WŁODZIMIERZ DERSKI

STAN NAPRĘŻENIA W CIENKIEJ TARCZY KOŁOWEJ, WYWOŁANY DZIAŁANIEM NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XCIX

SPIS TREŚCI

1. Wstęp

Poddajmy cienką tarczę kołową działaniu osiowo-symetrycznego nieustalonego pola temperatury, które powstaje w wyniku nagłego przyłożenia źródła ciepła na brzegu tarczy. Pole to charakteryzuje się jeszcze tym, że na obu powierzchniach tarczy $\pm\delta/2$ (gdzie δ oznacza grubość tarczy) może zachodzić wymiana ciepła z otoczeniem.

Działanie źródła jest tego rodzaju, że wraz z czasem dążącym do nieskończoności rozkład temperatury dąży do rozkładu stacjonarnego. Gdy naprężenia wyznaczone są w przypadku najogólniejszym, to przyjęcie, że czas $t\to\infty$, pozwala natychmiast znaleźć stan naprężenia dla przypadku ustalonego pola temperatury.

Założenie, że wymiana ciepła na powierzchniach tarczy równa jest zeru, może odpowiadać przypadkowi tarczy z izolacją na powierzchniach $\pm\delta/2$ lub nieskończonemu walcowi, gdy warunki brzegowe nie zależą od długości. Naprężenia odpowiadające temu przypadkowi otrzymuje się w wyniku przejścia granicznego, gdy współczynnik określający wymianę ciepła na powierzchniach $\pm\delta/2$ dąży do zera.

Otrzymane w pracy zależności w wyniku przejścia granicznego $t\to\infty$ pokrywają się z wynikami podanymi w monografii E. Melana i H. Parkusa, [5].

Naprężenia wyznaczone są za pomocą potencjału termosprężystego przemieszczenia. Nie spełniają one sformułowanych warunków brzegowych. Aby warunki te spełnić, trzeba rozwiązać drugie zagadnienie i dokonać superpozycji obu rozwiązań.

2. Rozkład temperatury

Ponieważ rozpatrywać będziemy tarczę kołową, więc wygodnie będzie posłużyć się współrzędnymi biegunowymi. Przyjmujemy, że temperatura zależy jedynie od funkcji czasu i promienia. Wymiana ciepła na obu powierzchniach $\pm\delta/2$ określona jest współczynnikiem h. Przy takich założeniach równanie przewodnictwa ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)-hT, \tag{2.1}$$

gdzie T jest funkcją temperatury, t czasem, $\varkappa$ współczynnikiem przewodnictwa cieplnego oraz r promieniem. Równanie to rozwiążemy przy warunku początkowym

$$T(r, 0) = 0 \tag{2.2}$$

i warunku brzegowym

$$a_1 \frac{\partial T}{\partial r} + a_2 T = a_3, \tag{2.3}$$

gdy $r = b$. W równaniu tym a_1, a_2 i a_3 są stałymi zależnymi od charakteru warunków brzegowych, b promieniem ograniczającym tarczę.

Równanie (2.1) można łatwo rozwiązać posługując się transformacją Laplace'a. Przykłady zastosowań transformacji Laplace'a w przypadku równań przewodnictwa cieplnego można znaleźć w licznych monografiach, np. [6].

Transformatę funkcji temperatury określimy symbolem

$$\widetilde{T} = \int_0^\infty e^{-pt} T dt. \tag{2.4}$$

Transformatę równania (2.1) po wykorzystaniu warunku (2.2) napisać można w postaci:

$$\frac{d^2 \widetilde{T}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\widetilde{T}}{dr} - q^2 \widetilde{T} = 0, \tag{2.5}$$

gdzie

$$q^2 = \frac{p + h}{\varkappa}.$$

Rozwiązanie równania (2.5) jest znane i, jak wiadomo, wyraża się sumą zmodyfikowanych funkcji Bessela pierwszego i drugiego rodzaju:

$$\widetilde{T} = A I_0(qr) + B K_0(qr). \tag{2.6}$$

Ponieważ dla $r = 0$ temperatura musi mieć wartość skończoną, to rozwiązanie (2.6) trzeba przyjąć w postaci

$$\widetilde{T} = A I_0(qr). \tag{2.7}$$

Stała A musi być tak dobrana, aby rozwiązanie (2.7) spełniało warunek brzegowy (2.3), który po dokonaniu transformacji przyjmuje postać

$$a_1 \frac{d\widetilde{T}}{dr} + a_2 \widetilde{T} = \frac{a_3}{p} \tag{2.8}$$

przy $r = b$.

Po podstawieniu (2.7) do (2.8) i wyznaczeniu stałej A znajdujemy

$$\widetilde{T} = \frac{a_3 I_0(qr)}{p\,[a_1 q I_1(qb) + a_2 I_0(qb)]}. \tag{2.9}$$

Transformacja odwrotna, jak wiadomo, określona jest całką

$$T = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt}\,\widetilde{T}\,dp. \tag{2.10}$$

Całkować będziemy przez residua. Funkcja podcałkowa (2.9) jest jednoznaczną funkcją zmiennej p. Mianownik tej funkcji ma miejsca zerowe w punktach $p=0$ oraz $p=-(\varkappa\alpha_n^2+h)$. Punkty te są biegunami funkcji podcałkowej. Liczby α_n są pierwiastkami równania

$$a_1 \alpha J_1(\alpha b) - a_2 J_0(\alpha b) = 0. \tag{2.11}$$

Równanie (2.11) otrzymuje się przez przyrównanie do zera mianownika (2.9), przy czym

$$I_n(ze^{\pm\pi i/2}) = e^{\pm n\pi i/2} J_n(z). \tag{2.12}$$

Dla $p=0$ mamy $q=\sqrt{h/\varkappa}=m$. Przyjmując to oznaczenie możemy napisać residuum w biegunie $p=0$:

$$\frac{a_3 I_0(mr)}{a_1 m I_1(mb) + a_2 I_0(mb)}. \tag{2.13}$$

Aby znaleźć residua w pozostałych punktach, trzeba wykonać przekształcenie

$$\left\{p\frac{d}{dp}[a_1 q I_1(qb) + a_2 I_0(qb)]\right\}_{p=-(\varkappa\alpha_n^2+h)} = \tag{2.14}$$

$$= \left\{\frac{\varkappa q^2 - h}{2\varkappa q}\,\frac{d}{dq}[a_1 q I_1(qb) + a_2 I_0(qb)]\right\}_{q=i\alpha_n} =$$

$$= -b\,\frac{\varkappa\alpha_n^2+h}{2\varkappa\alpha_n}\,[a_1 J_0(\alpha_n b) + a_2 J_1(\alpha_n b)].$$

Na podstawie (2.13) i (2.14) znajdujemy, że temperatura określona jest wzorem

$$T = \eta(t)\left[\frac{a_3 I_0(mr)}{a_1 m I_1(mb) + a_2 I_0(mb)} - \right. \tag{2.15}$$

$$\left. - \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\varkappa\alpha_n^2+h)t}\,\frac{\varkappa\alpha_n}{\varkappa\alpha_n^2+h}\,\frac{a_3 J_0(\alpha_n r)}{a_1 J_0(\alpha_n b) + a_2 J_1(\alpha_n b)}\right].$$

Dobór odpowiednich wartości stałych wchodzących do równania (2.15) pozwala otrzymać kilka przypadków szczególnych. Przyjęcie $h=0$, $a_1=0$, $a_2=1$ i $a_3=T_0$ daje wzór na rozkład temperatury w cienkiej tarczy z izolacją na powierzchniach $\pm\delta/2$ przy nagłym ogrzaniu do temperatury T_0

na brzegu $r=b$ lub w nieskończenie długim walcu ogrzanym nagle do temperatury T_0 na brzegu $r=b$. Ponieważ

$$\lim_{m\to 0} I_0(mr)=1, \qquad \lim_{m\to 0} I_1(mr)=0,$$

przeto wzór (2.15) można napisać w postaci

$$T=\eta(t)\left[1-\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\frac{J_0(\alpha_n r)}{\alpha_n J_1(\alpha_n b)}\right]T_0. \tag{2.16}$$

Wzór (2.16) jest powszechnie znany (por. np. [6]). We wzorach (2.15) oraz (2.16) $\eta(t)$ oznacza funkcję Heaviside'a.

3. Potencjał termo-sprężystego przemieszczenia

Do wyznaczenia składowych stanu naprężenia posługujemy się potencjałem termo-sprężystego przemieszczenia. Wiadomo, że za pomocą funkcji potencjału układ trzech równań przemieszczeniowych Lamégo można doprowadzić do jednego równania, [5],

$$\nabla^2\Phi=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t T, \tag{3.1}$$

gdzie ν jest współczynnikiem Poissona, a α_t współczynnikiem cieplnej rozszerzalności liniowej.

W przypadku płaskiego stanu naprężenia wzór (3.1) przyjmuje postać

$$\nabla^2\Psi=(1+\nu)\alpha_t T. \tag{3.2}$$

Ponieważ w naszym zagadnieniu pole temperatury jest osiowo-symetryczne, to naprężenia tnące $\sigma_{r\varphi}$ są równe zeru. Pozostałe naprężenia wyrażają się przez potencjał za pomocą następujących związków, [5]:

$$\bar{\sigma}_{rr}=-2G\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \qquad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}=-2G\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}. \tag{3.3}$$

Aby wyznaczyć te naprężenia, wystarczy znać dowolną całkę równania (3.2). Przy jego całkowaniu można skorzystać z uproszczenia, na jakie pozwala budowa wzoru na temperaturę (2.15). Temperatura daje się przedstawić w postaci sumy

$$T=f_1(r)+f_2(r,t).$$

Z tego względu potencjał może być poszukiwany także w postaci sumy

$$\Psi=\Psi_1(r)+\Psi_2(r,t).$$

Funkcja $f_1(r)$ spełnia równanie $\varkappa\nabla^2 T-hT=0$. Ponieważ $\nabla^2 T=(h/\varkappa)T$, to pierwszą część potencjału korzystając ze wzoru (2.15) można napisać, [5],

$$\Psi_1(r)=(1+\nu)\alpha_t\left\{\frac{a_3 I_0(mr)}{m^2[a_1 mI_1(mb)+a_2 I_0(mb)]}\right\}. \tag{3.4}$$

Drugą część potencjału trzeba wyznaczyć drogą dwukrotnego całkowania.

Korzystając ze wzoru (3.2) oraz (2.15) napiszemy

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}\right)=(1+\nu)\,\alpha_t\, f_2(r,t).$$

Po wykonaniu całkowania i dodaniu (3.4) znajdujemy potencjał

$$\Psi=(1+\nu)\,\alpha_t\, a_3\,\eta(t)\left\{\frac{I_0(mr)}{m^2\,[a_1 mI_1(mb)+a_2 I_0(mb)]}-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\varkappa\alpha_n^2+h)\,t}\,\frac{\varkappa}{(\varkappa\alpha_n^2+h)\,\alpha_n}\,\frac{J_0(\alpha_n r)}{a_1 J_0(\alpha_n b)+a_2 J_1(\alpha_n b)}\right\}. \tag{3.5}$$

Naprężenia określone przez potencjał (3.5) w ogólności nie spełnią naszych warunków brzegowych. Aby je spełnić, przykłada się na brzegu odpowiednie obciążenie. Wartość tego obciążenia musi być taka, aby po dodaniu do naprężeń na brzegu (3.3) spełnione były sformułowane warunki brzegowe. Naprężenia wywołane tym nowym obciążeniem oznaczymy przez $\overline{\overline{\sigma}}_{rr}$ oraz $\overline{\overline{\sigma}}_{\varphi\varphi}$ i wyznaczymy za pomocą funkcji Airy'ego F spełniającej, jak wiadomo, równanie biharmoniczne

$$\nabla^2\nabla^2 F=0. \tag{3.6}$$

Naprężenia będące poszukiwanym rozwiązaniem wyrażają się sumą

$$\sigma_{rr}=\overline{\sigma}_{rr}+\overline{\overline{\sigma}}_{rr},\qquad \sigma_{\varphi\varphi}=\overline{\sigma}_{\varphi\varphi}+\overline{\overline{\sigma}}_{\varphi\varphi}. \tag{3.7}$$

4. Stan naprężenia

Zgodnie ze wzorami (3.3) naprężenia wyrażone przez potencjał można zapisać w postaci

$$\left\{\begin{aligned}\overline{\sigma}_{rr}&=-\frac{E\alpha_t a_3}{r}\,\eta(t)\left\{\frac{I_1(mr)}{m\,[a_1 mI_1(mb)+a_2 I_0(mb)]}-\right.\\ &\qquad\left.-\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\varkappa\alpha_n^2+h)\,t}\,\frac{\varkappa}{\varkappa\alpha_n^2+h}\,\frac{J_1(\alpha_n r)}{a_1 J_0(\alpha_n b)+a_2 J_1(\alpha_n b)}\right\},\\ \overline{\sigma}_{\varphi\varphi}&=-E\alpha_t a_3\,\eta(t)\left[\frac{I_0(mr)}{a_1 mI_1(mb)+a_2 I_0(mb)}-\right.\\ &\qquad\left.-\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\varkappa\alpha_n^2+h)\,t}\,\frac{\varkappa\alpha_n}{\varkappa\alpha_n^2+h}\,\frac{J_0(\alpha_n r)}{a_1 J_0(\alpha_n b)+a_2 J_1(\alpha_n b)}\right]-\overline{\sigma}_{rr}.\end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

Przyjmujemy, że brzeg jest swobodny, więc naprężenia dla $r = b$ muszą być równe zeru, $\sigma_{rr}(b, t) = 0$. Aby warunek ten spełnić, trzeba na brzegu $r = b$ przyłożyć obciążenie

$$p_r = -\bar{\sigma}_{rr}(b,t) = \eta(t)\frac{E\alpha_t a_3}{b}\left\{\frac{I_1(mb)}{m\left[a_1 m I_1(mb) + a_2 I_0(mb)\right]} - \right.$$
$$\left. -\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\varkappa\alpha_n^2+h)t}\frac{\varkappa}{\varkappa\alpha_n^2 + h}\,\frac{J_1(\alpha_n b)}{a_1 J_0(\alpha_n b) + a_2 J_1(\alpha_n b)}\right\}. \tag{4.2}$$

Przypadek takiego obciążenia tarczy kołowej jest szczegółowo omawiany w monografii M. T. H u b e r a, [2]. Naprężenia odpowiadające obciążeniu (4.2) są równe

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \eta(t)\frac{E\alpha_t a_3}{b}\left\{\frac{I_1(mb)}{m\left[a_1 m I_1(mb) + a_2 I_0(mb)\right]} - \right.$$
$$\left. -\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\varkappa\alpha_n^2+h)t}\frac{\varkappa}{\varkappa\alpha_n^2 + h}\,\frac{J_1(\alpha_n b)}{a_1 J_0(\alpha_n b) + a_2 J_1(\alpha_n b)}\right\}. \tag{4.3}$$

Ostatecznie na podstawie wzorów (3.7) znajdujemy stan naprężenia określony wzorami

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \bar{\sigma}_{rr} + \bar{\bar{\sigma}}_{rr} = -\eta(t)\frac{E\alpha_t a_3}{m\left[a_1 m I_1(mb) + a_2 I_0(mb)\right]}\left[\frac{I_1(mr)}{r} - \frac{I_1(mb)}{b}\right] + \\
&\quad + \eta(t)\frac{E\alpha_t a_3}{rb}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\varkappa\alpha_n^2+h)t}\frac{\varkappa}{(\varkappa\alpha_n^2 + h)\left[a_1 J_0(\alpha_n b) + a_2 J_1(\alpha_n b)\right]}\times \\
&\quad \times\left[J_1(\alpha_n r) - \frac{r}{b} J_1(\alpha_n b)\right], \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} + \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = -\eta(t)\frac{E\alpha_t a_3}{m\left[a_1 m I_1(mb) + a_2 I_0(mb)\right]}\times \\
&\quad \times\left[I_0(mr)\,m - \frac{I_1(mr)}{r} - \frac{I_1(mb)}{b}\right] + \\
&\quad + \eta(t)\frac{E\alpha_t a_3}{b}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\varkappa\alpha_n^2+h)t}\frac{\varkappa}{(\varkappa\alpha_n^2 + h)\left[a_1 J_0(\alpha_n b) + a_2 J_1(\alpha_n b)\right]}\times \\
&\quad \times\left[\alpha_n J_0(\alpha_n r) - \frac{J_1(\alpha_n r)}{r} - \frac{J_1(\alpha_n b)}{b}\right].
\end{aligned}\right. \tag{4.4}$$

Z zależności (4.4) otrzymuje się kilka przypadków szczególnych.

Jeżeli przyjmiemy, że $t \to \infty$, to w granicy otrzymujemy stan naprężenia odpowiadający ustalonemu polu temperatury

$$
(4.5) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = -\dfrac{E\alpha_t a_3}{m\,[a_1 m I_1(mb) + a_2 I_0(mb)]}\left[\dfrac{I_1(mr)}{r} - \dfrac{I_1(mb)}{b}\right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\dfrac{E\alpha_t a_3}{a_1 m I_1(mb) + a_2 I_0(mb)}\left[I_0(mr) - \dfrac{I_1(mr)}{mr} - \dfrac{I_1(mb)}{mb}\right]. \end{cases}
$$

Przyjęcie zaś termicznego warunku brzegowego $T = T_0$ przy $r = b$, co odpowiada wartościom stałych $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ i $a_3 = T_0$, daje rozwiązanie, które pokrywa się ze stanem naprężenia podanym przez E. Melana i H. Parkusa, [5],

$$
(4.6) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = -\dfrac{E\alpha_t T_0}{m I_0(mb)}\left[\dfrac{I_1(mr)}{r} - \dfrac{I_1(mb)}{b}\right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\dfrac{E\alpha_t T_0}{I_0(mb)}\left[I_0(mr) - \dfrac{I_1(mr)}{mr} - \dfrac{I_1(mb)}{mb}\right]. \end{cases}
$$

Przyjęcie natomiast warunku brzegowego $\partial T/\partial r = W/K$ przy $r = b$, gdzie W jest wydajnością źródła, a K stałą, daje ponownie znane rozwiązanie, [5],

$$
(4.7) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = -\dfrac{E\alpha_t W}{m^2 K I_1(mb)}\left[\dfrac{I_1(mr)}{r} - \dfrac{I_1(mb)}{b}\right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\dfrac{E\alpha_t W}{K m I_1(mb)}\left[I_0(mr) - \dfrac{I_1(mr)}{mr} - \dfrac{I_1(mb)}{mb}\right]. \end{cases}
$$

W tym przypadku stałe wchodzące w skład warunku (2.3) mają wartości: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ i $a_3 = W/K$.

Jeżeli przyjmiemy, że $h \to 0$, to otrzymamy przypadek naprężeń, które w miarę upływu czasu dążą do zera. Przypadek taki może zajść w cienkiej tarczy z izolacją na powierzchniach $\pm\,\delta/2$ lub w nieskończonym walcu z termicznymi warunkami niezależnymi od długości.

Przy przejściu z $h \to 0$ we wzorach (4.4) wystąpią wyrażenia nieoznaczone

$$
(4.8) \quad \lim_{m \to 0} \frac{I_1(mr)}{m} = \frac{0}{0}.
$$

Jeżeli zastosujemy do wyrażenia (4.8) regułę de L'Hospitala, to otrzymamy szereg

$$
\lim_{m \to 0} \frac{I_1(mr)}{m} = r \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.
$$

Szereg ten jest znanym szeregiem Eulera i jest zbieżny podług średnich arytmetycznych, [3],

$$
(4.9) \quad \lim_{m \to 0} \frac{I_1(mr)}{m} = \frac{r}{2}.
$$

Powyższy wynik można otrzymać znacznie prościej. Przed przejściem do granicy trzeba podzielić szereg przedstawiający funkcję $I_1(mr)$ przez m.

W przypadku nieskończonego walca, tzn. w przypadku płaskiego stanu odkształcenia [por. wzór (3.1)], otrzymamy ze wzorów (4.4) zależności

$$
(4.10)\qquad
\begin{cases}
\sigma_{rr} = \dfrac{2E\alpha_t T_0}{(1-\nu)b}\eta(t)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\,\frac{1}{\alpha_n^2}\left[\frac{J_1(\alpha_n r)}{rJ_1(\alpha_n b)}-\frac{1}{b}\right],\\[2ex]
\sigma_{\varphi\varphi} = \dfrac{2E\alpha_t T_0}{(1-\nu)b}\eta(t)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\,\frac{1}{\alpha_n^2}\left[\frac{J_0(\alpha_n r)}{J_1(c_n b)}-\frac{J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n rJ(\alpha_n b)}-\frac{1}{\alpha_n b}\right].
\end{cases}
$$

W przypadku walca wystąpią jeszcze naprężenia σ_{zz}. Wyrażają się one wzorem, [5],

$$
(4.11)\qquad \sigma_{zz} = -\frac{E\alpha_t T}{1-\nu} + \nu(\overline{\overline{\sigma}}_{rr}+\overline{\overline{\sigma}}_{\varphi\varphi}).
$$

Temperatura określona jest wzorem (2.16). Jeśli uwzględnimy przejście graniczne we wzorze (4.2), to będziemy mogli napisać

$$
(4.12)\qquad \sigma_{zz} = -\frac{E\alpha_t T_0}{(1-\nu)}\eta(t)\left\{1+\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\left[\frac{2\nu}{\alpha_n^2 b}-\frac{J_0(\alpha_n r)}{\alpha_n J_1(\alpha_n b)}\right]\right\}.
$$

Literatura cytowana w tekście

[1] A. Gray, T. M. Mac Robert, *A Treatise on Bessel Functions*, Londyn 1952.

[2] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, Pisma t. 4, PWN, Warszawa 1954.

[3] K. Knopp, *Szeregi nieskończone*, PWN, Warszawa 1956.

[4] E. Melan, *Spannungen infolge nicht stationärer Temperaturfelder*, Öster. Ing.-Arch., t. 9, 2-3 (1955).

[5] E. Melan, H. Parkus, *Wärmespannungen*, Wiedeń 1953.

[6] C. J. Tranter, *Integral Transforms in Mathematical Physics*, tłum. ros. IL, Moskwa 1956.

Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОНКОМ КРУГОВОМ ДИСКЕ, ВЫЗВАННОЕ ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

В работе определяются термические напряжения в тонком круговом диске. Напряжения вызваны осесимметрическим нестационарным температурным полем. Это поле возникает в результате внезапного приложения на краю диска источника тепла. На обеих поверхностях $\pm\,\delta/2$, (где δ — толщина) происходит обмен тепла с окружающей средой.

Действие источника является такого рода, что когда время стремится к бесконечности, распределение температуры стремится к не-

стационарному распределению. Напряжения определяются в наиболее общем случае; граничный переход $t \to \infty$ позволяет определить напряженное состояние в случае стационарного температурного поля. Полученные таким способом результаты совпадают с формулами приведенными в монографии Е. Мелана и Х. Паркуса, [5].

Кроме того в работе определяются напряжения для случая бесконечного, сплошного цилиндра кругового сечения с термическими условиями, независящими от длины. Напряженное состояние было получено в результате граничного перехода к нулю с коэффициентом определяющим теплообмен на поверхностях.

Температурное поле определяется при помощи преобразования Лапласа. Для определения компонентов напряженного состояния был использован термоупругий потенциал перемещения.

Summary

THE STATE OF STRESS IN A THIN CIRCULAR PLATE DUE TO A NON-STEADY TEMPERATURE FIELD

The object of this paper is to determine the thermal stresses in a thin circular plate. These stresses are provoked by an axially symmetric non-steady temperature field due to a sudden action of a heat source distributed along the edge. The heat exchange with the ambient medium takes place on both surfaces $\pm\delta$ (δ-plate thickness).

The action of the heat source is such that, with the time tending to infinity, the temperature tends to a steady-state distribution. The stresses are determined in the most general case. The assumption that the time tends to infinity, $t \to \infty$, makes it possible by passing to the limit, to obtain stresses for the steady-state temperature field. Thus, the results obtained coincide with those given in the monograph by E. Mellan and H. Parkus, [5].

In addition there are obtained the stresses for an infinite solid circular cylinder, thermal conditions being independent of the longitudinal coordinate. The state of stress is determined by passing to the limit for zero, with a coefficient determining the heat exchange on the surfaces.

The temperature field is found using the Laplace transformation. For the determination of the stress components, the potential of thermoelastic displacement is used.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 października 1957 r.