MICHAŁ LAWINA

WYMUSZONE DRGANIA TŁUMIONE POWŁOKI OBROTOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CVIII

SPIS TREŚCI

1. Równania rozkładu amplitud

Punktem wyjściowym naszych rozważań są równania statyki dowolnej powłoki obrotowej podane w dziele [1]. Przechodząc do zagadnienia dynamicznego przyjmujemy założenie, że składowe przemieszczenia u, v, w, w układzie współrzędnych krzywoliniowych α, β, z są nie tylko funkcjami punktu (α, β) na powierzchni środkowej, ale też funkcjami czasu. Zakładamy również, że siły wymuszające drgania działają jedynie w kierunku normalnym do powierzchni środkowej i są określone przez funkcję

$$P(\alpha, \beta; t) = p(\alpha, \beta)\, e^{i\omega t}. \tag{1.1}$$

Z kolei przyjmiemy podobną postać przemieszczeń u, v, w, tłumienie zaś uwzględnimy według hipotezy Sorokina, [2] i [3], mnożąc przemieszczenia przez czynnik $(1+i\psi/2\pi)$. Po wyeliminowaniu funkcyj czasu równania rozkładu amplitud przedstawiają się w następującej postaci:

$$\begin{cases} L^{11}(u)+L^{12}(v)+L^{13}(w)+h^2[N^{11}(u)+N^{12}(v)+N^{13}(w)] = 0, \\ L^{21}(u)+L^{22}(v)+L^{23}(w)+h^2[N^{21}(u)+N^{22}(v)+N^{23}(w)] = 0, \\ L^{31}(u)+L^{32}(v)+L^{33}(w)+h^2[N^{31}(u)+N^{32}(v)+N^{33}(w)] = -\dfrac{p}{1+i\dfrac{\psi}{2\pi}}, \end{cases} \tag{1.2}$$

gdzie L^{ij} i N^{ij} są pewnymi operatorami rzędu od zerowego do czwartego. Ich rozwinięcia przedstawione są w tablicach 1 i 2. Użyto w nich następujących oznaczeń: $A(\alpha, \beta)$ i $B(\alpha, \beta)$ oznaczają współczynniki formy kwadratowej, R_1 i R_2 główne promienie krzywizn, R_1' i R_2' promienie krzywizn w przekrojach normalnych do powierzchni powłoki, poprowadzonych wzdłuż linii współrzędnych,

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{2}\sin 2\chi\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

W ostatnim wzorze χ jest kątem zawartym między linią, wzdłuż której normalna krzywizna powierzchni jest równa $1/R_1$, a linią współrzędną α. Przyjęto również oznaczenia:

$$\nabla^2 = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right],$$

$$\nabla^4 = \frac{2}{AB}\left[\left(\frac{B^2}{A^2}+1\right)\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 4\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \left(\frac{A^2}{B^2}+1\right)\frac{\partial^4}{\partial\beta^4},\right.$$

gdzie ϱ oznacza gęstość materiału powłoki, ω pulsację wymuszenia, λ i μ współczynniki L a m é g o.

We wzorach (1.2) h oznacza mały parametr bezwymiarowy, którym jest stosunek grubości powłoki do średniego promienia krzywizny, $(|R_1|+|R_2|)/2$.

2. Całkowanie równań rozkładu amplitud

Funkcję wymuszającą $p(\alpha,\beta)$ ze wzorów (1.2) określamy przez funkcję intensywności $P(\alpha,\beta)$ oraz funkcję zmienności $f(\alpha,\beta)$ w następujący sposób:

(2.1)
$$p(\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} h^{q_n} P(\alpha,\beta)\, e^{\frac{1}{h}f(\alpha,\beta)}.$$

Daje to możność szukania rozwiązań dla funkcji u, v i w w postaci sum szeregów, których poszczególne wyrazy pochodzą od wymuszeń składowych (2.1). Funkcje u, v i w mogą być również przedstawione przy pomocy funkcyj intensywności U, V i W oraz $f(\alpha,\beta)$, występującej we wzorze (2.1), a więc znanych. Przyjmiemy zatem następującą postać poszukiwanych funkcji u, v i w:

(2.2)
$$\begin{cases} u = h^{-a}\, U(\alpha,\beta;h)\, e^{\frac{1}{h}f(\alpha,\beta)}, \\ v = h^{-b}\, V(\alpha,\beta;h)\, e^{\frac{1}{h}f(\alpha,\beta)}, \\ w = h^{-c}\, W(\alpha,\beta;h)\, e^{\frac{1}{h}f(\alpha,\beta)}. \end{cases}$$

Parametry a, b i c są odpowiednio uzależnione od q_n. Nie mogą poza tym być dobrane najzupełniej dowolnie, ale jak się okaże niżej — powinny spełniać pewne związki. Intensywność przemieszczeń niech będzie przedstawiona przez asymptotyczny szereg potęgowy parametru h:

(2.3)
$$\begin{cases} U = u_0(\alpha,\beta) + u_1(\alpha,\beta)\,h + u_2(\alpha,\beta)\,h^2 + \dots, \\ V = v_0(\alpha,\beta) + v_1(\alpha,\beta)\,h + v_2(\alpha,\beta)\,h^2 + \dots, \\ W = w_0(\alpha,\beta) + w_1(\alpha,\beta)\,h + w_2(\alpha,\beta)\,h^2 + \dots. \end{cases}$$

Zagadnienie całkowania równań (1.2) sprowadza się do znalezienia funkcyj u_n, v_n i w_n rozwinięcia (2.3).

Wprowadzenie funkcji (2.2) do równań (1.2) pozwala uporządkować operatory L_{ij} i N_{ij} przedstawiając je jako sumy operatorów składowych według rosnącego rzędu. Operatory L_{ij} i N_{ij} składają się mianowicie z wyrażeń typu $\partial^{i+j}/\partial\alpha^i\partial\beta^j(\,)$. Można więc na przykład wyrażenie $\partial^{i+j}u/\partial\alpha^i\partial\beta^j$ na mocy (2.2) przedstawić w postaci

$$\frac{\partial^{i+j}u}{\partial\alpha^i\partial\beta^j}=h^{-a}\left[\left(\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^i\left(\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^j U\right]e^{\frac{1}{h}f}, \tag{2.4}$$

przy czym wykładniki i, j oznaczają zarówno rząd różniczkowania jak również i stopnie wielomianów.

Rozwijając wyrażenie (2.4) mamy

$$\frac{\partial^{i+j}u}{\partial\alpha^i\partial\beta^j}=h^{-a}\left[h^{-i-j}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^i\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^j U+h^{-i-j+1}A_1(U)+\right.$$
$$\left.+h^{-i-j+2}A_2(U)+\ldots+h^0A_{i+j}(U)\right]e^{\frac{1}{h}f}. \tag{2.5}$$

Wyrażenia A_i oznaczają pewne operatory rzędu i.

Operatory L i N równań (1.2) składają się właśnie z wyrażeń typu (2.5), w których uwzględniamy nadto rozwinięcia (2.3). Wtedy dowolne z operatorów L i N na przykład dla funkcji u przedstawiają się w postaci następującego szeregu:

$$\left\{\begin{aligned}L(u)&=h^{-a}\{h^{-n}L_0u_0+h^{-n+1}[L_1(u_0)+L_0u_1]+\\&\quad+h^{-n+2}[L_2(u_0)+L_1(u_1)+L_0u_2]+\ldots+h^0[L_n(u_0)+\ldots+L_0u_n]+\\&\quad+h[L_{n+1}(u_1)+\ldots+L_0u_{n+1}]+\ldots\}e^{\frac{1}{h}f},\\N(u)&=h^{-a}\{h^{-m}N_0u_0+h^{-m+1}[N_1(u_0)+N_0u_1]+\\&\quad+h^{-m+2}[N_2(u_0)+N_1(u_1)+N_0u_2]+\ldots+h^0[N_m(u_0)+\ldots+N_0u_m]+\\&\quad+h[N_m(u_1)+\ldots+N_0u_{m+1}]+\ldots\}e^{\frac{1}{h}f}.\end{aligned}\right. \tag{2.6}$$

Zauważmy przy tym, że wykładniki n i m jako pochodzące od n-krotnego (lub m-krotnego) różniczkowania wykładnika $e^{f/h}$ określają rząd operatora L (lub N). Wyrażenia L_0 i N_0 mają postać

$$\left\{\begin{aligned}L_0&=\sum_{ij}^{n}a_{ij}^{(n)}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^i\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^j,\\N_0&=\sum_{ij}^{n}b_{ij}^{(m)}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^i\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^j.\end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

Poszczególne operatory L_k i N_k rozwinięcia (2.6) można zbudować na podstawie tablic 1 i 2 porządkując występujące tam wyrażenia według rzędu pochodnych. Z równań (2.6) wynika, zważywszy że h jest małym parametrem, że pierwsze przybliżenia operatorów L i N otrzymujemy znając operatory L_0 i N_0 oraz L_1 i N_1. Zważywszy ich decydujące znaczenie opracowano je na podstawie tablic 1, 2 i podano w tablicach 3, 4, 5 i 6.

Układy równań (1.2) można teraz rozwiązać bez uszczerbku dla ogólności tej metody biorąc jako funkcję wymuszającą tylko jeden, n-ty, wyraz rozwinięcia (2.1). Pełne rozwiązanie będzie oczywiście sumą tych rozwiązań. Pierwsze przybliżenie funkcji U, V i W — a tym samym i funkcyj u, v i w — otrzymujemy zachowując z rozwinięcia (2.3) tylko pierwsze wyrazy u_0, v_0 i w_0, a z operatorów L^{ij} i N^{ij} równań (1.2) — tylko wyrażenia L_0^{ij} i N_0^{ij} według rozwinięcia (2.6). Zauważmy przy tym, że wykładniki n i m rozwinięcia (2.6), jako określające rząd operatorów L^{ij} i N^{ij} muszą mieć wartości podane w tablicach 1 i 2. Skracając od razu przez czynnik $e^{f(\alpha,\beta)/h}$ otrzymamy następujący układ równań:

$$
(2.8)\quad \left\{
\begin{aligned}
& h^{-a}(h^{-2}L_0^{11}+N_0^{11})u_0+h^{-b}(h^{-2}L_0^{12}+N_0^{12})v_0+h^{-c}(h^{-2}L_0^{13}+h^{-1}N_0^{13})w_0=0,\\
& h^{-a}(h^{-2}L_0^{21}+N_0^{21})u_0+h^{-b}(h^{-2}L_0^{22}+N_0^{22})v_0+h^{-c}(h^{-1}L_0^{23}+h^{-1}N_0^{23})w_0=0,\\
& h^{-a}(h^{-1}L_0^{31}+h^{-1}N_0^{31})\,u_0+h^{-b}(h^{-1}L_0^{32}+h^{-1}N_0^{32})\,v_0+\\
& \qquad\qquad +h^{-c}(L_0^{33}+h^{-2}N_0^{33})\,w_0=\frac{h^{-q_n}P}{1+i\dfrac{\psi}{2\pi}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Równania (2.8) jako zawierające tylko operatory rzędu zerowego pozwalają na wyznaczenie funkcyj u_0, v_0 i w_0 drogą li tylko działań algebraicznych. Następne wyrazy szeregów (2.3), a więc funkcje u_1, u_2, u_3, ..., v_1, v_2, v_3, ..., w_1, w_2, w_3, ... obliczyć można kolejno z podanego niżej rozszerzonego układu równań (2.9). Układ ten można zastąpić układem zawierającym operatory tylko L_1^{ij} i N_1^{ij} oraz funkcje u_1, v_1 i w_1 korzystając z tablic 3, 4, 5 i 6; można jednak poszukiwać dalszych przybliżeń budując w tym celu operatory L_2^{ij} i N_2^{ij} itd. W ten sposób znajdziemy

$$
(2.9)\quad \left\{
\begin{aligned}
& h^{-a}\{h^{-n}L_0^{11}u_0+h^{-n+1}[L_1^{11}(u_0)+L_0^{11}u_1]+h^{-n+2}[L_2^{11}(u_0)+L_1^{11}(u_1)+\\
& \qquad +L_0^{11}u_2]+\ldots\}+h^{-b}\{h^{-n}L_0^{12}v_0+h^{-n+1}[L_1^{12}(v_0)+L_0^{12}v_1]+\\
& \qquad +h^{-n+2}[L_2^{12}(v_0)+L_1^{11}(v_1)+L_0^{11}v_2]+\ldots\}+h^{-c}\{h^{-n}L_0^{13}w_0+\\
& \quad +h^{-n+1}[L_1^{13}(w_0)+L_0^{13}w_1]+h^{-n+2}[L_2^{13}(w_0)+L_1^{13}(w_1)+L_0^{13}w_2]+\ldots\}+\\
& \qquad +h^{-a+2}\{h^{-m}N_0^{11}u_0+h^{-m+1}[N_1^{11}(u_0)+N_0^{11}u_1]+h^{-m+2}[N_2^{11}(u_0)+\\
& \qquad +N_1^{11}(u_1)+N_0^{11}u_2]+\ldots\}+h^{-b+2}\{h^{-m}N_0^{12}v_0+h^{-m+1}[N_1^{12}(v_0)+\\
& \quad +N_0^{12}v_1]+h^{-m+2}[N_2^{12}(v_0)+N_1^{12}(v_1)+N_0^{12}v_2]+\ldots\}+h^{-c+2}\{h^{-m}N_0^{13}w_0+\\
& \quad +h^{-m+1}[N_1^{13}(w_0)+N_0^{13}w_1]+h^{-m+2}[N_2^{13}(w_0)+N_1^{13}(w_1)+N_0^{13}w_2]+\ldots\}=0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&h^{-a}\{h^{-n}L_0^{21}u_0+h^{-n+1}[L_1^{21}(u_0)+L_0^{21}u_1]+h^{-n+2}[L_2^{21}(u_0)+L_1^{21}(u_1)+\\
&\qquad +L_0^{21}u_2]+\ldots\}+h^{-b}\{h^{-n}L_0^{22}v_0+h^{-n+1}[L_1^{22}(v_0)+L_0^{22}v_1]+\\
&\qquad +h^{-n+2}[L_2^{22}(v_0)+L_1^{22}(v_1)+L_0^{22}v_2]+\ldots\}+h^{-c}\{h^{-n}L_0^{23}w_0+\\
&\qquad +h^{-n+1}[L_1^{23}w_0+L_0^{23}w_1]+h^{-n+2}[L_2^{23}(w_0)+L_1^{23}(w_1)+L_0^{23}w_2]+\ldots\}+\\
&+h^{-a+2}\{h^{-m}N_0^{21}u_0+h^{-m+1}[N_1^{21}u_0+N_0^{21}u_1]+h^{-m+2}[N_2^{21}(u_0)+N_1^{21}(u_1)+\\
&\qquad +N_0^{21}u_2]+\ldots\}+h^{-b+2}\{h^{-m}N_0^{22}v_0+h^{-m+1}[N_1^{22}(v_0)+N_0^{22}v_1]+\\
&\qquad +h^{-m+2}[N_2^{22}(v_0)+N_1^{22}(v_1)+N_0^{22}v_2]+\ldots\}+h^{-c+2}\{h^{-m}N_0^{23}w_0+\\
&h^{-m+1}[N_1^{23}(w_0)+N_0^{23}w_1]+h^{-m+2}[N_2^{23}(w_0)+N_1^{23}(w_1)+N_0^{23}w_2]+\ldots\}=0,\\
&h^{-a}\{h^{-n}L_0^{31}u_0+h^{-n+1}[L_1^{31}(u_0)+L_0^{31}u_1]+h^{-n+2}[L_2^{31}(u_0)+L_1^{31}(u_1)+\\
&\qquad +L_0^{31}u_2]+\ldots\}+h^{-b}\{h^{-n}L_0^{32}v_0+h^{-n+1}[L_1^{32}(v_0)+L_0^{32}v_1]+\\
&\qquad +h^{-n+2}[L_2^{32}(v_0)+L_2^{32}(v_1)+L_0^{32}v_2]+\ldots\}+h^{-c}\{h^{-n}L_0^{33}w_0+\\
&\qquad +h^{-n+1}[L_1^{33}(w_0)+L_0^{33}w_1]+h^{-n+2}[L_2^{33}(w_0)+L_1^{33}(w_1)+L_0^{33}w_2]+\ldots\}+\\
&+h^{-a+2}\{h^{-m}N_0^{31}u_0+h^{-m+1}[N_1^{31}(u_0)+N_0^{31}u_1]+h^{-m+2}[N_2^{31}(u_0)+N_1^{31}(u_1)+\\
&\qquad +N_0^{31}u_2]+\ldots\}+h^{-b+2}\{h^{-m}N_0^{32}v_0+h^{-m+1}[N_1^{32}(v_0)+N_0^{32}v_1]+\\
&\qquad +h^{-m+2}[N_2^{32}(v_0)+N_1^{32}(v_1)+N_0^{32}v_2]+\ldots\}+h^{-c+2}\{h^{-m}N_0^{33}w_0+\\
&\qquad +h^{-m+1}[N_1^{33}(w_0)+N_0^{33}w_1]+h^{-m+2}[N_2^{33}(w_0)+N_1^{33}(w_1)+\\
&\qquad\qquad +N_0^{33}w_2]+\ldots\}=\frac{h^{-q_n}P}{1+i\dfrac{\psi}{2\pi}}.
\end{aligned}
\right.
$$

3. Przykład. Nieskończone układy równań do wyznaczenia składowych przemieszczeń

Jest rzeczą korzystną rozłożenie układu równań (2.9) na częściowe układy, z których każdy zawiera trzy równania o tych samych niewiadomych funkcjach u_i, v_i, w_i; można je obliczyć niezależnie od pozostałych. Układy takie można uzyskać w poszczególnych przypadkach po założeniu możliwych wartości a, b, c i q_n drogą porównania współczynników przy jednakowych potęgach h w każdym z równań (2.9). Dla przedstawienia takiego układu równań przyjmiemy następujące związki między wykładnikami:

(3.1) $$a = b = c = q_n + 2.$$

Przy takim założeniu równania (2.9) rozpadną się na następujące trójki równań:

$$
(3.2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&[L_1^{11}(u_0)+h^2N_1^{11}(u_0)]+[L_0^{11}+h^2N_0^{11}]u_1+[L_1^{12}(v_0)+h^2N_1^{12}(v_0)+\\
&\qquad +[L_0^{12}+h^2N_0^{12}]v_1+[L_1^{13}(w_0)+h^2N_1^{13}(w_0)]+[L_0^{13}+h^2N_0^{13}]w_1=0\\
&[L_1^{21}(u_0)+h^2N_1^{21}(u_0)]+[L_0^{21}+h^2N_0^{21}]u_1+[L_1^{22}(v_0)+h^2N_1^{22}(v_0)]+\\
&\qquad +[L_0^{22}+h^2N_0^{22}]v_1+[L_1^{23}(w_0)+h^2N_1^{23}(w_0)]+[L_0^{23}+h^2N_0^{23}]w_1=0,\\
&[L_1^{31}(u_0)+h^2N_1^{31}(u_0)]+[L_0^{31}+h^2N_0^{31}]u_1+[L_1^{32}(v_0)+h^2N_1^{32}(v_0)]+\\
&\qquad +[L_0^{32}+h^2N_0^{32}]v_1+[L_1^{33}(w_0)+h^2N_1^{33}(w_0)]+[L_0^{33}+h^2N_0^{33}]w_1=0,\\[2ex]
&\{L_2^{11}(u_0)+L_1^{11}(u_1)+L_0^{11}u_2+h^2[N_2^{11}(u_0)+N_1^{11}(u_1)+N_0^{11}u_2]\}+\\
&\qquad +\{L_2^{12}(v_0)+L_1^{12}(v_1)+L_0^{12}v_2+h^2[N_2^{12}(v_0)+N_1^{12}(v_1)+N_0^{12}v_2]\}+\\
&\qquad +\{L_2^{13}(w_0)+L_1^{13}(w_1)+L_0^{13}w_2+h^2N_2^{13}(w_0)+N_1^{13}(w_1)+N_0^{13}w_2]\}=0,\\
&\{L_2^{21}(u_0)+L_1^{21}(u_1)+L_0^{21}u_2+h^2[N_2^{21}(u_0)+N_1^{21}(u_1)+N_0^{21}u_2]\}+\\
&\qquad +\{L_2^{22}(v_0)+L_1^{22}(v_1)+L_0^{22}v_2+h^2[N_2^{22}(v_0)+N_1^{22}(v_1)+N_0^{22}v_2]\}+\\
&\qquad +\{L_2^{23}(w_0)+L_1^{23}(w_1)+L_0^{23}w_2+h^2[N_2^{23}(w_0)+N_1^{23}(w_1)+N_0^{23}w_2]\}=0,\\
&\{L_2^{31}(u_0)+L_1^{31}(u_1)+L_0^{31}u_2+h^2[N_2^{31}(u_0)+N_1^{31}(u_1)+N_0^{31}u_2]\}+\\
&\qquad +\{L_2^{32}(v_0)+L_1^{32}(v_1)+L_0^{32}v_2+h^2[N_2^{32}(v_0)+N_1^{32}(v_1)+N_0^{32}v_2]\}+\\
&\qquad +\{L_2^{33}(w_0)+L_1^{33}(w_1)+L_0^{33}w_2+h^2[N_2^{33}(w_0)+N_1^{33}(w_1)+N_0^{33}w_2]\}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&L_{n-2}^{11}(u_0)+L_{n-3}^{11}(u_1)+\ldots+L_0^{11}u_{n-2}+h^2[N_{n-2}^{11}(u_0)+N_{n-3}^{11}(u_1)+\ldots+\\
&\qquad +N_0^{11}u_{n-2}]+L_{n-2}^{12}(v_0)+L_{n-3}^{12}(v_1)+\ldots+L_0^{12}v_{n-2}+h^2[N_{n-2}^{12}(v_0)+\\
&\qquad +N_{n-3}^{12}(v_1)+\ldots+N_0^{12}v_{n-2}]+L_{n-2}^{13}(w_0)+L_{n-3}^{13}(w_1)+\ldots+L_0^{13}w_{n-2}+\\
&\qquad +h^2[N_{n-2}^{13}(w_0)+N_{n-3}^{13}(w_1)+\ldots+N_0^{13}w_{n-2}]=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&L_{n-2}^{31}(u_0)+L_{n-3}^{31}(u_1)+\ldots+L_0^{31}u_{n-2}+h^2[N_{n-2}^{31}(u_0)+N_{n-3}^{31}(u_1)+\ldots+\\
&\qquad +N_0^{31}u_{n-2}]+L_{n-2}^{32}(v_0)+L_{n-3}^{32}(v_1)+\ldots+L_0^{32}v_{n-2}+h^2[N_{n-2}^{32}(v_0)+\\
&\qquad +N_{n-3}^{32}(v_1)+\ldots+N_0^{32}v_{n-2}]+L_{n-2}^{33}(w_0)+L_{n-3}^{33}(w_1)+\ldots+L_0^{33}w_{n-2}+\\
&\qquad +h^2[N_{n-2}^{33}(w_0)+N_{n-3}^{33}(w_1)+\ldots+N_0^{33}w_{n-2}]=\frac{P(\alpha,\beta)}{1+i\dfrac{\psi}{2\pi}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

Równania (3.2) wraz z równaniami (2.8) przy założeniu (3.1) dają układy umożliwiające kolejne obliczenie dowolnej ilości wyrazów szeregów (2.3). Tym samym zagadnienie całkowania równań rozkładu amplitud (1.2) zostało rozwiązane.

4. Wpływ tłumienia na wielkość naprężeń

W dwu poprzednich punktach podano ogólny sposób całkowania równań rozkładu amplitud, przy czym nie wnikano bliżej w zagadnienia brzegowe ze względu na to, że głównym zadaniem tej pracy jest przedyskutowanie wpływu tłumienia na wielkość naprężeń. Ze względu na superpozycję rozwiązań wystarczy ograniczyć się do znalezienia dowolnego rozwiązania w_s. Otóż ze wszystkich podanych tablic oraz sposobu tworzenia operatorów L_k^{ij} i N_k^{ij} wynika, że liczbę ψ zawierają tylko wyraz wymuszający oraz operator L_0^{33}. Z budowy wyznaczników równań (1.2) lub (2.9) można wnosić, że dowolną składową przemieszczenia w_s można przedstawić w następującej postaci:

$$w_s = \frac{P(\alpha,\beta)}{1+i\frac{\psi}{2\pi}} h^{-(a+b+q_n)} \frac{F_1(L_k^{ij}, N_k^{ij})}{F_2(L_k^{ij}, N_k^{ij})+i\frac{\psi}{2\pi}F_3(L_k^{ij}, N_k^{ij})} \tag{4.1}$$

albo ogólniej

$$w_s = P(\alpha,\beta)\frac{F_4(L_k^{ij}, N_k^{ij})}{F_5(L_k^{ij}, N_k^{ij})+i\frac{\psi}{2\pi}F_6(L_k^{ij}, N_k^{ij})}. \tag{4.2}$$

Funkcje $F(L_k^{ij}, N_k^{ij})$ są to pewne wyrażenia, ogólnie różne dla różnych składowych przemieszczeń, w skład których wchodzą operatory L_k^{ij} i N_k^{ij} dla wszystkich danych i, j oraz k.

Zwróćmy uwagę, że przyjęte w (2.2) parametry a, b i c (w rozwiązaniu na u_s wystąpią b i c, w rozwiązaniu na v_s — a i c) muszą pozostawać w pewnej proporcji do występujących w (2.1) wielkości q_n, tak aby ciąg rozwiązań w_s tworzył szereg zbieżny.

Przemieszczenie (4.2) będące funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej korzystnie jest przedstawić dla celów dyskusji w postaci

$$w_s = re^{iz}, \tag{4.3}$$

gdzie na mocy własności liczb zespolonych

$$r = \frac{F_4 P(\alpha,\beta)}{\sqrt{F_5^2+\frac{\psi^2}{4\pi^2}F_6^2}}, \qquad z = \operatorname{arc\,tg}\frac{-\frac{\psi}{2\pi}F_6}{F_5}. \tag{4.3.1}$$

W wyrażeniu (4.2) funkcja F_5 zawiera częstość wymuszenia ω, nie zawierą natomiast tłumienia ψ, ponieważ ono występuje zawsze w części urojonej. Wzór więc (4.2) a stąd i (4.3) może być podstawą do zbadania wpływu tłumienia na amplitudę wychylenia, gdy wyeliminujemy wpływ częstości ω. Jeżeli ω ustalimy jako równe jednej z częstości własnych badanej powłoki, a więc jeżeli rozpatrzymy drgania z uwzględnieniem rezonansu, wtedy z postulatu nieograniczonego wzrostu przemieszczenia wynika, że

$$F_5(L_k^{ij}, N_k^{ij}) = 0$$

przynajmniej dla pewnych (α, β); w uwagach końcowych wyjaśnimy, że chodzi tylko o te miejsca maksymalnych wychyleń. Z charakteru równań dla przykładu (3.2) wynika, że nieograniczonemu wzrostowi dowolnej składowej w_s towarzyszy także nieograniczony wzrost pozostałych składowych w.

W takim przypadku zależność (4.3) będzie miała postać

$$w_s = P(\alpha, \beta)\frac{F_4}{F_6}\,\frac{2\pi}{\psi}\,e^{iz}$$

albo, biorąc pod uwagę tożsamość Eulera,

$$w_s = P(\alpha, \beta)\frac{F_4}{F_6}\,\frac{2\pi}{\psi}(\cos z + i \sin z). \tag{4.4}$$

Tak więc składowe przemieszczeń zależne są od cosinusa lub sinusa pewnych wielkości zależnych od punktu α i β oraz od tłumienia, przy czym o tym czy występuje sinus, czy cosinus rozstrzyga to, czy rozważamy wymuszenie drgań odpowiadające rzeczywistej, czy też urojonej części funkcji wymuszającej (1.1).

Ponieważ chodzi tu nie tyle o przebieg wychyleń, ile o ich amplitudę, stwierdzamy na mocy wzoru (4.4), że wychylenia w rezonansie są odwrotnie proporcjonalne do tłumienia właściwego ψ.

Wnioski te można przenieść z wychyleń na naprężenia. Wystarczy w tym celu jedynie zacytować podane w pracy [1] związki między przemieszczeniami i odkształceniami:

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}v - \frac{w}{R_1'},\\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}u - \frac{w}{R_2'},\\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{B}\right) + \frac{2w}{R_{12}}. \end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

Ze związków tych wynika, że nieograniczony wzrost wychyleń normalnych w powoduje też nieograniczony wzrost odkształceń, a więc i naprężeń; rezonans wychyleń oznacza też rezonans naprężeń. We wszystkich wyrazach wzorów (4.5) zachowa się też czynnik $1/\psi$.

Tablica 1. Rozwinięcie operatorów L^{ij}

$i \diagdown j$ (równanie)	1 (funkcja u)	Rząd operatora	2 (funkcja v)	Rząd operatora	3 (funkcja w)	Rząd operatora
1	$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B + \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}A + \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_1R_2} - \frac{\varrho\omega^2}{1+i\frac{\psi}{2\pi}}\frac{\lambda+2\mu}{8\mu(\lambda+\mu)}$	2	$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}A - \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B$	2	$-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}$	1
2	$\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B - \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}A$	2	$\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}A + \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_1R_2} - \frac{\varrho\omega^2}{1+i\frac{\psi}{2\pi}}\frac{\lambda+2\mu}{8\mu(\lambda+\mu)}$	2	$-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}$	1
3	$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B - \frac{1}{AB}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_2'} - \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_{12}}$	1	$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}A - \frac{1}{AB}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_1'} - \frac{1}{AB}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_{12}}$	1	$-\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_1R_2}\frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{1}{R_2^2} - \frac{\varrho\omega^2}{1+i\frac{\psi}{2\pi}}\frac{\lambda+2\mu}{8\mu(\lambda+\mu)}$	0

Tablica 2. Rozwinięcie operatorów N^{ij}

j / i (równanie)	1 (funkcja u)	Rząd operatora	2 (funkcja v)	Rząd operatora	3 (funkcja w)	Rząd operatora
1	$\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1'}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_{12}}\right)+\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\left[\frac{1}{R_1'}\left(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{R_{12}}\left(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}A+\frac{1}{R_1R_2}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{R_1'^2}+\frac{1}{R_{12}^2}\right)\right\}$	2	$\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_2'}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_{12}}\right)-\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\left[\frac{1}{R_1'}\left(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{R_{12}}\left(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B-\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_1R_2}\frac{1}{R_{12}}\left(\frac{1}{R_1'}+\frac{1}{R_2'}\right)\right\}$	2	$\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\nabla^2+\frac{1}{R_1R_2}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right\}$	3
2	$\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1'}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_{12}}-\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\right)\left[\frac{1}{R_2'}\left(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{R_{12}}\left(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\right]\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}A-\frac{1}{R_1R_2}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_{12}}\left(\frac{1}{R_1'}+\frac{1}{R_2'}\right)\right\}$	2	$\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_2'}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_{12}}\right)+\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\left[\frac{1}{R_2'}\left(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{R_{12}}\left(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\right]\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B+\frac{1}{R_1R_2}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{R_2'^2}+\frac{1}{R_{12}^2}\right)\right\}$	2	$\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\nabla^2+\frac{1}{R_1R_2}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\right\}$	3
3	$-\frac{1}{3}\left\{\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}B\left(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}A\left(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}A+\nabla^2\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1'}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_{12}}\right)+\frac{1}{AB}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1'}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_{12}}\right)\frac{1}{R_1R_2}\right.$	3	$\frac{1}{3}\left\{\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}A\left(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}B\left(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\right\}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B+\nabla^2\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_2'}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_{12}}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_{12}}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_2'}\right)\frac{1}{R_1R_2}\right\}$	3	$\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{AB}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1R_2}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_1R_2}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)+\nabla^4\right\}$	4

Tablica 3. Rozwinięcie wyrażeń L_0^{ij}

$i \diagdown j$	1	2	3
1	$\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2$	$\frac{3\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{AB}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial \beta}$	$\left[\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha} +$ $+ \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}$
2	$\frac{3\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{AB}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial \beta}$	$\frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 + \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2$	$\left[\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta} +$ $+ \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \beta}$
3	$\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)R_2'}\right]\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha} -$ $- \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{B}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial f}{\partial \beta}$	$\Bigl[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta} -$ $- \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{A}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial f}{\partial \alpha}$	$\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_1 R_2}\frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{1}{R_2^2} -$ $- \frac{\varrho\omega^2}{1+i\frac{\psi}{2\pi}}\frac{\lambda+2\mu}{8\mu(\lambda+\mu)}$

Tablica 4. Rozwinięcie wyrażeń N_0^{ij}

$i \backslash j$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}\Big\{\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)\Big(\frac{1}{A}\frac{1}{R_1'}\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{1}{B}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big) + \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_1'}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big) + \frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)\Big]\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big\}$	$\frac{1}{3}\Big\{\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)\Big(\frac{1}{B}\frac{1}{R_2'}\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{A}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big) - \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_1'}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big) + \frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)\Big]\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}$	$\frac{1}{3}\Big\{\Big[\frac{1}{A^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big)^2 + \frac{1}{B^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)^2\Big]\Big(\frac{1}{A}\frac{1}{R_1'}\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{1}{B}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)\Big\}$
2	$\frac{1}{3}\Big\{\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big)\Big(\frac{1}{A}\frac{1}{R_1'}\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{1}{B}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big) - \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_2'}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big) + \frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big)\Big]\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big\}$	$\frac{1}{3}\Big\{\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big)\Big(\frac{1}{B}\frac{1}{R_2'}\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{A}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big) + \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_2'}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big) + \frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big)\Big]\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big\}$	$\frac{1}{3}\Big\{\Big[\frac{1}{A^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big)^2 + \frac{1}{B^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)^2\Big]\Big(\frac{1}{B}\frac{1}{R_2'}\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{A}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big)\Big\}$
3	$-\frac{1}{3}\Big\{\Big[\frac{1}{A^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big)^2 + \frac{1}{B^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)^2\Big]\Big(\frac{1}{A}\frac{1}{R_1'}\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{1}{B}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)\Big\}$	$-\frac{1}{3}\Big\{\Big[\frac{1}{A^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big)^2 + \frac{1}{B^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)^2\Big]\Big(\frac{1}{B}\frac{1}{R_2'}\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{A}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big)\Big\}$	$-\frac{1}{3}\Big\{\Big[\frac{1}{A^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big)^2 + \frac{1}{B}\Big(\frac{\partial f}{\partial \beta}\Big)^2\Big]^2\Big\}$

Tablica 5. Rozwinięcie operatorów L_i^j

$i \backslash j$	1	2	3
1	$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial}{\partial \alpha}B + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial}{\partial \beta}A + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)$	$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial}{\partial \beta}A + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial}{\partial \alpha}B + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)$	$-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\right)$
2	$\frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial}{\partial \alpha}B + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial}{\partial \beta}A + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)$	$\frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \beta}A + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial}{\partial \alpha}B + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)$	$-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$
3	$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}B - \frac{1}{AB}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{B}{R_2'} + \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{A}{R_{12}}\right)$	$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \beta}A - \frac{1}{AB}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{A}{R_1'} + \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{B}{R_{12}}\right)$	0

Tablica 6. Rozwinięcie operatorów N_i^j

$i \backslash j$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}\Big\{\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1'}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_{12}}\Big)+\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{1}{AR_1'}-\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{1}{BR_{12}}\Big)+\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_1'}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)+\frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial\beta}A+\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_1'}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)+\frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)\Big]\times\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big\}$	$\frac{1}{3}\Big\{\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_2'}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_{12}}\Big)+\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)\times\Big(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}-\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\Big)-\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_1'}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big)+\frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial\alpha}B-\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_1'}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)+\frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)\Big]\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big\}$	$\frac{1}{3}\Big\{\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)\nabla^2 f+\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)\frac{1}{AB}\Big(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{B}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)+\frac{1}{R_1R_2}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)\Big\}$
2	$\frac{1}{3}\Big\{\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1'}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_{12}}\Big)+\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{1}{AR_1'}-\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{1}{BR_{12}}\Big)-\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_2'}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)+\frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial\beta}A-\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_2'}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)+\frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)\Big]\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big\}$	$\frac{1}{3}\Big\{\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_2'}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_{12}}\Big)+\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)\times\Big(\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}-\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\frac{1}{R_{12}}\Big)+\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_2'}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)+\frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial\alpha}B+\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\Big[\frac{1}{R_2'}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)+\frac{1}{R_{12}}\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)\Big]\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big\}$	$\frac{1}{3}\Big\{\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)\nabla^2 f+\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big)\frac{1}{AB}\Big(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)+\frac{1}{R_1R_2}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)\Big\}$
3	$-\frac{1}{3}\Big\{\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha}B\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big)-\frac{\partial}{\partial\beta}A\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)\Big]\times\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial f}{\partial\alpha}B\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)-\frac{\partial f}{\partial\beta}A\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)\Big]\times\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial f}{\partial\alpha}B\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big)-\frac{\partial f}{\partial\beta}A\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)\Big]\times\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}A+\nabla^2 f\frac{1}{AB}\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1'}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_{12}}\Big)+\Big(\frac{1}{AB}\Big)^2\Big(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1'}-\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{A}{R_{12}}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)+\frac{1}{AB}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1'}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_{12}}\Big)\frac{1}{R_1R_2}\Big\}$	$\frac{1}{3}\Big\{\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial}{\partial\beta}A\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)+\frac{\partial}{\partial\alpha}B\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big)\Big]\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial f}{\partial\beta}A\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)+\frac{\partial f}{\partial\alpha}B\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)\Big]\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial f}{\partial\beta}A\Big(\frac{1}{R_2'}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)+\frac{\partial f}{\partial\alpha}B\Big(\frac{1}{R_1'}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big)\Big]\times\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}B+\nabla^2 f\frac{1}{AB}\Big(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_2'}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_{12}}\Big)-\Big(\frac{1}{AB}\Big)^2\Big(\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{A}{R_2'}-\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{B}{R_{12}}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)-\frac{1}{AB}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_{12}}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_2'}\Big)\frac{1}{R_1R_2}\Big\}$	$\frac{1}{3}\frac{1}{AB}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Big(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1R_2}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{A}{R_1R_2}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_1R_2}\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_1R_2}\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}\Big)$

5. Uwagi końcowe

Rozważany powyżej problem powstał przy sposobności badania zmęczeniowych pęknięć dysz wylotowych silników odrzutowych; w szczególności chodziło o wyjaśnienie faktu, że dysze ze stali nisko-węglowej wykazały wyższą trwałość od dysz ze stali wysokostopowej mimo niższej wytrzymałości zmęczeniowej; dzieje się to prawdopodobnie dzięki wyższemu tłumieniu właściwemu stali węglowej. Wnioski płynące z porównania granic wytrzymałości zmęczeniowej i współczynników tłumienia różnych rodzajów stali dadzą się streścić w następujący sposób: zastąpienie stali stopowej stalą 0,25%C przy zachowaniu tych samych wymiarów dyszy daje zwiększenie stopnia bezpieczeństwa; przy zastosowaniu stali o niższej zawartości węgla, rzędu 0,20% C, zauważyć można pewne krytyczne naprężenie średnie σ_m, powyżej którego stosowanie tej stali jest niekorzystne.

Przeprowadzone porównania opierały się na założeniu średniego współczynnika ψ niezależnego od wielkości naprężeń, co nie zachodzi w zasadzie dla stali. Dodatkowe jednak badania autora wykazały, że wpływ tłumienia przy odkształceniach postaciowych (a to jest dla tłumienia decydujące) na formę rozkładu amplitud jest niewielki [4]. Nadto okazało się, że jego zmienność w zakresie technicznie ważnych naprężeń jest nieznaczna. Pozwala to na przyjęcie stałych średnich współczynników tłumienia.

Te dodatkowe uwagi nie są natomiast potrzebne tam, gdzie rozważa się drgania powłoki betonowej, ponieważ wiadomo, że współczynnik ψ dla betonu jest stały.

Literatura cytowana w tekście

[1] A. Э. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек*, 1953.

[2] E. C. Сорокин, *Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебания. Исследования по динамике сооружений*, 1951.

[3] E. C. Сорокин, *Динамический расчет несущих конструкций зданий*, 1956.

[4] M. Lawina, *Dyskusja wpływu tłumienia na postać drgań skrętnych tarczy*, Referat wygł. na Konf. ZMOC IPPT PAN, 1957.

Резюме

ВЫНУЖДЕННЫЕ ДЕМПФИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматриваются вынужденные демпфированные колебания вращательной оболочки произвольной формы, причем вынуждающие силы действуют по нормальному направлению. Для учета влияния демпфирования используется гипотеза Сорокина. Уравнения распределения амплитуд (1.2) подвергается асимптотическому интегрированию. Вынуждение представляется, как суперпозиция частичных действий по формуле (2.1). Для n-той составляющей перемещение представлено в форме (2.2), которая заключает отдельные функции интенсивности и переменности; первые из них можно в свою очередь представить в виде рядов (2.3) согласно степеням малого параметра h, обозначающего относительную толщину оболочки.

При подобранных таким способом рядах интегрирование уравнений (1.2) сводится к решению очередных систем уравнений (2.9) или уравнений (3.2), представляющих некоторый конкретный пример. Решение этих систем дает последовательные приближения функции, определяющей интенсивность перемещений (2.3). Первых два приближения можно определить, зная операторы L_0, N_0, L_1, N_1, выступающие в качестве коэффициентов системы уравнений. Форма этих операторов приводится в таблицах 3, 4, 5 и 6.

В заключительных примечаниях речь идет о некоторых важных с технической точки зрения проблемах, связанных с рассматриваемым вопросом.

Summary

FORCED DAMPED VIBRATION OF A SHELL OF REVOLUTION

Contains considerations concerning forced damped vibration of a shell of revolution of any form, the vibration provoking normal forces being of an arbitrary type. In order to take the damping into account, the S o r o k i n hypothesis is used. The equations of amplitude distribution (1.2) are integrated asymptotically. The vibration forcing action is represented as a superposition of partial actions according to the Eq. (2.1). For the n-th component of the vibration exciting force, the displacements are represented in the form (2.2) containing separate intensity functions and variability functions; the former may be represented in turn in the form of a series (2.3) in powers of the small parameter h-the relative thickness of the shell.

With such expansions, the integration of the equations (1.2) reduces to the solution of successive systems of equations (2.9) or (3.2) representing a certain concrete example. The solutions of these systems yield successive approximations to the functions of displacement intensity (2.3). The first two approximations may be determined knowing the operators L_0, N_0, L_1, N_1, appearing as coefficients in the system of equations. The forms of these operators are given in the Tables 3, 4, 5 and 6.

The final remarks concern certain matters important in practice concerning the problem considered.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 stycznia 1958 r.