1(aa)\, J_0(ar)\, da + \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\gamma_m \times \right. \\ \quad \left. \times \sin(\gamma_m z)\displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp[-\varkappa(a^2+\gamma_m^2)t]-1}{\varkappa(a^2+\gamma_m^2)^2\tau} J_1(aa)\, J_0(ar)\, da\right\}, \\ \hfill \text{jeśli} \quad 0<t<\tau, \\ T_0 a\left\{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(az)}{\operatorname{sh}(ah)} J_1(aa)\, J_0(ar)\, da + \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\gamma_m \times \right. \\ \quad \left. \times \sin(\gamma_m z)\displaystyle\int_0^\infty q_m^{(2)}(a)\frac{\exp[-\varkappa(a^2+\gamma_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\gamma_m^2)^2\tau} J_1(aa)\, J_0(ar)\, da\right\}, \\ \hfill \text{jeśli} \quad t>\tau. \end{cases}$$

Dla $\tau \to 0$ ze wzoru (1.28) wynika

$$T(r, z, t) = T_0 a\left\{\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(az)}{\operatorname{sh}(ah)} J_1(aa)\, J_0(ar)\, da - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\gamma_m \sin(\gamma_m z)\int_0^\infty \frac{\exp[-\varkappa(a^2+\gamma_m^2)t]}{a^2+\gamma^2} J_1(aa)\, J_0(ar)\, da\right\}.$$

Przypadek 3b. Ten przypadek jest superpozycją dwu poprzednich (por. przypadek 3a). Rozwiązanie można napisać łatwo

$$
(1.29)\quad T(r,z,t)=\begin{cases}
\dfrac{1}{2}\Bigg\{\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty A(\alpha)\left[\frac{\mathrm{ch}(\alpha z)}{\mathrm{ch}(\alpha h)}+\frac{\mathrm{sh}(\alpha z)}{\mathrm{sh}(\alpha h)}\right]\alpha J_0(\alpha r)\,d\alpha + \\
\quad +\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\int_0^\infty A(\alpha)\Big\{\beta_m\cos(\beta_m z)\frac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]-1}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^2\tau}+ \\
\quad +\gamma_m\sin(\gamma_m z)\dfrac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\gamma_m^2)t]-1}{\varkappa(\alpha^2+\gamma_m^2)^2\tau}\Big\}\alpha J_0(\alpha r)\,d\alpha\Bigg\}, \\
\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\
\dfrac{1}{2}\Bigg\{\displaystyle\int_0^\infty A(\alpha)\left[\frac{\mathrm{ch}(\alpha z)}{\mathrm{ch}(\alpha h)}+\frac{\mathrm{sh}(\alpha z)}{\mathrm{sh}(\alpha h)}\right]\alpha J_0(\alpha r)\,d\alpha+\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\times \\
\quad\times\displaystyle\int_0^\infty A(\alpha)\Big\{q_m^{(1)}(\alpha)\beta_m\cos(\beta_m z)\frac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^2\tau}+ \\
\quad +q_m^{(2)}(\alpha)\gamma_m\sin(\gamma_m z)\dfrac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\gamma_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\gamma_m^2)^2\tau}\Big\}\alpha J_0(\alpha r)\,d\alpha\Bigg\}, \\
\qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau.
\end{cases}
$$

Dla $f_1(r)=T_0$ otrzymuje się

$$
(1.30)\quad T(r,z,t)=\begin{cases}
\dfrac{T_0 a}{2}\Bigg\{\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty \left[\frac{\mathrm{ch}(\alpha z)}{\mathrm{ch}(\alpha h)}+\frac{\mathrm{sh}(\alpha z)}{\mathrm{sh}(\alpha h)}\right]J_1(\alpha a)J_0(\alpha r)\,d\alpha + \\
\quad +\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\int_0^\infty \Big\{\beta_m\cos(\beta_m z)\frac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]-1}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^2\tau}+ \\
\quad +\gamma_m\sin(\gamma_m z)\dfrac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\gamma_m^2)t]-1}{\varkappa(\alpha^2+\gamma_m^2)^2\tau}\Big\}J_1(\alpha a)J_0(\alpha r)\,d\alpha\Bigg\}, \\
\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\
\dfrac{T_0 a}{2}\Bigg\{\displaystyle\int_0^\infty \left[\frac{\mathrm{ch}(\alpha z)}{\mathrm{ch}(\alpha h)}+\frac{\mathrm{sh}(\alpha z)}{\mathrm{sh}(\alpha h)}\right]J_1(\alpha a)J_0(\alpha r)\,d\alpha + \\
\quad +\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\int_0^\infty\Big\{q_m^{(1)}(\alpha)\beta_m\cos(\beta_m z)\frac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^2\tau}+ \\
\quad +q_m^{(2)}(\alpha)\gamma_m\sin(\gamma_m z)\dfrac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\gamma_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\gamma_m^2)^2\tau}\Big\}J_1(\alpha a)J_0(\alpha r)\,d\alpha\Bigg\}, \\
\qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau.
\end{cases}
$$

Gdy $\tau \to 0$ wzór (1.29) upraszcza się do postaci

$$T(r,z,t)=\frac{T_0 a}{2}\left\{\int\limits_0^\infty \left[\frac{\operatorname{ch}(az)}{\operatorname{ch}(ah)}+\frac{\operatorname{sh}(az)}{\operatorname{sh}(ah)}\right] J_1(aa)\, J_0(ar)\, da-\right.$$

$$-\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\int\limits_0^\infty \left\{\beta_m \cos(\beta_m z)\frac{\exp\left[-\varkappa(a^2+\beta_m^2)\,t\right]}{a^2+\beta_m^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\gamma_m \sin(\gamma_m z)\frac{\exp\left[-\varkappa(a^2+\gamma_m^2)t\right]}{a^2+\gamma_m^2}\right\} J_1(aa)\, J_0(ar)\, da\right\}.$$

Wszystkie rozpatrzone przypadki zawierają rozwiązanie odpowiadające ustalonemu polu temperatury, określonemu przez taki sam obszar ekspozycji ciepła ze źródłem danym w postaci funkcji temperatury $f_1(r)$ lub temperatury T_0. W przypadku pola ustalonego obojętny jest początkowy sposób ogrzania. Aby otrzymać pole ustalone należy rozpatrzyć te części wzorów, które odpowiadają przedziałowi czasu $t > \tau$ i wykonać przejście $t \to \infty$. Pozostaną tylko pierwsze wyrazy wzorów. W ten sposób znajdziemy:

w przypadku 1a

$$T(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{ch}(a_n z)}{\operatorname{ch}(a_n h)} J_0(a_n r);$$

w przypadku 2a

$$T(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{sh}(a_n z)}{\operatorname{sh}(a_n h)} J_0(a_n r);$$

w przypadku 3a

$$T(r,z)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\frac{\operatorname{ch}(a_n z)}{\operatorname{ch}(a_n h)}+\frac{\operatorname{sh}(a_n z)}{\operatorname{sh}(a_n h)}\right] J_0(a_n r);$$

w przypadku 1b

$$T(r,z)=\int\limits_0^\infty A(a)\frac{\operatorname{ch}(az)}{\operatorname{ch}(ah)} J_0(ar)\, a da;$$

w przypadku 2b

$$T(r,z)=\int\limits_0^\infty A(a)\frac{\operatorname{sh}(az)}{\operatorname{sh}(ah)} J_0(ar)\, a da;$$

w przypadku 3b

$$T(r,z)=\int\limits_0^\infty \frac{A(a)}{2}\left[\frac{\operatorname{ch}(az)}{\operatorname{ch}(ah)}+\frac{\operatorname{sh}(az)}{\operatorname{sh}(ah)}\right] J_0(ar)\, a da.$$

Powyższe wyniki odpowiadające ustalonym polom temperatury pokrywają się z wynikami uzyskanymi w pracach [5] i [6].

2. Potencjał termo-sprężystego przemieszczenia

Naprężenia i przemieszczenia będziemy wyznaczać za pomocą ogólnie stosowanej funkcji potencjału termo-sprężystego przemieszczenia. Funkcję tę określa się wzorami

$$\bar{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \text{oraz} \quad \bar{w} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{2.1}$$

gdzie Φ oznacza funkcję potencjału, a $\bar{u}$ i $\bar{w}$ przemieszczenia radialne i w kierunku osi z.

Po uwzględnieniu tych wzorów trzy równania przemieszczeniowe teorii sprężystości, [7], sprowadzają się do jednego równania

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \vartheta T, \tag{2.2}$$

w którym $\vartheta = [(1+\nu)/(1-\nu)]\alpha_T$; ν oznacza liczbę Poissona, α_T liniowy współczynnik rozszerzalności cieplnej.

Poszukiwać będziemy takich rozwiązań szczególnych równania (2.2), aby było $\Phi = 0$ w płaszczyznach $z = \pm h$ oraz na powierzchni $r = b$.

W celu uproszczenia zapisów będziemy wyznaczać potencjał w dwóch częściach. Pierwsza część oznaczona indeksem 1 odpowiadać będzie tej części wzoru na temperaturę, która jest funkcją miejsca lub zależy od czasu liniowo:

$$\nabla^2 \Phi_1 = \begin{cases} \vartheta \dfrac{t}{\tau} T_1(r,z), & \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ \vartheta T_1(r,z), & \text{jeśli} \quad t > \tau. \end{cases} \tag{2.3}$$

Druga część odpowiada tej części wzoru na temperaturę, która zależy od miejsca i czasu:

$$\nabla^2 \Phi_2 = \begin{cases} \vartheta T_2(r,z,t), & \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ \vartheta T_3(r,z,t), & \text{jeśli} \quad t > \tau. \end{cases} \tag{2.4}$$

Całkę szczególną drugiej części potencjału można łatwo znaleźć. Wiadomo, że, [1] i [8],

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \Phi_2) = \vartheta \frac{\partial T_i}{\partial t} = \vartheta \varkappa \nabla^2 T_i \qquad (i = 2, 3),$$

a stąd

$$\Phi_2 = \vartheta \varkappa \int T_i \, dt. \tag{2.5}$$

Przypadek 1a. Pierwszą część funkcji potencjału przyjmiemy w postaci, [6]:

$$(2.6)\qquad \Phi_1(r,z,t)=\begin{cases}\vartheta\left[\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\frac{Z_n(z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}J_0(\alpha_n r)-\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{nm}\,Z_m(z)\,J_0(\alpha_n r)\right], & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, & \\ \vartheta\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\frac{Z_n(z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}J_0(\alpha_n r), \qquad \text{jeśli}\quad t>\tau. & \end{cases}$$

Po podstawieniu do równania (2.3) znajdujemy, korzystając z warunku znikania funkcji potencjału na powierzchniach $z=\pm h$, że potencjał wyraża się wzorem

$$(2.7)\qquad \Phi_1(r,z,t)=\begin{cases}\vartheta\left[\dfrac{t}{2\tau}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\frac{\overline{Z}_n(z)}{\alpha_n^2\operatorname{ch}(\alpha_n h)}J_0(\alpha_n r)+\right. & \\ \qquad\left.+\displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty}\overline{A}_{nm}\cos(\beta_m z)J_0(\alpha_n r)\right], \qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, & \\ \dfrac{\vartheta}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\frac{\overline{Z}_n(z)}{\alpha_n^2\operatorname{ch}(\alpha_n h)}J_0(\alpha_n r), \qquad \text{jeśli}\quad t>\tau, & \end{cases}$$

gdzie

$$(2.8)\qquad \overline{Z}_n(z)=\alpha_n z\operatorname{sh}(\alpha_n z)-\alpha_n h\operatorname{tgh}(\alpha_n h)\operatorname{ch}(\alpha_n z),$$

$$(2.9)\qquad \overline{A}_{nm}=\frac{A_{nm}}{\alpha_n^2+\beta_m^2}.$$

Drugą część funkcji potencjału, która spełnia równanie (2.4), znajdujemy łatwo korzystając ze wzoru (2.5):

$$(2.10)\qquad \Phi_2(r,z,t)=\begin{cases}-\vartheta\displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty}\overline{A}_{nm}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z)\,J_0(\alpha_n r), & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, & \\ -\vartheta\displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty}\overline{A}_{nm}\,q_{nm}^{(1)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z)J_0(\alpha_n r), & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau. & \end{cases}$$

Przypadek 2a. Postępując tak samo jak w przypadku 1a znajdujemy

$$(2.11)\qquad \Phi_1(r,z,t)=\begin{cases}\vartheta\left[\dfrac{t}{2\tau}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}B_n\,\frac{\overline{S}_n(z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}J_0(\alpha_n r)+\sum_{n,m=1}^{\infty}\overline{B}_{nm}\sin(\gamma_m z)J_0(\alpha_n r)\right], & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, & \\ \dfrac{\vartheta}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}B_n\,\frac{\overline{S}_n(z)}{\alpha_n^2\operatorname{sh}(\alpha_n h)}J_0(\alpha_n r), \qquad \text{jeśli}\quad t>\tau, & \end{cases}$$

gdzie

$$\bar{S}_n(z) = \alpha_n z \operatorname{ch}(\alpha_n z) - \alpha_n h \operatorname{ctgh}(\alpha_n h) \operatorname{sh}(\alpha_n z),$$

$$\bar{B}_{nm} = \frac{B_{nm}}{\alpha_n^2 + \gamma_m^2}.$$

Podobnie

$$(2.12)\quad \Phi_2(r,z,t) = \begin{cases} -\vartheta \sum\limits_{n,\,m=1}^{\infty} \bar{B}_{nm} \exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\gamma_m^2)t\right] \sin(\gamma_m z)\, J_0(\alpha_n r), & \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ -\vartheta \sum\limits_{n,\,m=1}^{\infty} \bar{B}_{nm}\, q_{nm}^{(2)} \exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\gamma_m^2)t\right] \sin(\gamma_m z)\, J_0(\alpha_n r), & \text{jeśli} \quad t > \tau. \end{cases}$$

Przypadek 3a. Jak wiadomo z rozdziału pierwszego, ten przypadek jest superpozycją dwu poprzednich i tak:

$$(2.13)\quad \Phi_1(r,z,t) = \begin{cases} \frac{\vartheta}{2}\left\{\frac{t}{2\tau}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\alpha_n^2}\left[\frac{\bar{Z}_n(z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)} + \frac{\bar{S}_n(z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}\right] J_0(\alpha_n r) + \right. \\ \qquad \left. + \sum\limits_{n,\,m=1}^{\infty}\left[\bar{A}_{nm}\cos(\beta_m z) + \bar{B}_{nm}\sin(\gamma_m z)\right] J_0(\alpha_n r)\right\}, & \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ \frac{\vartheta}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\alpha_n^2}\left[\frac{\bar{Z}_n(z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)} + \frac{\bar{S}_n(z)}{\operatorname{sh}(\alpha_n h)}\right] J_0(\alpha_n r), & \text{jeśli} \quad t > \tau, \end{cases}$$

gdzie $\bar{Z}_n(z)$, $\bar{S}_n(z)$, $\bar{A}_{nm}$ i $\bar{B}_{nm}$ określone są wzorami (2.8), (2.9), (2.11) i (2.12) oraz

$$(2.14)\quad \Phi_2(r,z,t) = \begin{cases} -\frac{\vartheta}{2}\sum\limits_{n,\,m=1}^{\infty}\left\{\bar{A}_{nm}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z) + \right. \\ \qquad \left. + \bar{B}_{nm}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\gamma_m^2)t\right]\sin(\gamma_m z)\right\} J_0(\alpha_n r), & \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ -\frac{\vartheta}{2}\sum\limits_{n,\,m=1}^{\infty}\left\{\bar{A}_{nm}\, q_{nm}^{(1)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z) + \right. \\ \qquad \left. + \bar{B}_{nm}\, q_{nm}^{(2)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\gamma_m^2)t\right]\sin(\gamma_m z)\right\} J_0(\alpha_n r), & \text{jeśli} \quad t > \tau. \end{cases}$$

Przypadek 1b. Podobnie jak w przypadku 1a pierwsza część funkcji potencjału może być przyjęta jak następuje:

$$\Phi_1(r,z,t)=\begin{cases}\vartheta\left[\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty A(a)\frac{Z(a,z)}{\operatorname{ch}(ah)}J_0(ar)\,da-\right.\\ \qquad\left.-\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\int_0^\infty Z_m(a,z)A(a)\frac{aJ_0(ar)}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^2\tau}\,da\right], & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\ \vartheta\displaystyle\int_0^\infty A(a)\frac{Z(a,z)}{\operatorname{ch}(ah)}J_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad t>\tau.\end{cases}$$

Po podstawieniu do równania (2.3) znajdujemy, korzystając (podobnie jak w przypadku 1a) z warunku znikania funkcji potencjału na powierzchniach $z=\pm h$, pierwszą część potencjału:

$$\Phi_1(r,z,t)=\begin{cases}\vartheta\left[\dfrac{t}{2\tau}\displaystyle\int_0^\infty A(a)\frac{\overline{Z}(a,z)}{a\operatorname{ch}(ah)}J_0(ar)\,da+\right.\\ \qquad\left.+\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^\infty A(a)\frac{aJ_0(ar)}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^3\tau}\,da\right], & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\ \dfrac{\vartheta}{2}\displaystyle\int_0^\infty A(a)\frac{\overline{Z}(a,z)}{a\operatorname{ch}(ah)}J_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad t>\tau,\end{cases}\tag{2.15}$$

gdzie

$$\overline{Z}(a,z)=az\operatorname{sh}(az)-ah\operatorname{tgh}(ah)\operatorname{ch}(az).$$

Drugą część potencjału, która spełnia równanie (2.4), znajdziemy — podobnie jak w przypadku 1a — korzystając ze wzoru (2.5):

$$\Phi_2(r,z,t)=\begin{cases}-\dfrac{2\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^\infty A(a)\times\\ \times\dfrac{\exp[-\varkappa(a^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^3\tau}aJ_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\ -\dfrac{2\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^\infty A(a)\,q_m^{(1)}(a)\times\\ \times\dfrac{\exp[-\varkappa(a^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^3\tau}aJ_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad t>\tau.\end{cases}\tag{2.16}$$

Przypadek 2b. Postępując tak samo jak w przypadku 1b znajdujemy

$$
(2.17)\qquad \Phi_1(r,z,t)=\begin{cases}
\vartheta\left[\dfrac{t}{2\tau}\displaystyle\int_0^\infty A(a)\frac{\overline{S}(a,z)}{a\,\mathrm{sh}(ah)}J_0(ar)\,da+\right.\\
\qquad\left.+\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\gamma_m\sin(\gamma_m z)\int_0^\infty A(a)\frac{aJ_0(ar)}{\varkappa(a^2+\gamma_m^2)^3\tau}\,da\right], & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\[2ex]
\dfrac{\vartheta}{2}\displaystyle\int_0^\infty A(a)\frac{\overline{S}(a,z)}{a\,\mathrm{sh}(ah)}J_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad t>\tau,
\end{cases}
$$

gdzie

$$
\overline{S}(a,z)=az\,\mathrm{ch}(az)-ah\,\mathrm{ctg}(ah)\,\mathrm{sh}(az).
$$

Podobnie znajdziemy

$$
(2.18)\qquad \Phi_2(r,z,t)=\begin{cases}
-\dfrac{2\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\gamma_m\sin(\gamma_m z)\int_0^\infty A(a)\times\\
\qquad\times\dfrac{\exp[-\varkappa(a^2+\gamma_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\gamma_m^2)^3\tau}aJ_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\[2ex]
-\dfrac{2\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\gamma_m\sin(\gamma_m z)\int_0^\infty A(a)\,q_m^{(2)}\times\\
\qquad\times\dfrac{\exp[-\varkappa(a^2+\gamma_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\gamma_m^2)^3\tau}aJ_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad t>\tau.
\end{cases}
$$

Przypadek 3b. Jak wiadomo, ten przypadek jest superpozycją dwu poprzednich, a więc poszukiwanie całki szczególne potencjału mają postać

$$
(2.19)\qquad \Phi_1(r,z,t)=\begin{cases}
\dfrac{\vartheta}{2}\left\{\dfrac{t}{2\tau}\displaystyle\int_0^\infty\frac{A(a)}{a}\left[\frac{\overline{Z}(a,z)}{\mathrm{ch}(ah)}+\frac{\overline{S}(a,z)}{\mathrm{sh}(ah)}\right]J_0(ar)\,da+\right.\\
\qquad+\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\int_0^\infty\frac{A(a)}{\varkappa\tau}\left[\frac{\beta_m\cos(\beta_m z)}{(a^2+\beta_m^2)^3}+\right.\\
\qquad\left.\left.+\dfrac{\gamma_m\sin(\gamma_m z)}{(a^2+\gamma_m^2)^3}\right]aJ_0(ar)\,da\right\}, & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\[2ex]
\dfrac{\vartheta}{4}\displaystyle\int_0^\infty\frac{A(a)}{a}\left[\frac{\overline{Z}(a,z)}{\mathrm{ch}(ah)}+\frac{\overline{S}(a,z)}{\mathrm{sh}(ah)}\right]J_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad t>\tau,
\end{cases}
$$

oraz

$$(2.20)\quad \Phi_2(r,z,t)=\begin{cases} -\dfrac{\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\int_0^{\infty}\frac{A(\alpha)}{\varkappa\tau}\left\{\beta_m\cos(\beta_m z)\frac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{(\alpha^2+\beta_m^2)^3}+\right. \\ \left.\qquad +\gamma_m\sin(\gamma_m z)\dfrac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\gamma_m^2)t]}{(\alpha^2+\gamma_m^2)^3}\right\}\alpha J_0(\alpha r)\,d\alpha, \\ \qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ \dfrac{\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\int_0^{\infty}\frac{A(\alpha)}{\varkappa\tau}\left\{q_m^{(1)}(\alpha)\beta_m\cos(\beta_m z)\frac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{(\alpha^2+\beta_m^2)^3}+\right. \\ \left.\qquad +q_m^{(2)}(\alpha)\gamma_m\sin(\gamma_m z)\dfrac{\exp[-\varkappa(\alpha^2+\gamma_m^2)t]}{(\alpha^2+\gamma_m^2)^3}\right\}\alpha J_0(\alpha r)\,d\alpha, \\ \qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau. \end{cases}$$

3. Stan naprężenia

Stan naprężenia określony potencjałem oznaczymy jedną kreską $\bar{\sigma}_{ij}$. Składowe stanu naprężenia wyrażają się związkiem, [7]:

$$(3.1)\qquad \sigma_{ij}=2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial i\,\partial j}-\nabla^2\Phi\delta_{ij}\right)\qquad (i,j=r,z),$$

gdzie G oznacza moduł odkształcenia postaciowego, a δ_{ij} symbol K r o n e c k e r a.

Stan naprężenia określony potencjałem nie spełnia warunków brzegowych na powierzchniach $z=\pm h$:

$$(3.2)\qquad \sigma_{zz}(r,\pm h,t)\,0\quad \text{oraz}\quad \sigma_{rz}(r,\pm h,t)=0.$$

W celu spełnienia tych warunków dodamy stan naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$, który będzie określony za pomocą funkcji L o v e' a φ spełniającej jak wiadomo równanie biharmoniczne

$$(3.3)\qquad \nabla^2\nabla^2\varphi=0.$$

Składowe stanu naprężenia wyrażone przez tę funkcję określone są związkami, [7]:

$$(3.4)\quad \begin{cases} \bar{\bar{\sigma}}_{rr}=\dfrac{2G}{1-2\nu}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right),\qquad \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi}=\dfrac{2G}{1-2\nu}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right), \\ \bar{\bar{\sigma}}_{zz}=\dfrac{2G}{1-2\nu}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2\varphi-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right], \\ \bar{\bar{\sigma}}_{rz}=\dfrac{2G}{1-2\tau}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2\varphi-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]. \end{cases}$$

Składowe stanu naprężenia otrzymane za pomocą potencjału i funkcji Love'a spełniają warunki na powierzchniach $z=\pm h$; oznaczymy je $\sigma'_{ij}=\bar{\sigma}_{ij}+\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$. W celu uproszczenia zapisu podobnie jak w przypadku popotencjału wyznaczać będziemy oddzielnie składniki odpowiadające podziałowi funkcji potencjału według wzorów (2.3) i (2.4).

Do spełnienia pozostaje jeszcze warunek na brzegu $r=b$

$$\sigma_{rr}(b,z,t)=0\,. \tag{3.5}$$

Ten warunek spełnimy w sposób całkowy, a nowy stan naprężenia, który trzeba dodać, aby spełnić warunek (3.5), oznaczymy (σ''_{ij}).

Tak więc, stan naprężenia spełniający warunki na powierzchniach $z=\pm h$ w sposób dokładny, a na powierzchni $r=b$ w sposób przybliżony, wyraża się sumą

$$(\sigma_{ij})=(\sigma'_{ij})+(\sigma''_{ij})\,.$$

Przypadek 1a. Korzystając ze wzoru (3.1) oraz (2.7) znajdujemy

$$\bar{\sigma}_{rr,}=\begin{cases} -2G\vartheta\left\{\dfrac{t}{2\tau}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_n}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\left\{\bar{Z}_n(z)\left[J_0(\alpha_n r)-\dfrac{1}{\alpha_n r}J_1(\alpha_n r)\right]+\right.\right. \\ \left.\qquad +2\operatorname{ch}(\alpha_n z)J_0(\alpha_n r)\right\}+\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}\cos(\beta_m z)\left\{\bar{A}_{nm}\alpha_n^2\left[J_0(\alpha_n r)-\right.\right. \\ \left.\left.\left.\qquad -\dfrac{1}{\alpha_n r}J_1(\alpha_n r)\right]-A_{nm}J_0(\alpha_n r)\right\}\right\}, & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ -G\vartheta\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_n}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\left\{\bar{Z}_n(z)\left[J_0(\alpha_n r)-\dfrac{1}{\alpha_n r}J_1(\alpha_n r)\right]+\right. \\ \left.\qquad +2\operatorname{ch}(\alpha_n z)J_0(\alpha_n r)\right\}, & \text{jeśli}\quad t>\tau, \end{cases} \tag{3.6}$$

a na podstawie wzoru (2.10) możemy napisać

$$\bar{\sigma}_{rr,2}=\begin{cases} 2G\vartheta\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z)\left\{\bar{A}_{nm}\alpha_n^2\left[J_0(\alpha_n r)-\right.\right. \\ \left.\left.\qquad -\dfrac{1}{\alpha_n r}J_1(\alpha_n r)\right]-A_{nm}J_0(\alpha_n r)\right\}, & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ 2G\vartheta\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}q_{nm}^{(1)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z)\left\{\bar{A}_{nm}\alpha_n^2\left[J_0(\alpha_n r)-\right.\right. \\ \left.\left.\qquad -\dfrac{1}{\alpha_n r}J_1(\alpha_n r)\right]-A_{nm}J_0(\alpha_n r)\right\}, & \text{jeśli}\quad t>\tau. \end{cases} \tag{3.7}$$

Korzystając z tych samych wzorów otrzymamy naprężenia obwodowe

$$
(3.8)\qquad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi,1} = \begin{cases} -2G\vartheta\left[\dfrac{t}{\tau}\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)} J_0(\alpha_n r) - \right. \\ \qquad \left. - \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\cos(\beta_m z)\, J_0(\alpha_n r)\right], & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ -2G\vartheta\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)} J_0(\alpha_n r), & \text{jeśli}\quad t>\tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(3.9)\qquad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi,2} = \begin{cases} -2G\vartheta\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z)\, J_0(\alpha_n r), \\ \qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ -2G\vartheta\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\, q_{nm}^{(1)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z)\, J_0(\alpha_n r), \\ \qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau. \end{cases}
$$

Podobnie naprężenia normalne

$$
(3.10)\qquad \bar{\sigma}_{zz,1} = \begin{cases} 2G\vartheta\left\{\dfrac{t}{2\tau}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_n J_0(\alpha_n r)}{\alpha_n^2\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\left[\bar{Z}_n''(z) - 2\alpha_n^2\operatorname{ch}(\alpha_n z)\right] + \right. \\ \left. + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(\beta_m z)\left[A_{nm} - \beta_m^2\bar{A}_{nm}\right] J_0(\alpha_n r)\right\}, & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ G\vartheta\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_n J_0(\alpha_n r)}{\alpha_n^2\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\left[\bar{Z}_n''(z) - 2\alpha_n^2\operatorname{ch}(\alpha_n z)\right], & \text{jeśli}\quad t>\tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(3.11)\qquad \bar{\sigma}_{zz,2} = \begin{cases} -2G\vartheta\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z)\left[A_{nm} - \beta_m^2\bar{A}_{nm}\right] J_0(\alpha_n r), \\ \qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ -2G\vartheta\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} q_{n,m}^{(1)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t\right]\cos(\beta_m z)\left[A_{nm} - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \beta_m^2\bar{A}_{nm}\right] J_0(\alpha_n r), \quad \text{jeśli}\quad t>t. \end{cases}
$$

Wiadomo, że

$$
(3.12)\qquad \bar{\sigma}_{r\varphi,1} = \bar{\sigma}_{r\varphi,2} = 0\,.
$$

Pozostaje do wyznaczenia jedynie naprężenie styczne

$$
(3.13)\quad \bar{\sigma}_{rz,1} = \begin{cases} -2G\vartheta\left[\dfrac{t}{2\tau}\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{\bar{Z}_n'(z)}{\alpha_n \operatorname{ch}(\alpha_n h)} J_1(\alpha_n r) - \right. \\ \left. -\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \bar{A}_{nm}\,\alpha_n\,\beta_m \sin(\beta_m z)\, J_1(\alpha_n r)\right], & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ -G\vartheta \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{\bar{Z}_n'(z)}{\alpha_n \operatorname{ch}(\alpha_n h)} J_1(\alpha_n r), & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(3.14)\quad \bar{\bar{\sigma}}_{rz,2} = \begin{cases} -2G\vartheta \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \bar{A}_{nm} \exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)\,t\right] \alpha_n\,\beta_m \sin(\beta_m z)\, J_1(\alpha_n r), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ -2G\vartheta \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \bar{A}_{nm}\, q_{nm}^{(1)} \exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)\,t\right] \alpha_n\,\beta_m \sin(\beta_m z)\, J_1(\alpha_n r), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0>\tau. \end{cases}
$$

Stan naprężenia $(\bar{\sigma}_{ij})$ nie spełnia wszystkich warunków brzegowych (3.2). Na powierzchniach $z=\pm h$ naprężenia $\bar{\sigma}_{rz,i}$ są różne od zera i przyjmują wartości

$$
\bar{\sigma}_{rz,1}(r,\pm h,t) = \begin{cases} \mp 2G\vartheta\left\{\dfrac{t}{2\tau}\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \left\{\alpha_n h + \left[1-\alpha_n h \operatorname{tgh}(\alpha_n h)\right]\operatorname{tgh}(\alpha_n h)\right\} \times \right. \\ \left. \times J_1(\alpha_n r) - \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \bar{\bar{A}}_{nm}\,\alpha_n\,\beta_m\, J_1(\alpha_n r)\right\}, & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ \mp G\vartheta \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \left\{\alpha_n h + \left[1-\alpha_n h \operatorname{tgh}(\alpha_n h)\right]\operatorname{tgh}(\alpha_n h)\right\} J_1(\alpha_n r), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau \end{cases}
$$

oraz

$$
\bar{\sigma}_{rz,2}(r,\pm h,t) = \begin{cases} \mp 2G\vartheta \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \bar{\bar{A}}_{nm} \exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)\,t\right] \alpha_n\,\beta_m\, J_1(\alpha_n r), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ \mp 2G\vartheta \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \bar{\bar{A}}_{nm}\, q_{nm}^{(1)} \exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)\,t\right] \alpha_n\,\beta_m\, J_1(\alpha_n r), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau, \end{cases}
$$

gdzie

$$
\bar{\bar{A}}_{nm} = \bar{A}_{nm}(-1)^{m+1},
$$

co wynika z równania (1.10).

Funkcję L o v e' a przyjmujemy w następującej postaci:

$$\varphi_1 = \begin{cases} \dfrac{t}{2\tau} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n M_n(z) J_0(\alpha_n r) - \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \overline{\overline{A}}_{nm} N_{nm}(z) J_0(\alpha_n r), & \\ & \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n M_n(z) J_0(\alpha_n r), & \text{jeśli} \quad t > \tau \end{cases} \tag{3.15}$$

oraz

$$\varphi_2 = \begin{cases} \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \overline{\overline{A}}_{nm} \exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2 + \beta\alpha_m^2) t\right] N_{nm}(z) J_0(\alpha_n r), & \\ & \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \overline{\overline{A}}_{nm} q_{nm}^{(1)} \exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2 + \beta_m^2) t\right] N_{nm}(z) J_0(\alpha_n r), & \\ & \text{jeśli} \quad t > \tau. \end{cases} \tag{3.16}$$

Spełniając równanie (3.3) znajdziemy postacie funkcji $M_n(z)$ oraz $N_{nm}(z)$:

$$M_n(z) = C_n^{(1)} \operatorname{sh}(\alpha_n z) + C_n^{(2)} \alpha_n z \operatorname{ch}(\alpha_n z),$$

$$N_{nm}(z) = D_{nm}^{(1)} \operatorname{sh}(\alpha_n z) + D_{nm}^{(2)} \alpha_n z \operatorname{ch}(\alpha_n z).$$

Stałe $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $D_{nm}^{(1)}$ oraz $D_{nm}^{(2)}$ wyznaczymy z warunków brzegowych dla $z = \pm h$ (3.2). Otrzymamy

$$C_n^{(1)} = \frac{\vartheta(1-2\nu)\left[(1-2\nu) - \alpha_n h \operatorname{tg} h(\alpha_n h)\right]}{\alpha_n^3 \operatorname{ch}(\alpha_n h)},$$

$$C_n^{(2)} = \frac{\vartheta(1-2\nu)}{\alpha_n^3 \operatorname{ch}(\alpha_n h)},$$

$$D_{nm}^{(1)} = \frac{\vartheta(1-2\nu)\beta_m \left[(1-2\nu) - \alpha_n h \operatorname{tgh}(\alpha_n h)\right]}{\alpha_n^2 \left\{\alpha_n h + \left[1 - \alpha_n h \operatorname{tgh}(\alpha_n h)\right] \operatorname{tgh}(\alpha_n h)\right\} \operatorname{ch}(\alpha_n h)},$$

$$D_{nm}^{(2)} = \frac{\vartheta(1-2\nu)\beta_m}{\alpha_n^2 \left\{\alpha_n h + \left[1 - \alpha_n h \operatorname{tgh}(\alpha_n h)\right] \operatorname{tgh}(\alpha_n h)\right\} \operatorname{ch}(\alpha_n h)}.$$

Dodając do siebie składowe stanu naprężenia $\overline{\sigma}_{ij}$ oraz $\overline{\overline{\sigma}}_{ij}$ określone wzorami (3.4), otrzymamy składowe stanu naprężenia:

$$\sigma'_{rr,1} = \begin{cases} -2G\Bigg\{\vartheta(1-\nu)\dfrac{t}{\tau} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)} \dfrac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r} - & \\ - \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \Bigg\{\alpha_n^2 \left[\dfrac{\overline{\overline{A}}_{nm}}{1-2\nu} N'_{nm}(z) - \vartheta \overline{A}_{nm} \cos(\beta_m z)\right]\left[J_0(\alpha_n r) - \dfrac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r}\right] + & \\ + \left[\dfrac{\nu \overline{\overline{A}}_{nm}}{1-2\nu}\left(N'''_{nm}(z) - \alpha_n^2 N'_{nm}(z)\right) + \vartheta A_{nm} \cos(\beta_m z)\right] J_0(\alpha_n r)\Bigg\}\Bigg\}, & \\ & \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ -2G\vartheta(1-\nu) \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)} \dfrac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r}, & \text{jeśli} \quad t > \tau \end{cases} \tag{3.17}$$

oraz

$$
(3.18)\qquad \sigma'_{rr,2}=\begin{cases}
2G\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)\,t\right]\left\{\alpha_n^2\left[\dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu}N'_{nm}(z)+\vartheta\bar{A}_{nm}\cos(\beta_m z)\right]\times\right. \\
\qquad\times\left[J_0(\alpha_n r)-\dfrac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r}\right]+\left[\dfrac{\nu\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu}\left(N'''_{nm}(z)-\alpha_n^2 N'_{nm}(z)\right)-\right. \\
\qquad\left.\left.-\vartheta A_{nm}\cos(\beta_m z)\right]J_0(\alpha_n r)\right\}, \qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\
2G\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}q_{nm}^{(1)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)\,t\right]\times \\
\qquad\times\left\{\alpha_n^2\left[\dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu}N'_{nm}(z)+\vartheta\bar{A}_{nm}\cos(\beta_m z)\right]\left[J_0(\alpha_n r)-\dfrac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r}\right]+\right. \\
\qquad\left.+\left[\dfrac{\nu\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu}\left(N'''_{nm}(z)-\alpha_n^2 N'_{nm}(z)\right)-\vartheta A_{nm}\cos(\beta_m z)\right]J_0(\alpha_n r)\right\}, \\
\qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau.
\end{cases}
$$

Naprężenia obwodowe

$$
(3.19)\qquad \sigma'_{\varphi\varphi,1}=\begin{cases}
-2G\left\{\vartheta(1-\nu)\dfrac{t}{\tau}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\dfrac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\left[J_0(\alpha_n r)-\dfrac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r}\right]-\right. \\
\qquad-\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}\left\{\left[\dfrac{\nu\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu}\left(N'''_{nm}(z)-\alpha_n^2 N'_{nm}(z)\right)+\vartheta A_{nm}\cos(\beta_m z)\right]\times\right. \\
\qquad\left.\left.\times J_0(\alpha_n r)+\dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu}N'_{nm}(z)\dfrac{\alpha_n}{r}J_1(\alpha_n r)\right\}\right\}, \qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\
\qquad-2G\vartheta(1-\nu)\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\dfrac{\operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\operatorname{ch}(\alpha_n h)}\left[J_0(\alpha_n r)-\dfrac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n r}\right], \\
\qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau
\end{cases}
$$

oraz

$$
(3.20)\qquad \sigma'_{\varphi\varphi,2}=\begin{cases}
2G\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)\,t\right]\left\{\left[\dfrac{\nu\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu}\left(N'''_{nm}(z)-\alpha_n^2 N'_{nm}(z)\right)-\right.\right. \\
\qquad\left.\left.-\vartheta A_{nm}\cos(\beta_m z)\right]J_0(\alpha_n r)+\dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu}N'_{nm}(z)\dfrac{\alpha_n}{r}J_1(\alpha_n r)\right\}, \\
\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\
2G\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}q_{nm}^{(1)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)\,t\right]\left\{\left[\dfrac{\nu\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu}\left(N'''_{nm}(z)\alpha_n^2 N'_{nm}(z)\right)-\right.\right. \\
\qquad\left.\left.-\vartheta A_{nm}\cos(\beta_m z)\right]J_0(\alpha_n r)+\dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu}N'_{nm}(z)\dfrac{\alpha_n}{r}J_1(\alpha_n r)\right\}, \\
\qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau.
\end{cases}
$$

Naprężenia normalne charakteryzują się tym, że znikają w nich wyrazy przedstawione szeregami pojedynczymi:

$$
(3.21)\qquad \sigma'_{zz,1} = \begin{cases} 2G \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \Big\{ \vartheta (A_{nm} - \beta_m^2 \bar{A}_{nm}) \cos(\beta_m z) + \dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu} [(1-\nu) N'''_{nm}(z) - \\ \qquad - (2-\nu)\alpha_n^2 N'_{nm}(z)] \Big\} J_0(\alpha_n r), \quad \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ 0, \quad \text{jeśli} \quad t > \tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(3.22)\qquad \sigma'_{zz,2} = \begin{cases} -2G \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \exp[-\varkappa(\alpha_n^2 + \beta_m^2) t] \Big\{ \vartheta (A_{nm} - \beta_m^2 \bar{A}_{nm}) \cos(\beta_m z) - \\ \qquad - \dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu} [(1-\nu) N'''_{nm}(z) - (2-\nu)\alpha_n^2 N'_{nm}(z)] \Big\} J_0(\alpha_n r), \\ \qquad \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ -2G \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} q^{(1)}_{n,m} \exp[-\varkappa(\alpha_n^2 + \beta_m^2) t] \times \\ \qquad \times \Big\{ \vartheta (A_{nm} - \beta_m^2 \bar{A}_{nm}) \cos(\beta_m z) - \dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu} [(1-\nu) N'''_{nm}(z) - \\ \qquad - (2-\nu)\alpha_n^2 N'_{nm}(z)] \Big\} J_0(\alpha_n r), \\ \qquad \text{jeśli} \quad t > \tau. \end{cases}
$$

Taką samą własność mają naprężenia styczne

$$
(3.23)\qquad \sigma'_{zr,1} = \begin{cases} 2G \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \alpha_n \Big\{ \vartheta \bar{A}_{nm} \beta_m \sin(\beta_m z) + \dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu} [\nu N''_{nm}(z) + \\ \qquad + (1-\nu)\alpha_n^2 N_{nm}(z)] \Big\} J_1(\alpha_n r), \quad \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ 0, \quad \text{jeśli} \quad t > \tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(3.24)\qquad \sigma'_{rz,2} = \begin{cases} 2G \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \alpha_n \exp[-\varkappa(\alpha_n^2 + \beta_m^2) t] \Big\{ \dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu} [\nu N''_{nm}(z) + \\ \qquad + (1-\nu)\alpha_n^2 N_{nm}(z)] - \vartheta \bar{A}_{nm} \beta_m \sin(\beta_m z) \Big\} J_1(\alpha_n r), \\ \qquad \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ 2G \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \alpha_n q^{(1)}_{nm} \exp[-\varkappa(\alpha_n^2 + \beta_m^2) t] \Big\{ \dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu} [\nu N''_{nm}(z) + \\ \qquad + (1-\nu)\alpha_n^2 N_{nm}(z)] - \vartheta \bar{A}_{nm} \beta_m \sin(\beta_m z) \Big\} J_1(\alpha_n r), \\ \qquad \text{jeśli} \quad t > \tau. \end{cases}
$$

Jak się należy spodziewać

$$\sigma'_{r\varphi,1}=\sigma'_{r\varphi,2}=0\,. \tag{3.25}$$

Naprężenia $\sigma'_{rr,1}$ oraz $\sigma'_{rr,2}$, będące na brzegu $r=b$ jedynie funkcją z i odpowiednio zmiennych z i t, tworzą wypadkowe

$$N_1=\left[\int_{-h}^{h}\sigma'_{rr,1}\,dz\right]_{r=b}=\begin{cases}-4G\left\{\vartheta(1-\nu)\frac{t}{2\tau}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{tgh}\,(\alpha_n h)\frac{J_1(\alpha_n b)}{\alpha_n^2 b}-\right.\\ \left.-\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\bar{\bar{A}}_{nm}}{b}\left[\frac{\vartheta}{\beta_m}-\frac{D_{nm}^{(1)}}{1-2\nu}\,\mathrm{sh}\,(\alpha_n h)\right]J_1(\alpha_n b)\right\}, & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\ -2G\vartheta(1-\nu)\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{tgh}\,(\alpha_n h)\frac{J_1(\alpha_n b)}{\alpha_n^2 b}, & \text{jeśli}\quad t>\tau\end{cases} \tag{3.26}$$

oraz

$$N_2=\left[\int_{-h}^{h}\sigma'_{rr,2}\,dz\right]_{r=b}=\begin{cases}-4G\sum_{n,m=1}^{\infty}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)\,t\right]\frac{\alpha_n\bar{\bar{A}}_{nm}}{b}\times\\ \times\left[\frac{\vartheta}{\beta_m}+\frac{D_{nm}^{(1)}}{1-2\nu}\,\mathrm{sh}\,(\alpha_n h)\right]J_1(\alpha_n b), & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\ -4G\sum_{n,m=1}^{\infty}q_{nm}^{(1)}\exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)\,t\right]\frac{\alpha_n\bar{\bar{A}}_{nm}}{1-2\nu}\times\\ \times\left[\frac{\vartheta}{\beta_m}+\frac{D_{nm}^{(1)}}{1-2\nu}\,\mathrm{sh}\,(\alpha_n h)\right]J_1(\alpha_n h), & \text{jeśli}\quad t>\tau.\end{cases} \tag{3.27}$$

Naprężenia $\sigma'_{rz,1}$ oraz $\sigma'_{rz,2}$ dają na brzegu $r=b$ wypadkową równą zeru.

Dodajmy do stanu naprężenia (σ'_{ij}) stan naprężenia (σ''_{ij}) równoważny równomiernemu rozciąganiu w kierunku promienia r. Ostateczne wyrażenia na składowe naprężenia, oznaczone (σ_{ij}) wynoszą, [4], [10]:

$$\sigma_{rr}=\sigma'_{rr}-\frac{N}{2h},\qquad \sigma_{\varphi\varphi}=\sigma'_{\varphi\varphi}-\frac{N}{2h},$$

$$\sigma_{zz}=\sigma'_{zz},\qquad \sigma_{rz}=\sigma'_{rz},\qquad \sigma_{r\varphi}=0\,.$$

Z powyższych wzorów na naprężenia można łatwo otrzymać kilka przypadków szczególnych. Charakterystyczne cechy przejść granicznych i podstawienia omówione są przy wyznaczaniu pola temperatury (p. 1, przypadek 1a). Ze względu na miejsce wzorów odpowiadających przypadkom szczególnym nie będziemy tutaj przytaczać.

Przypadek 2a. Składowe naprężenia określone potencjałem można napisać bezpośrednio na podstawie wzorów występujących w przypadku 1a. Budowa wzorów w obu przypadkach jest taka sama. Aby ze wzorów (3.6)-(3.14) otrzymać wzory odpowiadające przypadkowi 2a, trzeba wykonać podstawienia:

$$
\begin{array}{lll}
\text{zamiast} & & \text{podstawić} \\
\end{array}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
\mathrm{ch}\,(a_n z) & \leftrightarrow & \mathrm{sh}\,(a_n z)\,, & \\
\mathrm{ch}\,(a_n h) & \leftrightarrow & \mathrm{sh}\,(a_n h)\,, & \\
\overline{Z}\,(z) & \leftrightarrow & S\,(z) & [\text{por.}\quad (2.11)]\,, \\
A_{nm},\ \overline{A}_{nm} & \leftrightarrow & B_{nm},\ \overline{B}_{nm} & [\text{por.}\quad (2.12)]\,, \\
\beta_m & \leftrightarrow & \gamma_m & [\text{por.}\quad (1.16)]\,, \\
\sin\,(\beta_m z) & \leftrightarrow & \cos\,(\gamma_m z)\,, & \\
\cos\,(\beta_m z) & \leftrightarrow & \sin\,(\gamma_m z)\,, & \\
q_{nm}^{(1)} & \leftrightarrow & q_{nm}^{(2)} & [\text{por.}\quad (1.18)]\,,
\end{array}
\right.
\tag{3.28}
$$

Podobnie jak w przypadku 1a, stan $(\overline{\sigma}_{ij})$ nie spełnia wszystkich warunków brzegowych. Na powierzchniach $z=\pm h$ naprężenia σ_{rz} nie są równe zeru i przyjmują wartości:

$$
\overline{\sigma}_{rz,1}\,(r,\pm h,t)=
\left\{
\begin{array}{ll}
-2G\vartheta\Big\{\dfrac{t}{2\tau}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\{a_n h+[1-a_n h\,\mathrm{ctgh}\,(a_n h)]\,\mathrm{ctg}\,(a_n h)\}\times & \\
\times J_1\,(a_n r)-\displaystyle\sum_{n,\,m=1}^{\infty}\overline{B}_{nm}\,a_n\gamma_m J_1\,(a_n r)\Big\}, & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau\,, \\
-G\vartheta\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\{a_n h+[1-a_n h\,\mathrm{ctgh}\,(a_n h)]\,\mathrm{ctgh}\,(a_n h)\}\,J_1\,(a_n r), & \\
 & \text{jeśli}\quad t>\tau
\end{array}
\right.
$$

oraz

$$
\overline{\sigma}_{rz,2}\,(r,\pm h,t)=
\left\{
\begin{array}{ll}
-2G\vartheta\displaystyle\sum_{n,\,m=1}^{\infty}\overline{B}_{nm}\exp\,[-\varkappa\,(a_n^2+\gamma_m^2)\,t]\,a_n\gamma_m J_1\,(a_n r), & \\
 & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau\,, \\
-2G\vartheta\displaystyle\sum_{n,\,m=1}^{\infty}q_{nm}^{(2)}\,\overline{\overline{B}}_{nm}\exp\,[-\varkappa\,(a_n^2+\gamma_m)\,t]\,a_n\gamma_m J_1\,(a_n r), & \\
 & \text{jeśli}\quad t>\tau\,,
\end{array}
\right.
$$

gdzie

$$
\overline{\overline{B}}_{nm}=\overline{B}_{nm}\,(-1)^{m+1}\,,
$$

co wynika z równania (1.16).

Funkcję L o v e'a φ, podobnie jak w przypadku 1a, przyjmiemy w postaci:

$$\varphi_1 = \begin{cases} \dfrac{t}{2\tau} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n P_n(z) J_0(\alpha_n r) - \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \overline{\overline{B}}_{nm} Q_{nm}(z) J_0(\alpha_n r), & \text{jeśli } 0 < t < \tau, \\ \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n P_n(z) J_0(\alpha_n r), & \text{jeśli } t > \tau \end{cases} \tag{3.29}$$

oraz

$$\varphi_2 = \begin{cases} \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \overline{\overline{B}}_{nm} \exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2 + \gamma_m^2) t\right] Q_{nm}(z) J_0(\alpha_n r), & \text{jeśli } 0 < t < \tau, \\ \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} \overline{\overline{B}}_{nm} q_{nm}^{(2)} \exp\left[-\varkappa(\alpha_n^2 + \gamma_m^2) t\right] Q_{nm}(z) J_0(\alpha_n r), & \text{jeśli } t > \tau \end{cases} \tag{3.30}$$

Spełnienie równań (3.3) wymaga, aby funkcje $P_n(z)$ oraz $Q_{nm}(z)$ miały postać

$$P_n(z) = E_n^{(1)} \operatorname{ch}(\alpha_n z) + E_n^{(2)} \alpha_n z \operatorname{sh}(\alpha_n z), \tag{3.31}$$

$$Q_{nm}(z) = F_{nm}^{(1)} \operatorname{ch}(\alpha_n z) + F_{nm}^{(2)} \alpha_n z \operatorname{sh}(\alpha_n z). \tag{3.32}$$

Stałe $E_n^{(1)}$, $E_n^{(2)}$, $F_{nm}^{(1)}$, $F_{nm}^{(2)}$ wyznaczymy z warunku brzegowego (3.2) dla $z = \pm h$. Mają one następujące wartości:

$$E_n^{(1)} = \frac{\vartheta(1-2\nu)\left[(1-2\nu) - \alpha_n h \operatorname{ctgh}(\alpha_n h)\right]}{\alpha_n^3 \operatorname{sh}(\alpha_n h)},$$

$$E_n^{(2)} = \frac{\vartheta(1-2\nu)}{\alpha_n^3 \operatorname{sh}(\alpha_n h)}.$$

$$F_{nm}^{(1)} = \frac{\vartheta(1-2\nu)\gamma_m \left[(1-2\nu) - \alpha_n h \operatorname{ctgh}(\alpha_n h)\right]}{\alpha_n^2 \left\{\alpha_n h + \left[1 - \alpha_n h \operatorname{ctgh}(\alpha_n h)\right] \operatorname{ctgh}(\alpha_n h)\right\} \operatorname{sh}(\alpha_n h)}$$

$$F_{nm}^{(2)} = \frac{\vartheta(1-2\nu)\gamma_m}{\alpha_n^2 \left\{\alpha_n h + \left[1 - \alpha_n h \operatorname{ctgh}(\alpha_n h)\right] \operatorname{ctgh}(\alpha_n h)\right\} \operatorname{sh}(\alpha_n h)}.$$

Na podstawie wzorów (3.29)-(3.32) można stwierdzić, że na to, aby wzory (3.17)-(3.25) opisywały przypadek 2a, trzeba — oprócz podstawień (3.28) — dokonać zamiany:

(3.33) na miejsce $N_{nm}(z)$ podstawić $Q_{nm}(z)$, [por. (3.32)].

Na brzegu $r=b$ naprężenia $\sigma'_{rr,1}$ oraz $\sigma'_{rr,2}$ są jedynie funkcjami zmiennej z i odpowiednio z i t. Ich wypadkowa równa się zeru, ale ich działanie równoważne jest momentowi

$$
(3.34)\quad M_1=\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{rr,1}zdz\right]_{r=b}=\begin{cases}
-4G\Big\{\vartheta(1-\nu)\dfrac{t}{2\tau}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n[a_nh\,\mathrm{ctgh}(a_nh)-1]\times\\
\qquad\times\dfrac{J_1(a_nb)}{a_n^3b}+\displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty}\overline{\overline{B}}_{nm}\left[\dfrac{H_{nm}}{1-2\nu}+\vartheta\dfrac{a_nh}{\gamma_m}\right]\times\\
\qquad\times\dfrac{J_1(a_nb)}{b}\Big\}, \quad \text{jeśli} \quad 0<t<\tau,\\[2ex]
-2G\vartheta(1-\nu)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n[a_nh\,\mathrm{ctgh}(a_nh)-1]\times\\
\qquad\times\dfrac{J_1(a_nb)}{a_n^3b}, \quad \text{jeśli} \quad t>\tau
\end{cases}
$$

oraz

$$
(3.35)\quad M_2=\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{rr,2}zdz\right]_{r=b}=\begin{cases}
-4G\displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty}\exp[-\varkappa(a_n^2+\gamma_m^2)t]\,\overline{\overline{B}}_{nm}\left[\dfrac{H_{nm}}{1-2\nu}-\right.\\
\qquad\left.-\vartheta\dfrac{a_nh}{\gamma_m}\right]\dfrac{J_1(a_nb)}{b}, \quad \text{jeśli} \quad 0<t<\tau,\\[2ex]
-4G\displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty}q_{nm}^{(2)}\exp[-\varkappa(a_n^2+\gamma_m^2)t]\,\overline{\overline{B}}_{nm}\times\\
\qquad\times\left[\dfrac{H_{nm}}{1-2\nu}-\vartheta\dfrac{a_nh}{\gamma_m}\right]\dfrac{J_1(a_nb)}{b}, \quad \text{jeśli} \quad t>\tau
\end{cases}
$$

gdzie

$$
H_{nm}=(F_{nm}^{(1)}+F_{nm}^{(2)})\,[a_nh\,\mathrm{ch}(a_nh)-\mathrm{sh}(a_nh)]+F_{nm}^{(2)}a_n^2h^2\,\mathrm{sh}(a_nh)\,.
$$

Stan naprężenia wywołany momentem $-M$ oznaczymy (σ''_{ij}). Poszczególne składowe wyrażają się wzorami, [4], [10]

$$
\sigma''_{rr}=\sigma''_{\varphi\varphi}=-\frac{3}{2}\,\frac{Mz}{h^3}, \qquad \sigma''_{zz}=\sigma''_{rz}=\sigma''_{r\varphi}=0\,.
$$

Przypadek 3a. Podobnie jak przy wyznaczaniu pola temperatury naprężenia wyznaczymy dokonując superpozycji obu poprzednich przypadków. Ponieważ odpowiednie wzory można napisać bardzo łatwo, to nie będziemy ich tutaj przytaczać.

Przypadek 1b. Naprężenia dane za pośrednictwem potencjału określone są wzorem (3.1). Korzystając ze wzoru (2.13) i (2.14) wypiszemy kolejno składowe stanu naprężenia:

naprężenia radialne

$$
(3.36)\qquad \bar{\sigma}_{rr,1} = \begin{cases} -2G\vartheta\Big\{\dfrac{t}{2\tau}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{aA(a)}{\operatorname{ch}(ah)}\Big\{\bar{Z}(a,z)\Big[J_0(ar)-\dfrac{J_1(ar)}{ar}\Big]+2\operatorname{ch}(az)J_0(ar)\Big\}da+ \\ \qquad +\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^\infty \dfrac{aA(a)}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^2\tau}\Big\{J_0(ar)+ \\ \qquad +\dfrac{a^2}{a^2+\beta_m^2}\Big[J_0(ar)-\dfrac{J_1(ar)}{ar}\Big]\Big\}da\Big\}, \qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ -G\vartheta\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{aA(a)}{\operatorname{ch}(ah)}\Big\{\bar{Z}(a,z)-\Big[J_0(ar)-\dfrac{J_1(ar)}{ar}\Big]+2\operatorname{ch}(az)J_0(ar)\Big\}da, \\ \qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(3.37)\qquad \bar{\sigma}_{rr,2} = \begin{cases} -\dfrac{4G\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^\infty \dfrac{aA(a)\exp[-\varkappa(a^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^2\tau}\times \\ \qquad \times\Big\{J_0(ar)+\dfrac{a^2}{a^2+\beta_m^2}\Big[J_0(ar)-\dfrac{J_1(ar)}{ar}\Big]\Big\}da, \qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ -\dfrac{4G\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^\infty \dfrac{aA(a)\,q_m^{(1)}(a)\exp[-\varkappa(a^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(a+\beta_m^2)^2\tau}\times \\ \qquad \times\Big\{J_0(ar)+\dfrac{a^2}{a^2+\beta_m^2}\Big[J_0(ar)-\dfrac{J_1(ar)}{ar}\Big]\Big\}da, \qquad \text{jeśli}\quad t<\tau; \end{cases}
$$

naprężenia obwodowe

$$
(3.38)\qquad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi,1} = \begin{cases} -2G\vartheta\Big[\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty A(a)\dfrac{\operatorname{ch}(az)}{\operatorname{ch}(ah)}aJ_0(ar)\,da- \\ \qquad -\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^\infty \dfrac{aA(a)}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^2\tau}J_0(ar)\,da\Big], \\ \qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ -2G\vartheta\displaystyle\int_0^\infty A(a)\dfrac{\operatorname{ch}(az)}{\operatorname{ch}(ah)}aJ_0(ar)\,da, \qquad \text{jeśli}\quad t>\tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(3.39)\qquad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi,2}=\begin{cases} -\dfrac{4G\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^{\infty}\frac{\alpha A(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^2\tau}\times\\ \qquad\qquad\times J_0(\alpha r)\,d\alpha, \qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\ -\dfrac{4G\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^{\infty}\frac{\alpha A(\alpha)\,q_m^{(1)}(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^2\tau}\times\\ \qquad\qquad\times J_0(\alpha r)\,d\alpha, \qquad \text{jeśli}\quad t>\tau; \end{cases}
$$

naprężenia normalne

$$
(3.40)\qquad \bar{\sigma}_{zz,1}=\begin{cases} 2G\vartheta\left\{\dfrac{t}{2\tau}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{A(\alpha)J_0(\alpha r)}{\alpha\operatorname{ch}(\alpha h)}[\bar{Z}''(\alpha,z)-2\alpha^2\operatorname{ch}(\alpha z)]\,d\alpha+\right.\\ \qquad\left.+\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^{\infty}\frac{\alpha^3 A(\alpha)J_0(\alpha r)}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\,d\alpha\right\},\\ \qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\ G\vartheta\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{A(\alpha)J_0(\alpha r)}{\alpha\operatorname{ch}(\alpha h)}[\bar{Z}''(\alpha,z)-2\alpha^2\operatorname{ch}(\alpha z)]\,d\alpha, \qquad \text{jeśli}\quad t>\tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(3.41)\qquad \bar{\sigma}_{zz,2}=\begin{cases} -\dfrac{4G\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^{\infty}\frac{\alpha^3 A(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\times\\ \qquad\qquad\times J_0(\alpha r)\,d\alpha, \qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\ -\dfrac{4G\vartheta}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\cos(\beta_m z)\int_0^{\infty}\frac{\alpha^3 A(\alpha)\,q_m^{(1)}(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\times\\ \qquad\qquad\times J_0(\alpha r)\,d\alpha, \qquad \text{jeśli}\quad t>\tau; \end{cases}
$$

naprężenia styczne

$$
(3.42)\qquad \bar{\sigma}_{rz,1}=\begin{cases} -2G\vartheta\left[\dfrac{t}{2\tau}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{A(\alpha)\bar{Z}'(\alpha,z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)}J_1(\alpha r)\,d\alpha-\right.\\ \left.-\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m^2\sin(\beta_m z)\int_0^{\infty}\frac{\alpha^2 A(\alpha)J_1(\alpha r)}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\,d\alpha\right], \qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\ -G\vartheta\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{A(\alpha)\bar{Z}'(\alpha,z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)}J_1(\alpha r)\,d\alpha, \qquad \text{jeśli}\quad t>\tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(3.43)\quad \bar{\sigma}_{rz,2}=\begin{cases} -\dfrac{4G\vartheta}{h}\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m^2\sin(\beta_m z)\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\alpha^2A(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\times \\ \qquad\times J_1(\alpha r)\,d\alpha, \qquad \text{jeśli} \quad 0<t<\tau, \\ -\dfrac{4G\vartheta}{h}\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m^2\sin(\beta_m z)\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\alpha^2A(\alpha)\,q_m^{(1)}(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\times \\ \qquad\times J_1(\alpha r)\,d\alpha, \qquad \text{jeśli} \quad t>\tau. \end{cases}
$$

Jak wiadomo

$$
\bar{\sigma}_{r\varphi,1}=\bar{\sigma}_{r\varphi,2}=0.
$$

Stan naprężenia $(\bar{\sigma}_{ij})$ nie spełnia drugiego z warunków (3.2), ponieważ naprężenia styczne na powierzchniach $z \pm h$ są różne od zera i przyjmują wartości

$$
\bar{\sigma}_{rz,1}(\pm h,r,t)=\begin{cases} \mp 2G\vartheta\Bigg\{\dfrac{t}{2\tau}\int\limits_0^{\infty}A(\alpha)\{\alpha h+[1+\alpha h\,\mathrm{tgh}(\alpha h)]\,\mathrm{tgh}(\alpha h)\}\,\alpha J_1(\alpha r)\,d\alpha- \\ -\dfrac{2}{h}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\beta_m^2\int\limits_0^{\infty}A(\alpha)\dfrac{\alpha^2J_1(\alpha r)}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\,d\alpha\Bigg\}, \qquad \text{jeśli} \quad 0<t<\tau, \\ \mp G\vartheta\int\limits_0^{\infty}A(\alpha)\{\alpha h+[1+\alpha h\,\mathrm{tgh}(\alpha h)]\,\mathrm{tgh}(\alpha h)\}\,\alpha J_1(\alpha r)\,d\alpha, \\ \qquad \text{jeśli} \quad t<\tau \end{cases}
$$

oraz

$$
\bar{\sigma}_{rz,2}(\pm h,r,t)=\begin{cases} \mp\dfrac{4G\vartheta}{h}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\beta_m^2\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\alpha^2A(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}J_1(\alpha r)\,d\alpha, \\ \qquad \text{jeśli} \quad 0<t<\tau, \\ \mp\dfrac{4G\vartheta}{h}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\beta_m^2\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\alpha^2A(\alpha)\,q_m^{(1)}(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\times \\ \qquad\times J_1(\alpha r)\,d\alpha, \qquad \text{jeśli} \quad t>\tau. \end{cases}
$$

Tak jak to zrobiliśmy w przypadku 1a, w celu spełnienia warunków (3.2) znajdziemy stan naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$, który określony jest przez funkcję

L o v e' a φ [wzory (3.4)] przyjętą w postaci sumy $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, której pierwszy składnik równa się

$$
(3.44)\qquad \varphi_1=\begin{cases} \dfrac{t}{2\tau}\displaystyle\int_0^\infty A(a)\,M(a,z)\,J_0(ar)\,da-\frac{2}{h}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty \frac{A(a)\,N_m(a,z)}{\varkappa\,(a^2+\beta_m^2)^3\,\tau}\,J_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty A(a)\,M(a,z)\,J_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad t>\tau, \end{cases}
$$

a drugi:

$$
(3.45)\qquad \varphi_2=\begin{cases} \dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty A(a)\,\frac{\exp[-\varkappa\,(a^2+\beta_m^2)\,t]}{\varkappa\,(a^2+\beta_m^2)^3\,\tau}\,N_m(a,z)\,J_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad 0<t<\tau,\\[2ex] \dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty A(a)\,q_m^{(1)}(a)\,\frac{\exp[-\varkappa\,(a^2+\beta_m^2)\,t]}{\varkappa\,(a^2+\beta_m^2)^3\,\tau}\,N_m(a,z)\,J_0(ar)\,da, & \text{jeśli}\quad t>\tau. \end{cases}
$$

Funkcja φ musi spełniać równanie (3.3). Spełnienie tego równania osiąga się przez przyjęcie:

$$
M(a,z)=C^{(1)}(a)\,\mathrm{sh}\,(az)+C^{(2)}(a)\,az\,\mathrm{ch}\,(az),
$$

$$
N_m(a,z)=D_m^{(1)}(a)\,\mathrm{sh}\,(az)+D_m^{(2)}(a)\,az\,\mathrm{ch}\,(az).
$$

Współczynniki $C^{(1)}(a)$, $C^{(2)}(a)$, $D_m^{(1)}(a)$ oraz $D_m^{(2)}(a)$ wyznaczymy z warunku brzegowego (3.2). Wyrażają się one wzorami:

$$
C^{(1)}(a)=\frac{\vartheta\,(1-2\nu)\,[(1-2\nu)-ah\,\mathrm{tgh}\,(ah)]}{a^2\,\mathrm{ch}\,(ah)},
$$

$$
C^{(2)}(a)=\frac{\vartheta\,(1-2\nu)}{a^2\,\mathrm{ch}\,(ah)}
$$

oraz

$$
D_m^{(1)}(a)=\frac{\vartheta\,(1-2\nu)\,[(1-2\nu)-ah\,\mathrm{tgh}\,(ah)]\,\beta_m^2}{a\,\{ah+[1-ah\,\mathrm{tgh}\,(ah)]\,\mathrm{tgh}\,(ah)\}\,\mathrm{ch}\,(ah)},
$$

$$
D_m^{(2)}(a)=\frac{\vartheta\,(1-2\nu)\,\beta_m^2}{a\,\{ah+[1-ah\,\mathrm{tgh}\,(ah)]\,\mathrm{tgh}\,(ah)\}\,\mathrm{ch}\,(ah)}.
$$

Dodając do siebie składowe stanu naprężenia $(\bar{\sigma}_{ij})$ oraz $(\bar{\bar{\sigma}}_{ij})$ określone wzorami (3.4), otrzymamy składowe stanu (σ_{ij}), które są poszukiwanym rozwiązaniem. Wypiszemy obecnie kolejno składowe stanu (σ_{ij}):

składowe radialne

$$
(3.46)\qquad \sigma_{rr,1}=\begin{cases}
-2G\Big\{\vartheta(1-\nu)\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty A(\alpha)\frac{\operatorname{ch}(\alpha z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)}\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\,d\alpha- \\
\quad-\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty\frac{A(\alpha)}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^2\tau}\Big\{\Big[(-1)^{m+1}\vartheta\alpha\beta_m\cos(\beta_m z)- \\
\quad-\nu\dfrac{N_m'''(\alpha,z)-\alpha^2N_m'(\alpha,z)}{(1-2\nu)(\alpha^2+\beta_m^2)}\Big]J_0(\alpha r)+\Big[J_0(\alpha r)-\dfrac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\Big]\times \\
\quad\times\Big[\dfrac{(-1)^{m+1}\vartheta\alpha^3\beta_m}{\alpha^2+\beta_m^2}\cos(\beta_m z)+\dfrac{\alpha^2N_m'(\alpha,z)}{(1-2\nu)(\alpha^2+\beta_m^2)}\Big]\Big\}d\alpha\Big\}, \\
\qquad\qquad\qquad\text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\
-2G\vartheta(1-\nu)\displaystyle\int_0^\infty A(\alpha)\frac{\operatorname{ch}(\alpha z)}{\operatorname{ch}(\alpha h)}\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\,d\alpha,\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau
\end{cases}
$$

oraz

$$
(3.47)\qquad \sigma_{rr,2}=\begin{cases}
-\dfrac{4G}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty\frac{A(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^2\tau}\times \\
\quad\times\Big\{\Big[(-1)^{m+1}\vartheta\alpha\beta_m\cos(\beta_m z)-\nu\dfrac{N_m'''(z)-\alpha^2N_m'(\alpha,z)}{(1-2\nu)(\alpha^2+\beta_m^2)}\Big]J_0(\alpha r)+ \\
\quad+\Big[J_0(\alpha r)-\dfrac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\Big]\Big[\dfrac{(-1)^{m+1}\vartheta\alpha^3\beta_m}{\alpha^2+\beta^2}\cos(\beta_m z)+ \\
\quad+\dfrac{\alpha^2N_m'(\alpha,z)}{(1-2\nu)(\alpha^2+\beta_m^2)}\Big]\Big\}d\alpha,\qquad\text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\
-\dfrac{4G}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty\frac{A(\alpha)\,q_m^{(1)}(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^2\tau}\times \\
\quad\times\Big\{\Big[(-1)^{m+1}\vartheta\alpha\beta_m\cos(\beta_m z)-\nu\dfrac{N_m'''(\alpha,z)-\alpha^2N_m'(\alpha,z)}{(1-2\nu)(\alpha^2+\beta_m^2)}\Big]\times \\
\quad\times J_0(\alpha r)+\Big[J_0(\alpha r)-\dfrac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\Big]\Big[\dfrac{(-1)^{m+1}\vartheta\alpha^3\beta_m}{\alpha^2+\beta_m^2}\cos(\beta_m z)+ \\
\quad+\dfrac{\alpha^2N_m'(\alpha,z)}{(1-2\nu)(\alpha^2+\beta_m^2)}\Big]\Big\}d\alpha,\qquad\text{jeśli}\quad t>\tau;
\end{cases}
$$

składowe obwodowe

$$
(3.48)\qquad \sigma_{\varphi\varphi,1}=\begin{cases}
-2G\Big\{\vartheta(1-\nu)\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty A(a)\dfrac{\operatorname{ch}(az)}{\operatorname{ch}(ah)}\left[J_0(ar)-\dfrac{J_1(ar)}{ar}\right]da- \\
\qquad -\dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty \dfrac{A(a)}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^2\tau}\Big\{\Big[(-1)^{m+1}\vartheta a\beta_m\cos(\beta_m z)- \\
\qquad\qquad -\nu\dfrac{N_m'''(a,z)-a^2N_m'(a,z)}{(1-2\nu)(a^2+\beta_m^2)}\Big]J_0(ar)- \\
\qquad\qquad -a^2\dfrac{N_m'(a,z)}{a^2+\beta_m^2}\dfrac{J_1(ar)}{ar}\Big\}da\Big\}, \qquad \text{jeśli}\quad t>\tau, \\
-2G\vartheta(1-\nu)\displaystyle\int_0^\infty A(a)\dfrac{\operatorname{ch}(az)}{\operatorname{ch}(ah)}\left[J_0(ar)-\dfrac{J_1(ar)}{ar}\right]da, \\
\qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau
\end{cases}
$$

oraz

$$
(3.49)\qquad \sigma_{\varphi\varphi 2}=\begin{cases}
-\dfrac{4G}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty \dfrac{A(a)\exp[-\varkappa(a^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^2\tau}\times \\
\quad\times\Big\{\Big[(-1)^{m+1}\vartheta a\beta_m\cos(\beta_m z)+\nu\dfrac{N_m'''(a,z)-a^2N_m'(a,z)}{(1-2\nu)(a^2+\beta_m^2)}\Big]\times \\
\quad\times J_0(ar)+\dfrac{a^2N_m'(a,z)}{a^2+\beta_m^2}\dfrac{J_1(ar)}{ar}\Big\}da, \qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\
-\dfrac{4G}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty \dfrac{A(a)\,q_m^{(1)}(a)\exp[-\varkappa(a^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^2\tau}\times \\
\quad\times\Big\{\Big[(-1)^{m+1}\vartheta a\beta_m\cos(\beta_m z)+\nu\dfrac{N_m'''(a,z)-a^2N_m'(a,z)}{(1-2\nu)(a^2+\beta_m^2)}\Big]\times \\
\quad\times J_0(ar)+\dfrac{a^2N_m'(a,z)}{a^2+\beta_m^2}\dfrac{J_1(ar)}{ar}\Big\}da, \qquad \text{jeśli}\quad t>\tau;
\end{cases}
$$

składowe normalne

$$
(3.50)\qquad \sigma_{zz,1}=\begin{cases}
\dfrac{4G}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty \dfrac{A(a)J_0(ar)}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^3\tau}\Big\{(-1)^{m+1}\vartheta a^3\beta_m\cos(\beta_m z)+ \\
\qquad +\dfrac{(2-\nu)a^2N_m'(a,z)}{1-2\nu}-\dfrac{(1-\nu)N_m'''(a,z)}{1-2\nu}\Big\}da, \\
\qquad\qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\
0, \qquad \text{jeśli}\quad t>\tau,
\end{cases}
$$

oraz

$$
(3.51)\quad \sigma_{zz,2}=\begin{cases} -\dfrac{4G}{h}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\dfrac{A(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\times \\ \qquad\times\Big\{(-1)^{m+1}\vartheta\alpha^3\beta_m\cos(\beta_m z)+ \\ \qquad+\dfrac{(2-\nu)\alpha^2N'_m(\alpha,z)-(1-\nu)N'''_m(\alpha,z)}{1-2\nu}\Big\}J_0(\alpha r)\,d\alpha, \\ \qquad\qquad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ -\dfrac{4G}{h}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\dfrac{A(\alpha)\,q_m^{(1)}(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\times \\ \qquad\times\Big\{(-1)^{m+1}\vartheta\alpha^3\beta_m\cos(\beta_m z)+ \\ \qquad+\dfrac{(2-\nu)\alpha^2N'_m(\alpha,z)-(1-\nu)N'''_m(\alpha,z)}{1-2\nu}\Big\}J_0(\alpha r)\,d\alpha, \\ \qquad\qquad \text{jeśli}\quad t>\tau; \end{cases}
$$

składowe styczne

$$
(3.52)\quad \sigma_{rz,1}=\begin{cases} \dfrac{4G}{h}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\dfrac{A(\alpha)J_1(\alpha r)}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\Big\{(-1)^{m+1}\vartheta\alpha^2\beta_m^2\sin(\beta_m z)+ \\ \qquad+\dfrac{(2-\nu)\alpha N''_m(\alpha,z)}{(1-2\nu)}-\dfrac{\alpha^3(1-\nu)N(\alpha,z)}{(1-2\nu)}\Big\}d\alpha,\quad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ 0,\quad \text{jeśli}\quad t>\tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(3.53)\quad \sigma_{rz,2}=\begin{cases} -\dfrac{4G}{h}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\dfrac{A(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\times \\ \qquad\times\Big\{(-1)^{m+1}\vartheta\alpha^2\beta_m^2\sin(\beta_m z)-\dfrac{(2-\nu)\alpha N''_m(\alpha,z)}{1-2\nu}+ \\ \qquad+\dfrac{(1-\nu)\alpha^3N_m(\alpha,z)}{(1-2\nu)}\Big\}J_1(\alpha r)\,d\alpha,\quad \text{jeśli}\quad 0<t<\tau, \\ -\dfrac{4G}{h}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\dfrac{A(\alpha)\,q_m^{(1)}(\alpha)\exp[-\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(\alpha^2+\beta_m^2)^3\tau}\times \\ \qquad\times\Big\{(-1)^{m+1}\vartheta\alpha^2\beta_m^2\sin(\beta_m z)-\dfrac{(2-\nu)\alpha N''_m(\alpha,z)}{1-2\nu}+ \\ \qquad+\dfrac{(1-\nu)\alpha N_m(\alpha,z)}{(1-2\nu)}\Big\}J_1(\alpha r)\,d\alpha,\quad \text{jeśli}\quad t>\tau. \end{cases}
$$

Charakterystyczne we wzorach powyższych jest to, że w naprężeniach $\sigma_{zz,1}$ oraz $\sigma_{rz,2}$ znikają składniki wyrażone całkami.

Przypadek 2b. Po wykonaniu wszystkich działań — podobnie jak w przypadku 2a — można się przekonać, że wszystkie wzory mają taką samą budowę, jak w przypadku 1b. Aby wzory (3.46) - (3.53) przypadku 1b określały składowe naprężenia w obecnie rozpatrywanym przypadku, należy w nich dokonać następujących podstawień:

$$
\text{(3.54)}\qquad
\begin{array}{ll}
\text{zamiast} & \text{podstawić:} \\
\left\{\begin{array}{l}
\operatorname{ch}(ah) \longleftrightarrow \operatorname{sh}(a,h), \\
\operatorname{ch}(az) \longleftrightarrow \operatorname{sh}(a,z), \\
\sin(az) \longleftrightarrow \operatorname{ch}(a,z), \\
\operatorname{tgh}(ah) \longleftrightarrow \operatorname{ctgh}(ah), \\
\beta_m \qquad\longleftrightarrow \gamma_m \qquad [\text{określone przez wzór (1.16)}], \\
\sin(\beta_m z) \longleftrightarrow \cos(\gamma_m z), \\
\cos(\beta_m z) \longleftrightarrow \sin(\gamma_m z).
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Wykonanie powyższych podstawień w funkcji $\overline{Z}(a, z)$ zamienia ją na funkcję $\overline{S}(a, z)$. Podobnie rzecz się ma ze wszystkimi funkcjami wprowadzonymi w toku odpowiedniego postępowania.

Przypadek 3b. Ten przypadek może być rozpatrywany jako superpozycja obu przypadków poprzednich, przy czym otrzymane wielkości należy podzielić przez 2.

4. Stan przemieszczenia

Stan przemieszczenia na podstawie już wykonanych operacji jest bardzo łatwo określić. Składowe, które zależą od potencjału termo-sprężystego przemieszczenia, dane są na podstawie definicji [wzory (2.1)]. Część składowych zależna od funkcji L o v e' a φ dana jest wzorami, [4], [10]:

$$
\text{(4.1)}\qquad \overline{\overline{u}} = -\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}, \qquad \overline{\overline{w}} = \frac{1}{1-2\nu}\left[2(1-\nu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right].
$$

Dla każdego z przypadków będziemy wypisywać od razu sumy

$$
u' = \overline{u} + \overline{\overline{u}}, \qquad w' = \overline{w} + \overline{\overline{w}}.
$$

Zachowamy tutaj taki podział na poszczególne części składowych, jaki miał miejsce w przypadku naprężeń.

Przypadek 1a. Korzystając ze wzorów (2.6), (2.10) oraz (3.15), (3.16) możemy wypisać następujące wzory:

przemieszczenie radialne

$$
(4.2)\qquad u_1' = \begin{cases} \vartheta(1-\nu)\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{A_n \operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\alpha_n \operatorname{ch}(\alpha_n h)} J_1(\alpha_n r) - \sum_{n,m=1}^{\infty}\Big[\vartheta \bar{A}_{nm}\alpha_n \cos(\beta_m z) + \\ \qquad + \dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}\alpha_n N'_{nm}(z)}{1-2\nu}\Big] J_1(\alpha_n r), \quad \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ \vartheta(1-\nu)\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{A_n \operatorname{ch}(\alpha_n z)}{\alpha_n \operatorname{ch}(\alpha_n h)} J_1(\alpha_n r), \quad \text{jeśli} \quad t > \tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(4.3)\qquad u_2' = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty}\exp[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t]\Big[\vartheta\bar{A}_{nm}\alpha_n\cos(\beta_m z) + \\ \qquad + \dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}\alpha_n N'_{nm}(z)}{1-2\nu}\Big] J_1(\alpha_n r), \quad \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ \displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty} q_{nm}^{(1)}\exp[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t]\Big[\vartheta\bar{A}_{nm}\alpha\cos(\beta_m z) + \\ \qquad + \dfrac{\bar{\bar{A}}_{nm}\alpha_n N'_{nm}(z)}{1-2\nu}\Big] J_1(\alpha_n r), \quad \text{jeśli} \quad t > \tau; \end{cases}
$$

przemieszczenie normalne

$$
(4.4)\qquad w_1' = \begin{cases} \vartheta(1-\nu)\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{A_n \operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\alpha_n \operatorname{ch}(\alpha_n h)} J_0(\alpha_n r) - \sum_{n,m=1}^{\infty}\Big[\vartheta\bar{A}_{nm}\beta_m\sin(\beta_m z) + \\ \qquad + N''_{nm}(z)\bar{\bar{A}}_{nm} - \bar{\bar{A}}_{nm}\dfrac{2(1-\nu)\alpha_n^2 N_{nm}(z)}{1-2\nu}\Big] J_0(\alpha_n r), \\ \qquad \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ \vartheta(1-\nu)\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{A_n \operatorname{sh}(\alpha_n z)}{\alpha_n \operatorname{ch}(\alpha_n z)} J_0(\alpha_n r), \quad \text{jeśli} \quad t > \tau \end{cases}
$$

oraz

$$
(4.5)\qquad w_2' = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty}\exp[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t]\Big[\vartheta\bar{A}_{nm}\beta_m\sin(\beta_m z) + \bar{\bar{A}}_{nm}N''_{nm}(z) + \\ \qquad + \bar{\bar{A}}_{nm}\dfrac{2(1-\nu)\alpha_n^2 N_{nm}(z)}{1-2\nu}\Big] J_0(\alpha_n r), \quad \text{jeśli} \quad 0 < t < \tau, \\ \displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty} q_{nm}^{(1)}\exp[-\varkappa(\alpha_n^2+\beta_m^2)t]\Big[\vartheta\bar{A}_{nm}\beta_m\sin(\beta_m z) + \bar{\bar{A}}_{nm}N''_{nm}(z) + \\ \qquad + \bar{\bar{A}}_{nm}\dfrac{2(1-\nu)\alpha_n^2 N_{nm}(z)}{1-2\nu}\Big] J_0(\alpha_n r), \quad \text{jeśli} \quad t > \tau. \end{cases}
$$

Pozostają jeszcze do wyznaczenia przemieszczenia u'' oraz w'', które określone są wzorami, [10]:

$$u'' = -\frac{1-\nu}{2g(1+\nu)}\frac{rN}{2h}, \qquad w'' = \frac{\nu z N}{2(1+\nu)Gh}.$$

Siły N określone są wzorami (3.26) i (3.27).

Poszukiwania składowe stanu przemieszczenia wyrażają się sumami

$$u = u' + u'', \qquad w = w' + w''.$$

Przypadek 2a. W tym przypadku wzory mają taki kształt, jak w przypadku 1a. Aby otrzymać poszukiwane związki należy we wzorach (4.2)-(4.5) z poprzedniego przypadku dokonać podstawień określonych przez (3.28) i (3.33). Natomiast stan przemieszczenia (u'', w'') określony jest związkami, [4], [10],

$$u'' = -\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{zr}{G}\frac{3}{4}\frac{M}{h^3}, \qquad w'' = \frac{2\nu z^2 + (1-\nu)r^2}{2G(1+\nu)}\frac{3}{4}\frac{M}{h^3}.$$

Momenty M określone są wzorami (3.34) i (3.35).

Przypadek 3a. Przypadek ten można rozpatrywać jako superpozycję obu poprzednich przypadków. Obliczone na tej podstawie składowe należy podzielić przez 2.

Przypadek 1b. Korzystając z definicji (2.1) i ze związków (4.1) możemy napisać następujące wzory:

przemieszczenie radialne

$$u_1 = \begin{cases} \vartheta(1-\nu)\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty \frac{A(a)\,\mathrm{ch}(az)}{a\,\mathrm{ch}(ah)} J_1(ar)\,da - \frac{2}{h}\sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty \frac{A(a)J_1(ar)}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^3\tau} \times \\ \quad \times\left[(-1)^{m+1}\vartheta a^2\beta_m\cos(\beta_m z) + \dfrac{aN'_m(a,z)}{1-2\nu}\right]da, & \text{jeśli} \quad 0<t<\tau, \\ \vartheta(1-\nu)\displaystyle\int_0^\infty \frac{A(a)\,\mathrm{ch}(az)}{a\,\mathrm{ch}(ah)} J_1(ar)\,da, & \text{jeśli} \quad t>\tau \end{cases}$$

oraz

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty \frac{A(a)\exp[-\varkappa(a^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^3\tau}\Big[(-1)^{m+1}\vartheta a^2\beta_m\cos(\beta_m z) + \\ \qquad + \dfrac{aN'_m(a,z)}{1-2\nu}\Big]J_1(ar)\,da, & \text{jeśli} \quad 0<t<\tau, \\ \dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty \frac{A(a)\,q_m^{(1)}(a)\exp[-\varkappa(a^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^3\tau}\Big[(-1)^{m+1}\vartheta a^2\beta_m\cos(\beta_m z) + \\ \qquad + \dfrac{aN'_m(a,z)}{1-2\nu}\Big]J_1(ar)\,da, & \text{jeśli} \quad t>\tau; \end{cases}$$

przemieszczenie normalne

$$w_1 = \begin{cases} \vartheta(1-\nu)\dfrac{t}{\tau}\displaystyle\int_0^\infty \frac{A(a)\,\mathrm{sh}(az)}{a\,\mathrm{ch}(ah)} J_0(ar)\,da - \frac{2}{h}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty \frac{A(a)\,J_0(ar)}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^3\,\tau} \times \\ \qquad \times\left[(-1)^{m+1}\vartheta a\beta_m^2 \sin(\beta_m z) + N_m''(a,z) - \dfrac{2(1-\nu)\,a a^2 N_m(a,z)}{1-2\nu}\right] da, \\ \qquad\qquad \text{jeśli} \quad 0<t<\tau, \\ \vartheta(1-\nu)\displaystyle\int_0^\infty \frac{A(a)\,\mathrm{sh}(az)}{a\,\mathrm{ch}(ah)} J_0(ar)\,da, \qquad \text{jeśli} \quad t>\tau \end{cases}$$

oraz

$$w_2 = \begin{cases} \dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty \frac{A(a)\exp[-\varkappa(a^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^3\,\tau} \times \\ \qquad \times\left[(-1)^{m+1}\vartheta a\beta_m^2 \sin(\beta_m z) + N_m''(a,z) - \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{2(1-\nu)\,a^2 N_m(a,z)}{1-2\nu}\right] J_1(ar)\,da, \qquad \text{jeśli} \quad 0<t<\tau, \\ \dfrac{2}{h}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty \frac{A(a)\,q_m^{(1)}(a)\exp[-\varkappa(a^2+\beta_m^2)t]}{\varkappa(a^2+\beta_m^2)^3\,\tau} \times \\ \qquad \times\left[(-1)^{m+1}\vartheta a\beta_m^2 \sin(\beta_m z) + N_m''(a,z) - \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{2(1-\nu)\,a a^2 N_m(a,z)}{1-2\nu}\right] J_1(ar)\,da, \qquad \text{jeśli} \quad t>\tau. \end{cases}$$

Przypadek 2b. Aby otrzymać poszukiwane wzory, należy we wzorach poprzedniego przypadku wykonać podstawienia określone przez (3.54).

Przypadek 3b. Przypadek ten również można rozpatrywać jako superpozycję obu poprzednich przypadków; również jak poprzednio obliczone składowe należy podzielić przez 2.

5. Uwagi

1. We wzorach na naprężenia i przemieszczenia w wielu przypadkach zostały wypisane jedynie symbole pochodnych pewnych funkcji. Forma taka została zostawiona ze względu na to, że podstawienia szczegółowe prowadziły do bardzo zawiłych wyrażeń, których nie udawało się przedstawić w zwięzłej formie.

2. Z uwagi na zastosowania praktyczne najbardziej istotnymi są przypadki 3a oraz 3b. Ze względu na miejsce wzory odpowiadające tym przypadkom nie zostały wypisane. Na podstawie objaśnień zawartych w tekście wzory te można będzie łatwo wypisać.

3. Praca niniejsza jest w pewnym sensie rozszerzeniem pracy [6] na przypadki quasi-ustalone. W wymienionej pracy wykonane były przejścia graniczne prowadzące do przypadku płyt bardzo cienkich. Przejście takie jest poprawne w przypadku naprężeń spowodowanych działaniem ustalonego pola temperatury. Gdy mamy do czynienia z polem nieustalonym, a w szczególności przy nagłych ogrzaniach, to nawet w cienkiej płycie naprężenia w części powierzchniowej mogą się bardzo znacznie różnić od naprężeń w części środkowej (w szczególności w pierwszych sekundach działania źródła). Jeżeli wykonalibyśmy przejście graniczne prowadzące do cienkiej płyty, to powyższe zjawisko zostałoby zupełnie pominięte. Wydaje się, że wykonanie przejścia granicznego do przypadku cienkiej płyty byłoby poprawne dla większych wartości czasu (licząc od chwili działania źródła). Tak więc w przypadku cienkiej płyty w pierwszym okresie należałoby rozpatrywać zjawisko według wzorów podanych w niniejszej pracy, a pozostały etap zmian można by ująć wzorami, w których wykonano przejście graniczne prowadzące do cienkiej płyty. Założenia jakie należy uczynić przy wykonywaniu takiego przejścia granicznego można znaleźć w pracy [6].

4. Wzory na naprężenia i przemieszczenia zawierają również przypadki ustalone. Odnoszą się do nich wzory z indeksem 1, w których przypadkowi ustalonemu odpowiada drugi ze składników dla $t > \tau$. W rezultacie otrzymuje się wyniki zgodne z tymi, jakie są podane w pracy [6].

Literatura cytowana w tekście

[1] J. N. Goodier, *On the Integration of the Thermo-Elastic Equations*, Phil. Mag., Vol. 23, 157 (1937).

[2] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, t. 2, PWN, Warszawa 1955.

[3] A. E. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Londyn 1927.

[4] A. Nádái, *Elastische Platten*, Berlin 1925.

[5] W. Nowacki, *The State of Stress in a Thick Circular Plate Due to a Temperature Field*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, 4, 1957.

[6] W. Nowacki, *Stan naprężenia w grubej płycie kołowej, wywołany działaniem pola temperatury*, Arch. Inżyn. Lądow., 1 (1958).

[7] E. Melan, H. Parkus, *Wärmespannungen*, Wiedeń 1953.

[8] E. Melan, *Spannungen infolge nicht stationärer Temperaturfelder*, Öster. Ing.-Arch., 2-3, 9 (1955).

[9] C. J. Tranter, *Integral Transforms in Mathematical Physics*, Londyn.

[10] A. Timpe, *Achsensymetrische Deformation von Umdrehungskörpern*, ZAMM, Vol., 1924.

Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ТОЛСТОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКЕ, ВЫЗВАННОЕ ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

В работе определяется напряженное состояние и перемещения толстой круговой пластинки толщиной $2h$ и диаметром $2b$, вызванные действием нестационарного, осесимметрического температурного поля. Источник тепла определяется температурой, являющейся функцией времени и места. Рассматриваются три случая источников тепла. В первом случае температурное поле симметрично по отношению к плоскости $z = 0$. Во втором — температурное поле определяется антисимметричными краевыми условиями по отношению к плоскости $z = 0$. Наконец, в третьем случае — область источника тепла находится только на поверхности $z = h$.

Автор стремится к тому, чтобы в плоскостях $z = \pm h$ точно удовлетворить всем краевым условиям, довольствуясь удовлетворением механическим условиям на поверхности $r = b$ интегрально.

Для определения компонентов напряженного состояния и перемещений используется обще-применяемая функция термо-упругого потенциала перемещения. Для удовлетворения краевым условиям используется функция Л а в а φ.

Кроме того рассматриваются случаи, когда $b \to \infty$. Обсуждаются граничные переходы в случае внезапного нагрева. Проводится дискуссия перехода к стационарным случаям и констатируется, что полученные результаты согласны с результатами, приведенными в работе [6].

Summary

THE STATE OF STRESS AND DISPLACEMENT IN A THICK CIRCULAR PLATE DUE TO A NONSTATIONARY TEMPERATURE FIELD

The object of this paper is to determine the state of stress and displacement in a thick circular plate with thickness $2h$ and diameter $2b$, due to a non-steady-state axially symmetric temperature field. The temperature is a known function of the time and the coordinates. Three cases are considered. In the first case, the temperature field is symmetric in relation to the plane $z = 0$. In the second case, the temperature field is determined by antisymmetric boundary conditions in relation to the plane $z = 0$. In the third, the temperature acts on the surface $z = h$ only.

We require that all the boundary conditions in the planes $z = \pm h$ be satisfied in an accurate manner, and the mechanical conditions on the surface $r = b$ in an integral manner.

To determine the stress and displacement components the familiar method of potential of thermoelastic displacement is used. In order to satisfy the boundary conditions, L o v e's function φ is introduced.

Besides the above, the limit cases for $b \to \infty$ are considered, and also the passage to the limit for the case of sudden heating. In the particular case of steady-state, it is found that the results are in agreement with those of Ref. [6].

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 grudnia 1958 r.