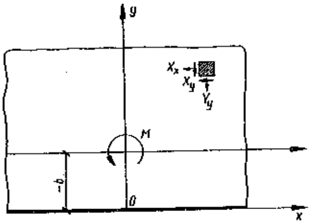
FRANCISZEK SZELĄGOWSKI

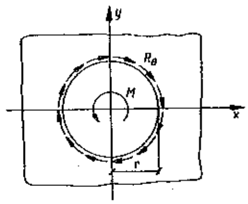
DZIAŁANIE MOMENTU SKUPIONEGO NA TARCZĘ KSZTAŁTU PÓŁPŁASZCZYZNY

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXXXVII

W dowolnym punkcie tarczy kształtu półpłaszczyzny (rys. 1) działa moment skupiony M. Odpowiednie wartości naprężeń X_y, X_x i Y_y można wyznaczyć na podstawie prawa niezależności działania sił i odkształceń jako sumę naprężeń panujących w tarczy nieograniczonej oraz naprężeń powstałych wskutek oswobodzenia brzegu półpłaszczyzny.



Rys. 1



Rys. 2

W przypadku tarczy nieograniczonej (rys. 2) wartość naprężenia R_Θ panującego w dowolnym punkcie okręgu koła o promieniu r wynosi

$$R_\Theta = \frac{M}{2\pi r^2}.$$

Odpowiadające temu stanowi obciążenia funkcje $\Phi(z)$ i $F(z)$ można będzie określić z następującego wzoru, [1]:

$$R_\Theta + iR_r = \frac{1}{2}\left[2R_\Theta + i\left(R_r - \Theta_\Theta\right)\right] + \frac{i}{2}\left(R_r + \Theta_\Theta\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{i}{2} z\Phi'(z) + \frac{z^2}{r^2} F(z)\right] + \frac{i}{4}\left[\Phi(z) + \Phi_1(z_1)\right] = \frac{M}{2\pi r^2}.$$

Z tego wzoru widać, że wartości wymienionych funkcji wynoszą

$$\Phi(z) = \Phi_1(z_1) = 0\,, \qquad F(z) = \frac{M}{\pi}\,\frac{1}{z^2}.$$

Na dowolnej prostej równoległej do osi x tarczy nieograniczonej będą panowały naprężenia X_y i Y_y określone następującym wzorem:

$$2\left(Y_y + iX_y\right) = i\left[2X_y + i\left(X_x - Y_y\right)\right] + X_x + Y_y =$$

$$= i\left[-\frac{i}{2} z_1 \Phi'(z) + F(z)\right] + \frac{1}{2}\left[\Phi(z) + \Phi_1(z_1)\right] = i\,\frac{M}{\pi}\,\frac{1}{z^2}.$$

Po przeniesieniu początku układu współrzędnych do punktu $(0, -b)$ wartości naprężeń X_y i Y_y panujących na osi x, będą określone wzorem

$$2(Y_y + iX_y) = i\frac{M}{\pi}\,\frac{1}{(z-ib)^2}. \tag{1}$$

Oswobodzenie brzegu półpłaszczyzny nastąpi z chwilą przyłożenia do niego naprężeń X_y i Y_y ze znakiem przeciwnym.

Lecz naprężenia odpowiadające temu stanowi obciążenia tarczy kształtu półpłaszczyzny można określić po uprzednim wyznaczeniu odnośnych funkcji $\Phi(z)$ i $F(z)$.

Zgodnie z pracą [2] funkcję $\Phi(z)$ określa wzór następujący:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(Y_y - iX_y)\frac{dt}{t-z} + C, \tag{2}$$

w którym wyraz $2(Y_y - iX_y)$ można będzie określić ze wzoru (1) zmieniając w nim i na $-i$ oraz zmieniając znak na przeciwny. Ponadto z uwagi na konieczność otrzymania ciągłych wartości naprężeń należy jeszcze wykonać przekształcenie $z = z_1$.

Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymujemy ze wzoru (2)

$$\Phi(z) = i\frac{2M}{\pi}\,\frac{1}{(z+ib)^2} + C. \tag{3}$$

Następnie wartość funkcji $F(z)$ również zgodnie z pracą [2] określa wzór następujący:

$$F(z) = \frac{1}{2i}\left[\frac{2}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(Y_y + iX_y)\frac{dt}{t-z} - z\Phi'(z) - \Phi(z)\right], \tag{4}$$

przy czym wyraz $2(Y_y + iX_y)$ znajdujący się pod znakiem całki można będzie określić ze wzoru (1) zmieniając znak na przeciwny oraz czyniąc przekształcenie $z = z_1$, a to z uwagi na konieczność otrzymania ciągłych wartości odnośnych naprężeń.

Po wykonaniu działań ze wzoru (4) otrzymujemy

$$F(z) = \frac{1}{2i}\left[-z\Phi'(z) - \Phi(z)\right] + C_1.$$

Po uwzględnieniu w powyższym wzorze zależności (3) będziemy mieli

$$F(z) = \frac{M}{\pi}\left[\frac{2z}{(z+ib)^3} - \frac{1}{(z+ib)^2}\right] + C_2.$$

Co się tyczy wartości stałych C i C_2, to z uwagi na tę okoliczność, że dla punktów tarczy położonych w nieskończoności wartości naprężeń powinny być równe zeru, otrzymujemy warunek $C = C_2 = 0$.

Wobec powyższego funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ odpowiadające tarczy kształtu półpłaszczyzny obciążonej momentem skupionym M wynoszą:

$$\Phi(z) = i\frac{2M}{\pi}\frac{1}{(z+ib)^2},$$

$$\Phi_1(z_1) = -i\frac{2M}{\pi}\frac{1}{(z_1-ib)^2},$$

$$F(z) = \frac{M}{\pi}\left[\frac{1}{(z-ib)^2} - \frac{1}{(z+ib)^2} + \frac{2z}{(z+ib)^3}\right].$$

Odnośne wartości naprężeń X_y, X_x i Y_y, panujących w dowolnym punkcie tarczy kształtu półpłaszczyzny, określają wzory następujące:

$$X_x + Y_y = \frac{1}{2}\left[\Phi(z) + \Phi_1(z_1)\right] = \frac{1}{2}i\frac{2M}{\pi}\left[\frac{1}{(z+ib)^2} - \frac{1}{(z_1-ib)^2}\right],$$

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2}z_1\Phi'(z) + F(z) = \frac{i}{2}z_1 i\frac{2M}{\pi}2\frac{1}{(z+ib)^3} +$$

$$+\frac{M}{\pi}\left[\frac{1}{(z-ib)^2} - \frac{1}{(z+ib)^2} + \frac{2z}{(z+ib)^3}\right].$$

Z powyższych wzorów otrzymujemy

$$X_y = \frac{M}{2\pi}\left\{\frac{4y(y+b)\left[3x^2-(y+b)^2\right]}{\left[x^2+(y+b)^2\right]^3} + \frac{x^2-(y-b)^2}{\left[x^2+(y-b)^2\right]^2} - \frac{x^2-(y+b)^2}{\left[x^2+(y+b)^2\right]^2}\right\},$$

$$X_x = \frac{M}{\pi}x\left\{2y\frac{x^2-3(y+b)^2}{\left[x^2+(y+b)^2\right]^3} - \frac{y-b}{\left[x^2+(y-b)^2\right]^2} + \frac{3(y+b)}{\left[x^2+(y+b)^2\right]^2}\right\},$$

$$Y_y = \frac{M}{\pi}x\left\{\frac{y+b}{\left[x^2+(y+b)^2\right]^2} + \frac{y-b}{\left[x^2+(y-b)^2\right]^2} - 2y\frac{x^2-3(y+b)^2}{\left[x^2+(y+b)^2\right]^3}\right\}.$$

Tutaj można zauważyć, że dla $y = 0$, a więc na brzegu półpłaszczyzny, wartości naprężeń X_y i Y_y są równe zeru, co jest zgodne z rzeczywistością. Również dla punktów położonych w nieskończoności wartości naprężeń X_y, X_x i Y_y są równe zeru.

Natomiast dla $x = 0$ i $y = b$ wartości naprężeń X_y, X_x i Y_y są nieskończenie wielkie, a to wskutek działania w tym punkcie momentu skupionego.

Zatem w bezpośredniej bliskości tego punktu będą miały miejsce odkształcenia niesprężyste. Jednakże w pewnym oddaleniu od tego punktu naprężenia będą określone ściśle wzorami wyżej wyprowadzonymi.

Literatura cytowana w tekście

[1] G. W. Kolosov, *Application of the Complex Variable to the Theory of Elasticity* (in Russian), Moskwa 1935.

[2] F. Szelągowski, *Tarcza wyznaczona półpłaszczyzną pod wpływem działania obciążenia wewnętrznego*, Rozpr. Inżyn., 1959.

Резюме

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОГО МОМЕНТА НА ПЛАСТИНКУ В ФОРМЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Выводятся формулы, определяющие значения напряжений X_y, X_x, Y_y, существующих в любой точке пластинки в форме полуплоскости под влиянием сосредоточенного момента.

Summary

A SEMI-INFINITE PLATE ACTED ON BY A CONCENTRATED MOMENT

Equations are derived for the determination of stresses X_y, X_x, Y_y at any point of a semi-infinite plate subjected to the action of a concentrated moment.

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 maja 1959 r.