JAN SZMELTER

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA BŁONY METODĄ RÓŻNIC SKOŃCZONYCH Z UŻYCIEM SPECJALNEGO LICZYDŁA

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XX

SPIS TREŚCI

1. Myśl przewodnia metody

Wiele zagadnień matematycznej fizyki sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego Poissona

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-p, \tag{1}$$

w którym u jest poszukiwaną funkcją zmiennych x i y, a p daną funkcją tych zmiennych. Równanie (1) ma być spełnione w pewnym obszarze ograniczonym krzywą G.

Na tej krzywej funkcja u spełnia następujące warunki brzegowe:

(a) na części krzywej G funkcja u przyjmuje z góry zadane wartości brzegowe $\overline{u}$ (gdzie $\overline{u}$ jest funkcją punktu na krzywej G),

(b) na pozostałej części krzywej G pochodna $\partial u/\partial n$ w kierunku zewnętrznej normalnej n przyjmuje założone z góry wartości $\overline{p}$ (gdzie $\overline{p}$ jest funkcją punktu na krzywej G).

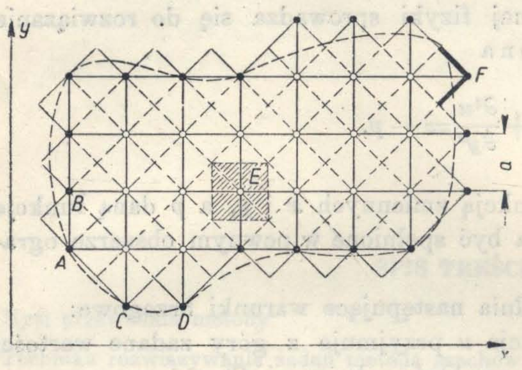
Takie równania występują np. w ruchu bezwirowym cieczy idealnej, w zagadnieniu przewodnictwa ciepła, w teorii skręcania prętów pryzmatycznych, w teorii zginania płyt, w teorii potencjału i innych.

Równanie (1) przedstawia także przesunięcia poprzeczne membrany rozpiętej na krzywej G, obciążonej ciśnieniem p, przy sile rozciągającej membranę równej 1. Brzeg membrany otrzymuje przesunięcia $\overline{u}$, a siła, którą ten brzeg działa na membranę, wynosi $\overline{p}$ (por. [1], § 137).

Ta ostatnia interpretacja równania Poissona, jako najbardziej obrazowa, służyć nam będzie przy dalszych rozważaniach.

Istnieje wiele metod rozwiązania zagadnienia membrany. Przy prostych kształtach krzywej G z powodzeniem stosuje się metody analityczne, które jednak praktycznie zawodzą dla nieco bardziej złożonych kształtów. Najbardziej uniwersalną i dogodną dla obliczeń praktycznych okazała się metoda różnic skończonych (por. [2], rozdz. 3).

Według metody różnic skończonych obszar membrany pokrywamy siatką kwadratową o boku a (rys. 1) równolegle do osi x i y. Prowadzimy przekątne tej siatki (linia kreskowana, rys. 1), które utworzą drobniejszą siatkę ukośną. Wzdłuż tych przekątnych prowadzimy linię łamaną, jako przybliżenie linii brzegowej membrany. Znaczymy wszystkie wierzchołki kwadratów siatki zasadniczej, leżące wewnątrz tej linii łamanej oraz na niej. Pierwsze z nich nazywamy węzłami wewnętrznymi, drugie węzłami brzegowymi. Wszystkie węzły łączymy «prętami» wzdłuż zasadniczej siatki kwadratowej. Wszystkie pręty muszą leżeć wewnątrz obszaru objętego linią łamaną. W ten sposób niektóre sąsiednie węzły brzegowe (np. A i B) będą połączone ze sobą prętem, a inne (np. C i D) nie będą. Zamiast szukać funkcji u w całym obszarze membrany ograniczymy się jedynie do wyznaczenia jej przybliżonej wartości w węzłach siatki. Obciążenie p ciągłe zastępujemy siłami P skupionymi w węzłach wewnętrznych, przypadających na obszar kwadratu o boku a, którego dany węzeł jest środkiem (np. w węźle E na rys. 1 umieszczamy wypadkową sił przypadających na zakreskowany kwadrat). Podobnie siły krawędziowe p zastępujemy siłami P skupionymi w węzłach brzegowych (np. w węźle F siła P jest wypadkową sił krawędziowych, działających na wykreśloną grubą linią odcinki linii łamanej). Oczywiście im siatka jest gęstsza, tym dokładniej możemy określić siły P i tym dokładniej przesunięcia węzłów u oddadzą przebieg funkcji u w całym obszarze.



Rys. 1

Według zasad rachunku różnic skończonych równanie (1) przekształca się na

$$P = nu - \sum_s u_s, \tag{2}$$

w którym P i u odpowiada sile i przesunięciu jakiegoś węzła siatki, n jest liczbą prętów wychodzących z tego węzła, u_s przesunięciami w węzłach połączonych prętami z węzłem rozpatrywanym i wreszcie sumowanie rozciąga się na wszystkie tego rodzaju węzły sąsiednie. Tak napisany wzór (2) przedstawia wartość sił nie tylko w węzłach wewnętrznych, ale również w węzłach brzegowych. Dla każdego węzła możemy zatem napisać po jednym równaniu (2). Równań będzie tyle, ile jest węzłów. Rozwiązanie postawionego na wstępie równania różniczkowego sprowadza się teraz do zadania następującego:

(a) w niektórych węzłach (będziemy je nazywali stałymi) podane są przesunięcia u,

(b) w pozostałych węzłach (które nazywać będziemy ruchomymi) założone są siły P.

Należy obliczyć przesunięcia u węzłów ruchomych i siły P w węzłach stałych tak, aby były spełnione równania (2) dla każdego węzła.

Główną trudność stanowi pierwsza część tego zadania, to znaczy określenie przesunięć węzłów ruchomych. Trudność polega na rozwiązaniu układu równań typu (2), których jest tyle, ile jest węzłów ruchomych. Trudność jest natury rachunkowej, spowodowanej dużą ilością niewiadomych. Jedną z licznych metod rozwiązywania układów równań tego rodzaju jest znana iteracyjna metoda Seidela, [3]. Southwell, [4], nadał jej interpretację fizyczną i rozpowszechnił pod nazwą «relaksacji» (tzn. odciążania).

Idea metody relaksacji jest następująca. Wyobraźmy sobie, że membrana została obciążona w węzłach siłami danymi P. Nadajemy dowolne przesunięcia u' ruchomym węzłom siatki, podpierając je (w myśli) na podnośnikach. Jeśliby przesunięcia te były takie, jak tego wymaga rozwiązanie, to siły obciążające P zostałyby całkowicie zrównoważone siłami rozciągającymi membranę i podnośniki nie przenosiłyby żadnej siły. Właściwe położenie podnośników (a tym samym przesunięcia u) poznamy więc po tym, że reakcje podnośników będą równe zeru. W dowolnym przypadku reakcje te nie będą jednak równe zeru i na ogół wyniosą

$$\Delta P = P - nu' + \sum_{s} u'_s. \tag{3}$$

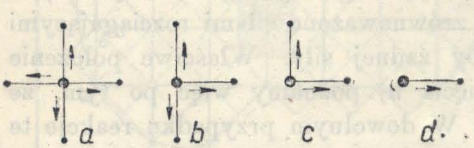
Reakcje powstają bowiem jako nadwyżka siły P nad siłą $P' = nu' - \sum_{s} u'_s$ wyliczoną z (2) dla przesunięć u'. Proces relaksacji polega na przyjęciu pewnego dowolnego położenia podnośników i następnego takiego ich przesuwania, aby malały reakcje ΔP. Najprościej uzyskamy to w ten sposób, że przesuniemy pojedynczy węzeł, w którym występuje największa reakcja, o pewną wielkość Δu, pozostawiając inne węzły nieruchome. Przesunięcie to dobieramy tak, aby towarzyszył mu w przesuwanym węźle spadek wartości siły o $n\Delta u$ do możliwie małej wielkości. Z (2) wynika, że temu spadkowi towarzyszyć będzie jednoczesny wzrost reakcji w węzłach sąsiednich o wartości Δu. Wygląda to tak, jakby z węzła poruszonego przesunięto wzdłuż prętów siłę Δu do każdego węzła sąsiedniego. Można dowieść, że przesuwając za pomocą tej metody coraz to inne węzły, możemy uzyskać spadek sił ΔP we wszystkich węzłach poniżej założonej dowolnej wartości. Innymi słowy, możemy znaleźć rozwiązanie układu równań (2) z dowolną, z góry założoną dokładnością.

Ten tok postępowania znalazł swój wyraz w rozmaitych sposobach tabelarycznego prowadzenia rachunków i ich zapisywania. Proponowana przez nas metoda, którą nazwać można metodą «szachów relaksacyjnych», zastępuje zapisy łatwiejszymi i szybszymi od nich ruchami pionków po odpowiedniej tablicy.

Wyobraźmy sobie, że tablica ta ma kształt siatki z rys. 1 i że obliczono według (3) wielkości ΔP, które należy «wygasić». Połóżmy na każdym węźle taką ilość «kamieni», która (według pewnej umówionej wartości, przypisywanej pojedynczemu kamieniowi) obrazować będzie siły ΔP.

Wówczas nadając jakiemuś węzłowi dodatnie przesunięcie Δu, równe wartości pojedynczego kamienia, będziemy musieli przesunąć z tego węzła po jednym kamieniu do węzłów sąsiednich, wzdłuż prętów siatki (według rys. 2, na którym węzeł poruszany zaznaczono punktem pogrubionym, a przesunięcia kamieni — strzałkami).

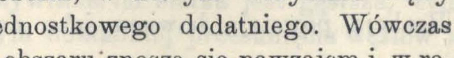
Reguła ta słuszna będzie dla wszystkich węzłów ruchomych siatki, nawet dla brzegowych, które połączone są z innymi węzłami mniejszą ilością prętów (rys. 2 *b*, 2 *c* i 2 *d*).



Rys. 2

Jeżeli nadamy jakiemuś węzłowi jednostkowe przesunięcie ujemne, to ruch pionków będzie przeciwny.

Z tego zasadniczego przesunięcia pojedynczego węzła o jednostkę wyprowadzamy przesunięcie «blokowe» całej grupy węzłów ruchomych o jednostkę. Niech na rys. 3 linia kreskowana, przechodząca przez środki prętów, wydziela z siatki zakreskowany obszar, w którym wszystkie węzły doznają równoczesnego przesunięcia jednostkowego dodatniego. Wówczas wszystkie ruchy kamieni wewnątrz tego obszaru znoszą się nawzajem i, w rezultacie, należy z rozpatrywanego obszaru «zsunąć» tylko po jednym kamieniu poprzez każdy pręt przecięty linią ograniczającą obszar.


Rys. 3

Widzimy, że przesuwając kamienie według tych zasad i notując odpowiednio przesunięcia węzłów moglibyśmy proces prowadzić tak długo, aż znikną wszystkie kamienie z szachownicy, co oznaczałoby całkowite wygaszenie sił ΔP. Powstają jednakże następujące zastrzeżenia:

1) aby proces doprowadzał do dokładnego wygaszenia sił, jednostka odpowiadająca jednemu kamieniowi powinna być mała i, co za tym idzie, ilość kamieni duża;

2) opisany sposób nie uwzględnia możliwości powstania w węzłach ujemnych sił.

Obydwie trudności zostały pokonane.

Pierwszą udało się pokonać w ten sposób, że początkowo przyjmuje się dużą wartość jednostki kamienia i proces relaksacji prowadzi się dotąd, aż siły ΔP zmniejszą się o połowę swej poprzedniej wartości. Wtedy następuje zamiana wartości kamienia na dwukrotnie mniejszą, ilość kamieni zostaje podwojona i relaksację prowadzi się znowu aż do zmiejszenia sił ΔP o połowę. W ten sposób, zmniejszając stopniowo wartość «pionów», możemy osiągnąć dowolną dokładność wygaszenia sił. Podobne postępowanie przyśpiesza również proces relaksacji, gdyż początkowo, gdy siły ΔP są duże, ruchy pojedynczego kamienia wygaszają je szybciej; pod koniec, gdy siły ΔP są małe, wygaszanie jest bardziej precyzyjne.

Tablica 1

Ilość kamieni na szachownicy	Wielkość pojedynczego kamienia		
	$5 \cdot 10^n$	$2 \cdot 10^n$	$1 \cdot 10^n$
	Wielkość siły, którą reprezentują kamienie na szachownicy		
0	$-20 \cdot 10^n$	$-8 \cdot 10^n$	$-4 \cdot 10^n$
1	$-15 \cdot 10^n$	$-6 \cdot 10^n$	$-3 \cdot 10^n$
2	$-10 \cdot 10^n$	$-4 \cdot 10^n$	$-2 \cdot 10^n$
3	$-5 \cdot 10^n$	$-2 \cdot 10^n$	$-1 \cdot 10^n$
4	$0 \cdot 10^n$	$0 \cdot 10^n$	$0 \cdot 10^n$
5	$+5 \cdot 10^n$	$+2 \cdot 10^n$	$+1 \cdot 10^n$
6	$+10 \cdot 10^n$	$+4 \cdot 10^n$	$+2 \cdot 10^n$
7	$+15 \cdot 10^n$	$+6 \cdot 10^n$	$+3 \cdot 10^n$
8	$+20 \cdot 10^n$	$+8 \cdot 10^n$	$+4 \cdot 10^n$
9	$+25 \cdot 10^n$	$+10 \cdot 10^n$	$+5 \cdot 10^n$

Drugą trudność opanowano w ten sposób, że do ilości kamieni, obrazujących wielkość siły ΔP, dodaje się liczbę stałą (4 sztuki).

W ten sposób powstaje tablica 1, w której, dla prostoty rachunków, stosuje się stopniowanie wielkości kamienia według szeregu: 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1,..., wygodniejszego w rachunkach od ścisłego połowiewienia tych wartości. Łatwo zauważyć, że jeżeli we wszystkich węzłach, w toku przesuwania kamieni, pozostaną ilości kamieni odpowiadające siłom $\Delta P = (-1, 0, +1, +2)$, to dalsze przesuwanie kamieni nie zmniejszy tych sił.

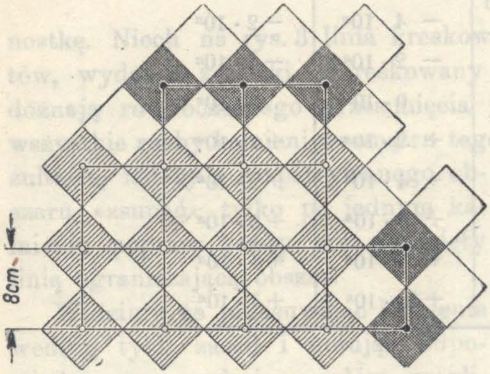
Na podstawie tej zasady można łatwo udowodnić, że przy pomocy dziewięciu kamieni daje się uzyskać wszystkie możliwości wyrażenia sił ΔP przez kamienie, a po zakończonej relaksacji można przejść do następnej ich wartości.

2. Technika rozwiązywania zadań metodą szachów relaksacyjnych

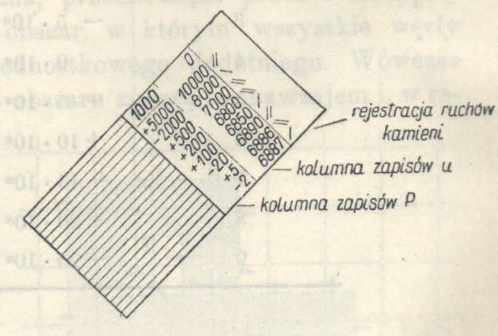
W tym rozdziale postaramy się w możliwie zwięzły sposób przedstawić praktyczną stronę rachunku. Podamy ją w formie pewnego rodzaju «regulaminu gry», który ułożony został z tą myślą, aby zasady wyłożone w poprzednim rozdziale ująć w możliwie prosty i jasny schemat. Według tego schematu zadanie może być rozwiązane również przez kogoś, kto nie zna założeń teoretycznych, jeżeli następujące punkty 1, 3, 4 i 5 zostaną ułożone przez stawiającego zagadnienie.

(1) Mając do rozwiązania równanie (1) z warunkami brzegowymi (a) i (b) trzeba zdecydować się na wybór gęstości siatki i narysować ją według rys. 1, zaznaczając wyraźnie węzły i pręty. Następnie należy odróżnić węzły stałe od ruchomych za pomocą różnych oznaczeń (np. czerwonym kolorem).

(2) Narysować tuszem lub atramentem siatkę w takiej skali, aby jej bok wynosił około 8 cm (rysunek może nie być bardzo staranny). Środki prętów połączyć tak, aby utworzyła się szachownica ukośna, pokazana na rys. 4. Zacieniować szaro pola szachownicy odpowiadające węzłom ruchomym, a czarno — węzłom stałym. Szare i czarne pola będą służyły dla układania i przesuwania kamieni. Każdemu szaremu i czarnemu polu odpowiada pole białe, usytuowane względem niego jak na rys. 5, w którym



Rys. 4



Rys. 5

prowadzić będziemy zapisy. W polu tym będzie kolumna zapisów sił P, kolumna zapisów przesunięć u oraz reszta pola do rejestracji ruchów kamieni.

(3) Dane przesunięcia węzłów stałych wpisać atramentem na czele kolumny u w białym polu. Na czele kolumny P wpisać atramentem dane siły P w węzłach ruchomych i podkreślić. Dalsze zapisy będą prowadzone ołówkiem.

(4) Wpisać oszacowane z gruba (np. równe zeru) początkowe wartości przesunięć na czele kolumny u węzłów ruchomych.

(5) Obliczyć (najlepiej na arytmometrze) siły ΔP według wzoru (3) dla węzłów ruchomych. Siły te wpisujemy w kolumnie P, w podziale na sumy

algebraiczne, złożone ze składników w postaci $5 \cdot 10^n, 2 \cdot 10^n, 1 \cdot 10^n$ (n = liczba całkowita) tak, aby każdy składnik powtarzał się najwyżej jeden raz. Na przykład zamiast 3783 wypisujemy kolumnę jak niżej z lewej strony:

$$\begin{array}{r} +5000 \\ -2000 \\ +500 \\ +200 \\ +100 \\ -20 \\ +5 \\ -2 \end{array}$$

(6) Na polach zakreskowanych kładziemy po 4 kamienie. Na polach czarnych dowolną ilość kamieni można dokładać lub zbierać w czasie «gry».

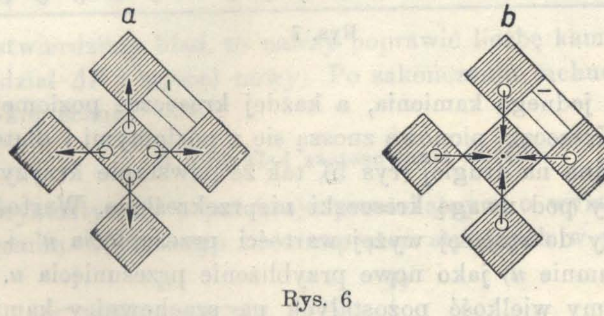
(7) Przyjmujemy, że początkową wartością kamienia jest najwyższa liczba występująca wśród podziałów ΔP na składniki (według p. 6). Liczby te przekreślamy i

(a) dodajemy na polu szarym jeden kamień, jeśli była ona dodatnia,

(b) zabieramy z tego pola 1 kamień, jeśli była ona ujemna.

(8) Przystępujemy do przesunięć relaksacyjnych. Będą na nie się składały następujące przesunięcia zasadnicze:

(a) przesunięcie pojedyncze dodatnie (rys. 6*a*); jest to przesunięcie po jednym kamieniu z rozpatrywanego pola zacieniowanego na sąsiednie pola zacieniowane (ruchome albo stałe), przy jednoczesnym nakreśleniu w prawym górnym sąsiednim polu pionowej kreseczki **|**, rejestrującej to przesunięcie (na rysunku 6*a* występują cztery pola sąsiednie, ale może ich być na brzegu mniej);



Rys. 6

(b) przesunięcie pojedyncze ujemne (rys. 6*b*), przeciwne do poprzedniego; piony mają przeciwny ruch, a kreseczka rejestrująca jest pozioma **—**;

(c) przesunięcie grupowe dodatnie; wykonujemy je w trzech fazach.

Faza pierwsza. Zsuwamy z pól zacieniowanych na brzegu pewnego obszaru po jednym kamieniu wzdłuż prętów, wykonując połowę przesunięcia, tzn. pozostawiając kamień w narożniku na granicy pomiędzy polem, z którego go zsuwamy, a polem, na które go nasuwamy (rys. 7*a*).

Faza druga. Kamienie zatrzymane w pół drogi wyraźnie wydzielają pewien obszar z całości siatki. W białych polach, odpowiadających polom zacieniowanym (z prawej strony u góry), objętych tym obszarem, wpisujemy po jednej kreseczce pionowej **|** rejestrującej to przesunięcie (rys. 7*b*).

Faza trzecia. Kończymy przesunięcie zapoczątkowane w pierwszej fazie. Rozbicie tego przesunięcia na trzy fazy ma na celu zapobieżenie omyłkom przy zaznaczaniu kreseczek rejestrujących.

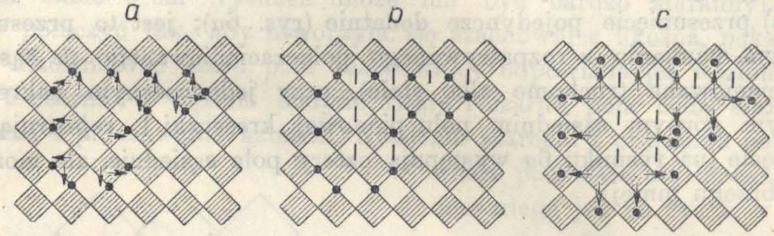
(d) Przesunięcie grupowe ujemne. Ruch pionków jest przeciwny w stosunku do poprzedniego przypadku. Kreseczki rejestrujące są poziome zamiast pionowych.

(9) Proces relaksacyjny prowadzimy tak długo, aż

(a) przeciętna ilość kamieni w większych częściach szachownicy wyniesie dla jednego węzła ruchomego cztery,

(b) ilość kamieni w każdym węźle ruchomym wynosić będzie od 3 do 6 włącznie.

(10) Po zakończeniu relaksacji przystępujemy do zapisania rejestrowanych przesunięć. Każdej kreseczce pionowej odpowiada przesunięcie dodatnie,



Rys. 7

równe wartości jednego kamienia, a każdej kreseczce poziomej — przesunięcie ujemne. Kreseczki pionowe znoszą się z poziomymi i dlatego możemy zapisywać je jedna na drugiej (rys. 5), tak że powstanie krzyżyk +. W rachunku bierzemy pod uwagę kreseczki nieprzekreślone. Wartość tych kreseczek dodajemy do stojącej wyżej wartości przesunięcia u' i zapisujemy pod nią (w kolumnie u) jako nowe przybliżenie przesunięcia u.

(11) Zmieniamy wielkość pozostałych na szachownicy kamieni na następną niższą wielkość z szeregu 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500,...

Postępujemy tu według tablicy 2.

(12) Dodajemy dodatkowe kamienie tak jak w p. 7, skreślając z zapisu rozwinięcia ΔP, otrzymanego na początku, równoważną wartość.

(13) Prowadzimy znowu relaksację według p. 8 i 9, obliczamy zarejestrowane kreseczki według p. 10 i przeprowadzamy wymianę według p. 11 i 12.

(14) W rezultacie otrzymujemy ciąg wartości przesunięć, zapisywanych w kolumnie u, i jednocześnie skreślamy kolejne liczby podziału ΔP. Proces zatrzymujemy wówczas, gdy osiągniemy już żądaną dokładność.

(15) W czasie rachunków, po kilku zmianach wielkości kamieni, sprawdzamy na arytmometrze wyniki. Sprawdzenie polega na tym, że biorąc za podstawę ostatnie wartości u obliczamy według (3) wartości ΔP, które po-

winny być równe sumie wielkości, reprezentowanej przez kamienie leżące na polu szarym, i wielkości nieprzekreślonych składników podziału P. Sprawdzenie to należy przeprowadzać po zakończeniu relaksacji, gdy wszystkie kreski rejestrujące są przekreślone i ani jeden kamień nie leży na polu białym.

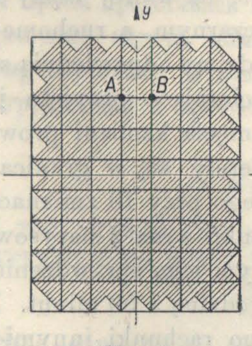
Tablica 2

<table>
<tr><th rowspan="2">Pozostało kamieni z poprzedniej relaksacji</th><th colspan="4">Z a m i a n a</th></tr>
<tr><th>$10 \cdot 10^n \to 5 \cdot 10^n$</th><th>$5 \cdot 10^n \to 2 \cdot 10^n$</th><th colspan="2">$2 \cdot 10^n \to 1 \cdot 10^n$</th></tr>
<tr><td>3</td><td>odjąć 1 kamień</td><td>odjąć 1 kamień oraz przesunąć 1 kamień na pole białe</td><td>odjąć 1 kamień</td><td rowspan="3">oraz nasunąć kamienie z odpowiednich pól białych (o ile się one tam znajdują)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>bez zmian</td><td>bez zmian</td><td>bez zmian</td></tr>
<tr><td>5</td><td>dodać 1 kamień</td><td>dołożyć 1 kamień na pole węzła (zaciemnione) i jeszcze 1 kamień na pole białe</td><td>dodać 1 kamień</td></tr>
<tr><td>6</td><td>dodać 2 kamienie</td><td>dodać 3 kamienie</td><td colspan="2">dodać 2 kamienie</td></tr>
</table>

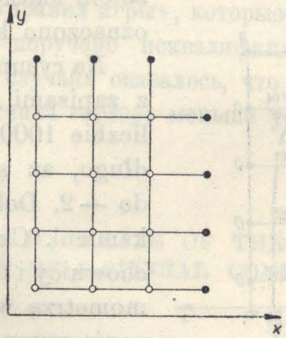
Jeżeli stwierdzimy błąd, to należy poprawić liczbę kamieni (lub wymazać błędny podział ΔP i wpisać nowy). Po zakończeniu rachunków sprawdzenie takie jest konieczne.

3. Przykład zastosowania metody

Pręt pryzmatyczny o przekroju prostokątnym o wymiarach 7×9 poddano skręcaniu. Wyznaczyć linie naprężeń stycznych w przekroju.



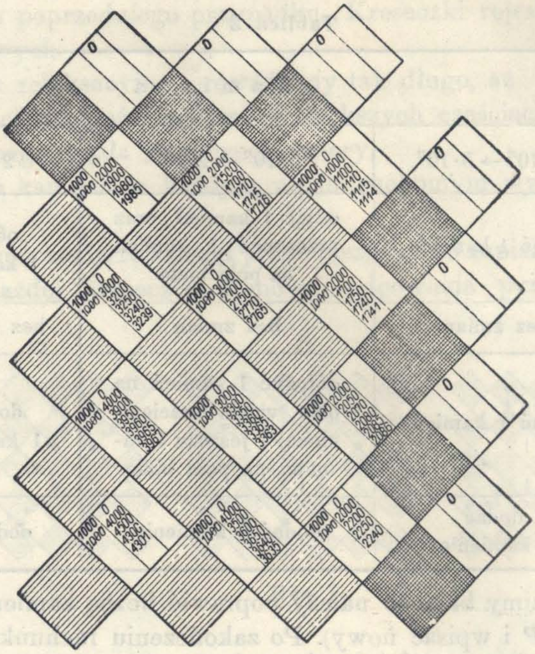
Rys. 8



Rys. 9

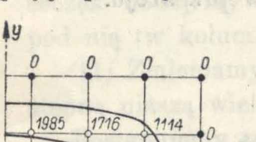
W rozwiązaniu opieramy się na analogii membranowej, według której linie naprężeń stycznych są warstwicami membrany rozpiętej na brzegu konturu przekroju, obciążonej równomiernie i o przesunięciach na brzegu równych zeru. Membranę zastępujemy siatką według rys. 8.

Wobec symetrii wystarczy rozpatrywać jedną ćwiartkę prostokąta. Przy przesunięciach punkty A i B przesuwają się stale jednakowo, a więc ani jeden



Rys. 10

kamień nie przejdzie wzdłuż pręta łączącego te punkty. Zatem wszystkie pręty przecięte osiami symetrii należy opuścić. Dla ćwiartki otrzymamy zatem siatkę z rys. 9, na której węzły nieruchome oznaczono kolorem czarnym, a ruchome — białym.



Rys. 11

Na rysunku 10 widzimy odpowiednią szachownicę z zapisami. Siły obciążające przyjęto jako równe liczbie 1000. Przesunięcia kamieni prowadzono tak długo, aż siły zawierały się w granicach od -1 do $+2$. Dokonano tego przy 10 zmianach wielkości kamieni. Czas rachunku wraz z narysowaniem szachownicy i trzykrotnym jego sprawdzeniem na arytmometrze wynosił godzinę i 50 minut. Dla porównania przeprowadzono rachunki innymi sposobami. Okazało się, że najszybciej osiągnięto wynik metodą «szachów relaksacyjnych». Ponadto okazało się, że metoda powyższa wymaga od rachującego najmniejszej uwagi i wysiłku.

Znając przesunięcia różnych punktów membrany łatwo można nakreślić jej warstwice (rys. 11).

Literatura cytowana w tekście

[1] M. T. Huber, *Teoria sprężystości,* Kraków 1948 i 1950.

[2] L. W. Kantorowicz i W. I. Kryłow, *Priblizennyje mietody wysszewo analiza,* Moskwa-Leningrad 1950.

[3] W. N. Fadiejewa, *Wyczislitielnyje mietody liniejnoj algiebry,* Moskwa-Leningrad 1950.

[4] R. V. Southwell, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Londyn 1946.

Резюме

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕМБРАНЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЧЕТОВ

Уравнение мембраны (1), в котором u обозначает перемещение, а p нагрузку, замещено системой уравнений (2), по известному методу конечных разностей. Уравнение написано для квадратной решетки (фиг. 1), причем дает соотношения между силой P нагрузки, приходящейся на данный узел решетки, перемещением u в этом узле, а также перемещениями u_s в соседних узлах. Решение системы этих уравнений производится методом последовательных приближений, названным Р. В. Саусвеллом «методом релаксации». Вместо того, чтобы производить вычисления таблично, употреблено «шахматную доску» (фиг. 4) в форме решетки, на каждом узле которой помещено некоторое количество камней, соответствующее значению узловой силы P, согласно таблице 1. Процесс разгрузки узлов состоит в передвигании этих камней в соседние узлы, согласно фиг. 6. В начале счета придают камням высшее значение и с большим приближением погашают узловые силы. В последующих стадиях придают камням все меньшие значения, погашая остатки узловых сил с все большей точностью. Этот прием представлен в форме «правил игры», которые на столько просты, что решение задачи может быть поручено неквалифицированному вспомогательному персоналу. В конкретных случаях оказалось, что этот метод гораздо менее трудоемкий и требует от счетчика гораздо меньше усилий.

Summary

SOLUTION OF THE MEMBRANE PROBLEM BY MEANS OF THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES WITH THE USE OF A SPECIAL COMPUTATION DEVICE

The membrane equation, (1), where u denotes the displacement and p the load, is replaced by the system of equations, (2), using the well known method of finite differences. This equation was established for a square net (fig. 1), and expresses the relation between the load P, corresponding to the

given nodal point of the net, and the displacements of the neighbouring points, u_s.

The solution is obtained by means of the method of successive approximations called by R. V. Southwell the «relaxation method». Instead of computations arranged in table form, a kind of «chess board» (fig. 4) in the form of a net is used.

On each nodal point of the net a certain number of «stones» is laid, corresponding to the nodal force P (table 1).

The process of relieving the nodal points consists in shifting the «stones» to the neighbouring points (fig. 6). At the beginning of the computation higher values are assumed for the «stones» and the nodal forces are suppressed roughly. The values assumed in subsequent stages are progressively lower, the suppressing of forces becoming more and more accurate. This procedure is regulated in the form of a kind of «play rules», which are simple enough to permit the solution of the problem to be passed over to unqualified personnel.

This method in numerical examples proved to be more rapid than other methods and at the same time less tedious for the calculator.

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 października 1953 r.