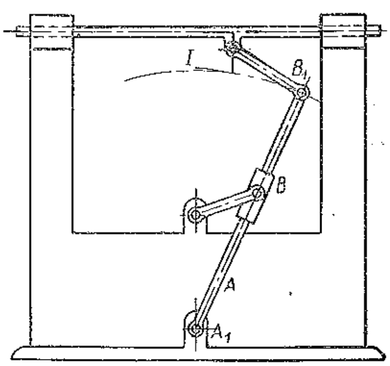
WŁADYSŁAW BOGUSZ

STATECZNOŚĆ RUCHU PEWNEGO MECHANIZMU PŁASKIEGO Z PARAMI POSTĘPOWYMI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXXVI

Do zakresu analizy dynamicznej mechanizmów wchodzi badanie stateczności dynamicznej przy uwzględnieniu sprężystości członów. Zwykle przyjmuje się, że czynnikami zaburzającymi ruch są zmienne obciążenia zewnętrzne lub drgania osnowy mechanizmu (członu nieruchomego). Wpływ tych dwóch czynników omówiony został w pracy [1].

W mechanizmach z parami postępowymi czynnikiem zaburzającym ruch może być prędkość przesuwania się względem siebie członów tworzących parę postępową. Reakcja występująca w parze przesuwa się po członie sprężystym z pewną okresowo zmienną prędkością i przy pewnych wartościach okresu tej prędkości może wywołać drgania mechanizmu.



Rys. 1

Celem pracy jest określenie krytycznych prędkości przesuwu, wywołujących drgania niezależnie od wartości reakcji.

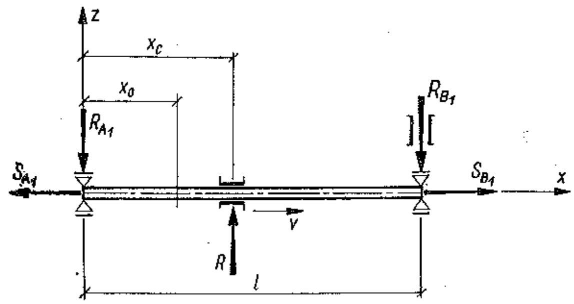
Bierzemy pod uwagę mechanizm płaski, w którym występuje para postępowa i zakładamy, że jeden z członów tworzących parę postępową jest sprężysty, inne zaś człony mechanizmu przyjmujemy za sztywne. W ten sposób zbadamy możliwości zaburzenia ruchu mechanizmu przez lokalne drgania członu sprężystego.

Dla przykładu rozważymy mechanizm przedstawiony na rys. 1. Człon A i człon B tworzą parę postępową. Końce członu A połączone są z innymi członami mechanizmu parami obrotowymi (przegubami). Człon B prowadzony jest po członie A innym członem (np. korbą), z którym tworzy parę obrotową.

Założymy, że pary obrotowe i para postępowa są gładkie oraz że człon A jest prętem o przebiegu stałym.

Zagadnienie rozwiążemy w oparciu o teorię drgań liniowych i z tego względu pominiemy drgania wzdłużne pręta, siły tarcia i ewentualne luzy w parach kinematycznych, [4].

Przypuśćmy, że w czasie pracy mechanizmu punkt B_1 ma poruszać się po krzywej I. Jeżeli w czasie ruchu powstaną drgania poprzeczne członu A, punkt B_1 zejdzie z krzywej I, a tym samym zostanie zakłócony ruch członów, z którymi połączony jest człon A.



Rys. 2

Rozważmy drgania poprzeczne członu A w zależności od prędkości przesuwu członu B.

Równanie drgań zapiszemy w układzie lokalnym, związanym z członem A. Wprowadzimy układ współrzędnych x, z tak, że oś x przechodzi przez punkty A_1 i B_1. Odrzucimy człony, z którymi połączony jest człon A, a ich oddziaływanie zastąpimy reakcjami (rys. 2) i ustalimy warunki brzegowe dla pręta $A_1 B_1$.

Ze względu na przyjęty układ współrzędnych ugięcie na końcach pręta wynosi zero, zaś w przegubach A_1 i B_1 moment zginający jest równy zeru. Warunki brzegowe można napisać w postaci:

$$(1) \qquad z(0,t)=0\,, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{x=0}=0\,; \qquad z(l,t)=0\,, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{x=l}=0\,.$$

Układ sił działających na pręt stanowią reakcje R_{A_1}, S_{A_1}, R_{B_1} i S_{B_1} pochodzące od przegubów, reakcja R na podporze przesuwnej pochodząca od przegubu B oraz siły bezwładności. Możemy przyjąć, że siły S_{A_1} i S_{B_1} o zwrotach przeciwnych są równe. Nierówność tych sił spowoduje ruch postępowy pręta wzdłuż osi x i ten ruch pominiemy. Wspólną wartość tych sił oznaczymy przez S.

Siła reakcji R jest zależna od czasu, położenia podpory przesuwnej oraz od ugięcia pręta. Ze względu na to, że ugięcie pręta w punkcie x_C jest funkcją czasu, położenie podpory jest również funkcją czasu, możemy przyjąć, że reakcja R jest funkcją złożoną z funkcji zależnych od czasu, czyli zależy tylko od czasu.

Siłę R zastąpimy obciążeniem $p(x,t)$ wzdłuż osi pręta i prostopadłym do osi pręta. Obciążenie $p(x,t)$ określimy wzorami:

$$(2) \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x < x_C - \dfrac{d}{2}, & p(x,t)=0\,; \\[2ex] x_C - \dfrac{d}{2} \leqslant x \leqslant x_C + \dfrac{d}{2}, & p(x,t)=\dfrac{R(t)}{d}\,; \\[2ex] x_C + \dfrac{d}{2} < x \leqslant l, & p(x,t)=0\,. \end{cases}$$

Przyjmujemy, że długość podpory d jest mała, zaś x_C jest określone wzorem

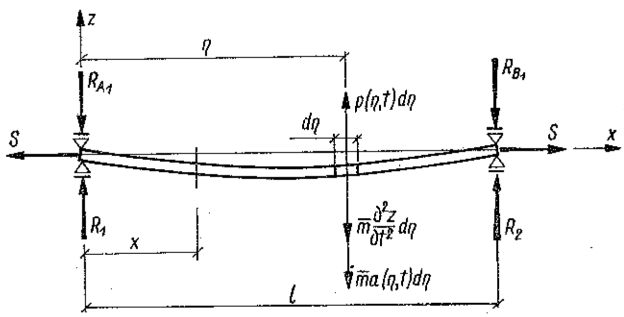
$$x_C = x_0 + \int_0^t v(s)\,ds\,, \tag{3}$$

gdzie v jest prędkością przesuwu podpory ruchomej.

Przypuśćmy, że pręt A pod działaniem sił przyłożonych odkształci się i oś pręta ugnie się według krzywej $z = \varphi(x)$. Warunki początkowe przyjmiemy w postaci następującej:

$$z(x, 0) = \varphi(x)\,, \qquad \left[\frac{\partial z}{\partial t}\right]_{t=0} = 0\,. \tag{4}$$

O $\varphi(x)$ założymy, że jest klasy C_4, tj. że jest ciągła i różniczkowalna aż do rzędu czwartego włącznie.



Rys. 3

Na dowolny element pręta (rys. 3) o długości $d\eta$ działają w kierunku prostopadłym do osi pręta siły o wartościach: $p(\eta, t)\,d\eta$ pochodzące od obciążenia p; siła bezwładności $\overline{m}(\partial^2 z/\partial t^2)\,d\eta$ w ruchu względnym elementu w układzie x, z; siła bezwładności $\overline{m}a(x, t)\,d\eta$ w ruchu względnym układu x, z względem układu nieruchomego. Przez $\overline{m}$ oznaczamy masę jednostki długości pręta.

Na podporach A_1 i B_1 występują reakcje R_1 i R_2. Siły działające na końcu pręta zależne są od czasu.

Moment zginający w dowolnym przekroju x pręta wynosi

$$M(x, t) = [-R_2(t) + R_{B_1}(t)]\,(l - x) + \int_x^l \left[-p(\eta, t) + \overline{m}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \right.$$
$$\left. + \overline{m}a(\eta, t)\right](n - x)\,d\eta - S(t)\,z(x, t)\,. \tag{5}$$

Różniczkując dwukrotnie względem x otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -p(x, t) + \overline{m}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \overline{m}a(x, t) - S(t)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Równanie linii ugięcia przyjmujemy w postaci

$$EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -M(x,t), \tag{7}$$

gdzie EI jest sztywnością na zginanie.

Po zróżniczkowaniu (7) względem x i wstawieniu (6) otrzymamy równanie drgań:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\overline{m}}{EI}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{S(t)}{EI}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{EI}[p(x,t) - \overline{m}a(x,t)] = F(x,t) - F_1(x,t). \tag{8}$$

Równanie (8) należy rozwiązać przy warunkach brzegowych (1) i początkowych (4).

Rozwiązania szukamy w postaci

$$z(x,t) = z_1(x,t) + z_2(x,t), \tag{9}$$

gdzie z_1 jest rozwiązaniem równania jednorodnego (8) przy warunkach brzegowych (1) i początkowych (4), zaś z_2 rozwiązaniem równania niejednorodnego przy warunkach brzegowych (1) i zerowych warunkach początkowych.

Rozwiązania równania jednorodnego szukamy w postaci

$$z_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l} x T_n(t). \tag{10}$$

Równanie jednorodne ma postać

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + c^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - P(t)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad c^2 = \frac{\overline{m}}{EI}, \quad P(t) = \frac{S(t)}{EI}. \tag{11}$$

Funkcja (10) spełnia warunki brzegowe (1), zaś warunki początkowe (4) będą spełnione, jeżeli

$$T_n(0) = 1, \quad \left[\frac{dT_n}{dt}\right]_{t=0} = 0, \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l} x, \tag{12}$$

gdzie współczynniki A_n wyrażają się wzorem

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l} s\, ds. \tag{13}$$

Po wstawieniu (10) do (11) otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne na funkcje $T_n(t)$:

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + \left(\frac{n\pi}{lc}\right)^2\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + P(t)\right]T_n = 0. \tag{14}$$

Równanie (14) jest równaniem Hilla. Funkcja $S(t)$ określa siłę działającą osiowo na pręt A. Można ją wyznaczyć przeprowadzając analizę dynamiczną mechanizmu; przyjmujemy $S(t)$, a zatem i $P(t)$ za funkcję znaną. Jest to funkcja okresowa i można ją po pominięciu wyższych harmonicznych przedstawić w postaci

$$S(t) = S_0 - S_1 \cos \beta t\,, \qquad S_0^* = S_0 + S_1\,, \tag{15}$$

gdzie S_0^* jest maksymalną siłą działającą na pręt A, zaś $2\pi/\beta$ jej okresem.

Po wstawieniu (15) do (14) otrzymamy równanie Mathieu, które jest wszechstronnie opracowane, jeśli idzie o warunki okresowości rozwiązań. Ze względu na to, że celem pracy jest zbadanie wpływu prędkości przesuwu na drgania poprzeczne, pominiemy dyskusję dotyczącą funkcji $S(t)$ i przyjmiemy, że mechanizm został zaprojektowany w sposób zapewniający stateczność ruchu ze względu na reakcję w przegubach i okresowość rozwiązań równania (14).

Z równania (14) wyznaczamy funkcję $T_n(t)$ okresową, spełniającą warunki (12).

Rozwiązania niejednorodnego (8) szukamy w postaci szeregu

$$z_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x\,. \tag{16}$$

Funkcja (16) spełnia warunki brzegowe (1), zaś odnośnie zerowych warunków początkowych nieznane funkcje y_n muszą spełniać warunki następujące:

$$y_n(0) = 0\,, \qquad \left[\frac{dy_n}{dt}\right]_{t=0} = 0\,. \tag{17}$$

Funkcje występujące po prawej stronie równania (8) rozwijamy na szeregi:

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x\,, \qquad F_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x\,, \tag{18}$$

gdzie

$$B_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(s,t) \sin \frac{n\pi}{l} s ds\,, \qquad C_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F_1(s,t) \sin \frac{n\pi}{l} s ds\,.$$

Po wstawieniu (18) i (16) do równania (8) otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne dla wyznaczenia y_n:

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} + \left(\frac{n\pi}{lc}\right)^2 \left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + P(t)\right] y_n = B_n(t) - C_n(t)\,. \tag{19}$$

Jest to równanie niejednorodne Hilla.

Współczynniki B_n na podstawie (2) i (3) można przedstawić wzorem:

$$B_n(t) = \frac{4R(t)\sin\frac{n\pi d}{2l}}{n\pi d EI} \sin\frac{n\pi}{l}\left(x_0 + \int_0^t v du\right). \tag{20}$$

Funkcje C_n są znane i można je obliczyć znając przyśpieszenie dowolnego punktu członu sztywnego. Przyjmiemy jak poprzednio, że mechanizm został zaprojektowany tak, że funkcje $P(t)$ i $C_n(t)$ zapewniają warunki stateczności rozwiązań równania (19). Należy zbadać wpływ funkcji $B_n(t)$ na stateczność rozwiązań równania (19).

Po wstawieniu do (19) zamiast $P(t)$ wzoru

$$P(t) = \frac{1}{EI}(S_0 - S_1 \cos\beta t)$$

otrzymamy równanie o współczynnikach okresowych i można stosować zasadę superpozycji.

Weźmiemy pod uwagę równanie

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} + \left(\frac{n\pi}{lc}\right)^2 \left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + S_0 - S_1 \cos\beta t\right] = D_n \sin\frac{n\pi}{l}\left(x_0 + \int_0^t v du\right) R(t), \tag{21}$$

gdzie

$$D_n = \frac{4\sin\frac{n\pi d}{2l}}{n\pi d c^2 EI}.$$

Przy przejściu granicznym $d \to 0$ współczynniki D_n przyjmują wartość $D = 2/lc^2EI$.

Po prawej stronie równania (21) występują funkcje zawierające prędkość v i reakcję $R(t)$. Prędkość v jest funkcją okresową i złożenie funkcji okresowej z funkcją sinus daje również funkcję okresową o okresie v. Reakcja R na podporze przesuwnej jest funkcją okresową i może posiadać okres różny od okresu funkcji v. Okresy te są współmierne i przez pomnożenie funkcji okresowych o okresach współmiernych otrzymamy funkcję okresową. Oznaczymy okres funkcji po prawej stronie równania (21) przez T.

W równaniu (21) wprowadzimy zmianę zmiennej:

$$t = \frac{2\tau}{\beta}. \tag{22}$$

Po zmianie zmiennej otrzymamy równanie

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{EI}\left(\frac{n\pi}{lc}\right)^2 \left[EI\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + S_0 - S_1 \sin 2\tau\right] y_n = \tag{23}$$

$$= D_n \sin\frac{n\pi}{l}\left(x_0 + \frac{\beta}{2}\int_0^{\frac{2\tau}{\beta}} v du\right) R\left(\frac{2\tau}{\beta}\right).$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(24)\qquad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{2n\pi}{lc\beta}\right)^2\left[EI\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 + S_0\right], & q_n = \dfrac{1}{2EI}\left(\dfrac{2n\pi}{lc\beta}\right)^2 S_1, \\ f_n(\tau) = \dfrac{4D}{\beta^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}\left(x_0 + \dfrac{\beta}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{2\tau}{\beta}} v du\right)R\left(\dfrac{2\tau}{\beta}\right). \end{cases}$$

Przy oznaczeniach (24) równanie (23) ma postać

$$(25)\qquad \frac{d^2 y_n}{d\tau^2} + y_n(a_n - 2q_n\cos 2\tau) = f_n(\tau).$$

Z uwagi na to, że S_0 nie może przekroczyć siły krytycznej osiowo działającej, współczynniki a_n są dodatnie i większe od 1.

Warunek istnienia okresowych rozwiązań równania (25) jest następujący:

$$(26)\qquad -1 < \mu < 1,$$

gdzie μ określa wzór

$$(27)\qquad \cos i\pi\mu = \operatorname{ch}\pi\mu = \cos\pi\sqrt{a_n} + \frac{\pi q_n^2 \sin\pi\sqrt{a_n}}{4\sqrt{a_n}(a_n-1)}, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Warunek rezonansu można napisać w postaci:

$$(28)\qquad 2ji + \frac{2\pi}{T_1}i \pm \mu = 0 \qquad (j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Symbol T_1 oznacza okres funkcji $f_n(\tau)$ i $T_1 = T\beta/2$.

Oznaczymy częstość krytyczną prędkości przesuwu $\omega^{(k)} = 2\pi/T$.

Z warunku (28) otrzymamy wartości krytyczne:

$$(29)\qquad \omega_j^{(k)} = \frac{\beta}{2}(\pm i\mu - 2j).$$

Jeżeli S_1 jest małe, tj. reakcja działająca na pręt zmienia się niewiele od swej wartości statycznej, wówczas równanie (25) jest równaniem o współczynnikach stałych i częstość krytyczną wyrazimy wzorem

$$(30)\qquad \omega_n^{(k)} = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{1}{m}\left[EI\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + S_0\right]} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Wzór (30) pokrywa się z wynikiem, jaki otrzymamy, gdy do (27) podstawimy $q_n = 0$ i obliczone μ wstawimy do (29), w którym zamiast j podstawiono zero. W szczególnym przypadku, gdy członem prowadzącym parę postępową jest korba, wzór (29) określa prędkość krytyczną korby.

Literatura cytowana w tekście

[1] А. Е. Кобринский, *Некоторые вопросы динамики механизмов,* Труды Сем. Теории Маш. и Мех., Moskwa 1952.

[2] A. Whitaker, *Modern Analysis,* Londyn 1948.

[3] Н. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения,* Moskwa 1952.

[4] В. В. Болотин, *О поперечных колебаниях стержней, вызываемых периодическими продольными силами,* Moskwa 1956.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ДАННОГО ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА С ПОСТУПАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМИ

Обсуждается вопрос критической скорости передвижения членов в поступательных парах. Автор обсуждает плоский механизм с одной поступательной парой и решает вопрос местных возмущений движения механизма, вызванных поперечными колебаниями упругого члена, составляющего поступательную пару с другим членом. Вопрос сводится к решению неоднородного уравнения типа Матэу.

В результате решения этого уравнения получаются критические значения для периода скорости передвижения.

Summary

STABILITY OF MOTION OF PLANE MECHANISMS WITH SLIDING JUNCTIONS

The problem discussed is that of critical velocity of elements in sliding junctions. The author discusses a plane mechanism with one sliding junction, and solves the problem of local disturbances of the motion by transversal vibration of the elastic element constituting the sliding junction with another element. The problem is reduced to the solution of a non-homogeneous equation of the Muthieu type.

As a result, critical values for the period of sliding velocity are obtained.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 października 1958 r.