ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 28, 4, 661—664, 1980

Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

# RÓWNANIA SPRĘŻYSTOŚCI TEORII ODKSZTAŁCEŃ SKOŃCZONYCH DLA PŁYT I POWŁOK

N. W. ŁAPIN (KAZAŃ)

Wyprowadzono jeden z wariantów równań konstytutywnych należących do nieliniowej (kwadratowej) teorii sprężystości. Rozszerzono metodę, podaną w pracy [4], wyprowadzenia równań fizykalnych dla małych deformacji—na przypadek ogólniejszy. Otrzymano tym sposobem stosunkowo proste równania w zakresie nieliniowym.

Podstawowym zagadnieniem nieliniowej teorii sprężystości jest ustalenie związków pomiędzy składowymi stanu naprężeń i odkształceń. Równania fizyczne dla obszaru odkształceń skończonych zostały podane w pracach [1, 2 i 3]. W niniejszej pracy wyprowadzono jeden z wariantów równań konstytutywnych nieliniowej, kwadratowej teorii sprężystości przez przeniesienie za pomocą znanego sposobu [4] równań fizycznych odnoszących się do małych odkształceń—na przypadek dużych odkształceń. Otrzymane równania konstytutywne zostały wykorzystane do wyprowadzenia zależności pomiędzy odkształceniami i naprężeniami. Otrzymano stosunkowo proste równania fizyczne.

Związek pomiędzy składowymi naprężenia $\sigma_{ij}$ i składowymi tensora odkształcenia $\varepsilon_{ij}$ przyjmujemy wg Greena w postaci

$$\sigma_{ij}=\partial F/\partial\varepsilon_{ij}, \tag{1}$$

przy czym funkcję $F$ dla jednorodnego, izotopowego, termosprężystego ośrodka można przedstawić w postaci

$$F=F(I_1, I_2, I_3, T), \tag{2}$$

gdzie $T$ oznacza zmianę temperatury ciała, $I_k$ niezmienniki tensora odkształceń, określone wg następujących wzorów:

$$I_1=\varepsilon_{kk}, \quad I_2=1/2\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij}, \quad I_3=1/3\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{jk}\,\varepsilon_{ik}. \tag{3}$$

W wyżej podanych wzorach i dalszych, jeśli nie będzie specjalnego omówienia, wskaźniki przebiegają liczby od 1 do 3; przeprowadza się sumowanie według wskaźnika powtarzającego się.

Uwzględniając (2) i (3), równanie konstytutywne (1) przedstawiamy w postaci

$$\sigma_{ij}=f_1\,\delta_{ij}+f_2\,\varepsilon_{ij}+f_3\,\varepsilon_{ik}\,\varepsilon_{jk}, \tag{4}$$

przy czym $\delta_{ij}$ oznacza symbol Kroneckera oraz $f_i=\partial F/\partial I_i$.

Aproksymując $F$ za pomocą wielomianu względem $I_i$ oraz $T$, zostawiając wyrazy odkształcenia drugiego i trzeciego rzędu otrzymamy

$$
\begin{gathered}
F=A_{11}\,I_1^2+A_{12}\,I_2+A_{21}\,I_1^3+A_{22}\,I_1\,I_2+A_{23}\,I_3+B_{11}\,T^2+ \\
+B_{12}\,TI_1+B_{21}\,T^2\,I_1+B_{22}\,TI_2+B_{23}\,TI_1^2+B_{33}\,T^3\,.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Następnie przyjmujemy, że współczynnik $A_{21}$ oraz $A_{22}$ przeznaczone są po to, aby wprowadzić $A_{23}$. Wprowadzamy, uwzględniając powyższe przypuszczenie, (5) do (4) i otrzymujemy następującą zależność kwadratową;

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ij}=A_{11}\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}+A_{12}\,\varepsilon_{ij}+A_{21}\,\varepsilon_{kk}^2\,\delta_{ij}+A_{22}\,\varepsilon_{km}\,\varepsilon_{km}\,\delta_{ij}+ \\
+2A_{22}\,\varepsilon_{kk}\,\varepsilon_{ij}+B_{12}\,T\delta_{ij}+B_{21}\,T^2\,\delta_{ij}+2B_{23}\,\varepsilon_{kk}\,T\delta_{ij}+B_{22}\,\varepsilon_{ij}\,T\,.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Określimy dalej średnie odkształcenie $\varepsilon_0$, średnie naprężenie $\sigma_0$ oraz intensywność odkształceń ścinających $\varphi$:

$$
\varepsilon_0=1/3\varepsilon_{kk},\qquad \sigma_0=1/3\sigma_{kk},\qquad \varphi^2=\varepsilon_{km}\,\varepsilon_{km}-1/3\varepsilon_{kk}^2\,. \tag{7}
$$

Wykorzystując (6), otrzymujemy równanie

$$
\sigma_0=r_1\,\varepsilon_0+r_2\,T\,, \tag{8}
$$

przy czym

$$
\begin{gathered}
r_1=3A_{11}+9A_{21}\,\varepsilon_0+3A_{22}\,\varepsilon_0+A_{22}\,\varphi^2\,\varepsilon_0^{-1}+6B_{23}\,T+p\,, \\
p=A_{12}+6A_{22}\,\varepsilon_0+B_{22}\,T,\qquad r_2=B_{12}+B_{21}\,T\,.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Po przekształceniu (6) za pomocą wzorów (7)-(9), znajdujemy

$$
\sigma_{ij}-\delta_{ij}\,\sigma_0=p\,(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\,\varepsilon_0)\,. \tag{10}
$$

Zakładając, że w (10) $i=j$, mamy

$$
\begin{gathered}
\sigma_{11}-\sigma_0=p\,(\varepsilon_{11}-\varepsilon_0),\qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}\,. \\
\sigma_{33}-\sigma_0=p\,(\varepsilon_{33}-\varepsilon_0),
\end{gathered} \tag{11}
$$

Tu symbol $\overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}$ oznacza, że pozostałe wzory otrzymujemy drogą przestawienia indeksów 1 i 2.

Wyrażając w pierwszych dwóch równaniach (11) $\varepsilon_0$ przez $\sigma_0$ zgodnie z (8) oraz rozwiązując otrzymane równanie względem $\sigma_{11}$, $\sigma_{22}$, (uwzględniając warunek $\sigma_{33}=0$) otrzymujemy

$$
\sigma_{11}=p\,[2\,(1-3/2m)\,\varepsilon_{11}+(1-3m)\,\varepsilon_{22}-\alpha mT],\qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}, \tag{12}
$$

przy czym

$$
m=p/(2p+r_1),\qquad \alpha=-3r_2/p\,. \tag{13}
$$

Przekształcając trzecie równanie (11), uwzględniając zależność (8) i warunek $\sigma_{33}=0$, otrzymujemy na $\varepsilon_{33}$ następujące wzory:

$$
\varepsilon_{33}=m\,(r_1/p-1)\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+\alpha mT\,. \tag{14}
$$

Zgodnie z (10) i (12) związek pomiędzy składowymi naprężeń i deformacji ma następującą postać:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}=p\,[2\,(1-3/2m)\,\varepsilon_{11}+(1-3m)\,\varepsilon_{22}-\alpha mT]\,, \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2}}\,,\\
&\sigma_{12}=p\,\varepsilon_{12}, \quad \underleftarrow{\overrightarrow{2,3}}, \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,3}}\,,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

przy czym $p$, $m$ i $\alpha$ określane są wg wzorów (9) i (13).

Należy podkreślić, że we wszystkich otrzymanych wyżej rezultatach zakładano małe odkształcenia. Uogólniamy naszą teorię na obszar dużych odkształceń. Takie uogólnienie można osiągnąć, jeśli uwzględnić informacje zawarte w rozdziale III książki [4], z których wynika, że powyższe rezultaty pozostają w mocy przy dużych odkształceniach pod warunkiem, że będzie uwzględniona skończoność przemieszczeń oraz składowe naprężenia $\sigma_{ij}$ będą zastąpione przez wielkości $\sigma^*_{ij}$ wg wzorów:

$$
\sigma^*_{ij}=\frac{S^*_i}{S_i}\,\frac{\sigma_{ij}}{1+E_j}\,,
\tag{16}
$$

przy czym

$$
\begin{aligned}
&S^*_i/S_1=[(1+2\varepsilon_{22})\,(1+2\varepsilon_{33})-\varepsilon^2_{23}]^{1/2}, \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2}}, \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,3}}\,,\\
&E_1=(1+2\varepsilon_{11})^{1/2}-1, \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2}}, \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,3}}\,.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Zaniedbując w (16) (w ramach teorii kwadratowej) kwadraty odkształceń w porównaniu z jednością oraz uwzględniając, że objętościowe odkształcenia są małe względem $\Delta \ll 1$, otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
&\sigma^*_{11}=(1-2\varepsilon_{11})\,\sigma_{11}, \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2}}, \quad \sigma^*_{12}=(1-\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\,\sigma_{12}\,,\\
&\sigma^*_{13}=(1+\varepsilon_{22})\,\sigma_{13}, \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2}}\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Wprowadzając tu $\sigma_{ij}$ zgodnie z (15), mamy dla obszaru dużych odkształceń następujące prawo fizyczne:

$$
\begin{aligned}
\sigma^*_{11}=p\,[2\,(1-3/2m)\,\varepsilon_{11}&+(1-3m)\,\varepsilon_{22}-4\,(1-3/2m)\,\varepsilon^2_{11}\\
&-2\,(1-3m)\,\varepsilon_{11}\,\varepsilon_{22}-\alpha mT+2\alpha m\varepsilon_{11}T], \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2}}\,,\\
\sigma^*_{12}=p\,(\varepsilon_{12}-\varepsilon_{11}\,\varepsilon_{12}-\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{12}), &\quad \sigma^*_{13}=p\,(\varepsilon_{13}+\varepsilon_{13}\,\varepsilon_{22}), \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2}}\,,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

gdzie $p$, $m$ i $\alpha$ są określone za pomocą wzorów (9) i (13).

W związku z tym, że do wzorów na naprężenia $\sigma^*_{ij}$ wyrażonych przez $p$, $m$ i $\alpha$ wchodzi odkształcenie poprzeczne $\varepsilon_{33}$, podamy sposób określenia $\varepsilon_{33}$. W tym celu otworzymy następujący proces iteracyjny.

Załóżmy w pierwszym przybliżeniu

$$
\begin{aligned}
&r_1/p^{(1)}=1+3\beta, \quad m^{(1)}=1/3\,(1+\beta)\,,\\
&\beta=A_{11}/A_{12}, \quad p^{(1)}=A_{12}, \quad \alpha^{(1)}=-3B_{12}/A_{12}\,.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

W ten sposób, rozwiązując w pierwszym etapie przybliżenia liniowe zagadnienie fizyczne, otrzymamy w pierwszym przybliżeniu odkształcenia $\varepsilon^{(1)}_{ij}$ oraz naprężenia $\sigma^{*(1)}_{ij}$.

Odkształcenie poprzeczne $\varepsilon_{33}^{(1)}$ zgodnie z (14) przyjmie postać

$$(21)\qquad \varepsilon_{33}^{(1)}=m^{(1)}\left[(r_1/p)^{(1)}-1\right](\varepsilon_{11}^{(1)}+\varepsilon_{22}^{(1)})+\alpha^{(1)}m^{(1)}T.$$

Wprowadzając wielkości $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ do wzoru (7) określimy średnie odkształcenie $\varepsilon_0$ oraz intensywność odkształceń przemieszczenia w pierwszym przybliżeniu.

Podstawiając znalezione wielkości $\varepsilon_0^{(1)}$ i $\varphi^{(1)}$ do wzorów $p$, $m$ i $\alpha$ zgodnie z (9) i (13), otrzymamy wyżej wspomniane wielkości w drugim przybliżeniu.

Wprowadzając otrzymane $p^{(2)}$, $m^{(2)}$ i $\alpha^{(2)}$ do wzoru (19), otrzymamy zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami w drugim etapie przybliżenia. Rozwiązując w drugim etapie przybliżenia przedstawione zagadnienie, znajdziemy w drugim przybliżeniu odkształcenia $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ oraz naprężenia $\varepsilon_{ij}^{(2)}$. Przedstawiony proces przybliżenia można kontynuować aż do uzyskania niezbędnej dokładności.

Wyrazimy z kolei odkształcenia przez naprężenia. Zastępując we wzorze (15) wielkość $\sigma_{ij}^*$ przez $\sigma_{ij}$ zgodnie z (18) i zaniedbując kwadraty odkształceń w porównaniu z jednością ,otrzymujemy

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\sigma_{11}^*(1+2\varepsilon_{11})=p\left[2(1-3/2m)\varepsilon_{11}+(1-3m)\varepsilon_{22}-\alpha mT\right], \qquad \overleftrightarrow{1,2},\\ &\sigma_{12}^*(1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})=p\varepsilon_{12}, \qquad \sigma_{13}^*(1-\varepsilon_{22})=p\varepsilon_{13}, \qquad \overleftarrow{1,2}.\end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (22) względem odkształceń, po kolejnych przekształceniach otrzymamy następujące wzory:

$$(23)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_{11}&=1/\gamma\left[(2(p-\sigma_{22}^*)-3mp)\sigma_{11}^*-p(1-3m)\sigma_{22}^*+\right.\\ &\qquad\left.\alpha mp(p-2\sigma_{11}^*)T\right], \qquad \overleftrightarrow{1,2},\\ \varepsilon_{12}&=1/\gamma(p-\sigma_{11}^*-\sigma_{22}^*)(3-6m-2\alpha mT)\sigma_{12}^*,\\ \varepsilon_{13}&=1|\gamma\left[3(1-2m)(p-\sigma_{22}^*)-3(1-m)(\sigma_{11}^*+\sigma_{22}^*)+\right.\\ &\qquad\left.+6/p\sigma_{11}^*\sigma_{22}^*-\alpha m(p-2\sigma_{22}^*)T\right], \qquad \overleftrightarrow{1,2},\end{aligned}$$

gdzie

$$\gamma=3p^2(1-2m)-2p(2-3m)(\sigma_{11}^*+\sigma_{22}^*)+4\sigma_{11}^*\sigma_{22}^*.$$

W tym przypadku, podobnie jak i w przypadku wzorów (19), dla uwzględnienia poprzecznego odkształcenia tworzymy analogiczny proces iteracyjny.

Dla obszaru odkształceń skończonych zostały uzyskane równania konstytutywne (19) oraz (23).

## Literatura cytowana w tekście

1. A. E. Green and I. E. Adkins, *Large elastic deformations*, Oxford University Press, 1960.
2. W. T. Koiter, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Net. Ak. Wet., 1966.
3. Л. А. Толоконников, *О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости*, ПММ, XX, вып. 3, 1956.
4. В. В. Новожилов, *Основы нелинейной теории упругости*, ГИТТЛ, 80, Москва 1948.

INSTYTUT MECHANIKI, KAZAŃ, ZSRR.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 czerwca 1979 r.*