ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 18 (1970)

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

SZCZEPAN BORKOWSKI (GLIWICE)

1. Wstęp

Przedmiotem niniejszej pracy jest zastosowanie metody różnic skończonych do przybliżonego rozwiązania zagadnień początkowo-brzegowych i brzegowych termosprężystości. Zagadnienia te wiążą się z określeniem pól termicznych i przemieszczeniowych, a dalej — z określeniem pól naprężeń występujących w ośrodku ciągłym.

Przedstawione tutaj rozwiązania odnoszą się do zagadnień liniowych w sensie geometrycznym i fizycznym, sam zaś ośrodek uważa się jako izotropowy i jednorodny. Układ równań podany jest we współrzędnych prostokątnych. Dla tych założeń poprawnymi pozostają równania, które tutaj przytacza się zgodnie z oznaczeniami stosowanymi w monografii W. NOWACKIEGO [6]. Przez wprowadzenie do tego układu równań reprezentacji macierzowej nadajemy im bardzo zwartą postać, która pozwala wykorzystać (po zastosowaniu operatorów różnicowych) blokowy zapis macierzowy. Taki układ liniowych równań algebraicznych w metodzie różnic skończonych bywa najwygodniejszy dla obliczeń numerycznych. Na podstawie pracy W. E. SZAMANSKIEGO [10] uogólniono podane tam rozwiązanie na przypadek spotykanych w rozważanych zagadnieniach równań parabolicznych, eliptycznych i hiperbolicznych dla czterech zmiennych.

Przedstawiona w pracy problematyka jest ważna przy rozwiązywaniu problemów termosprężystości, odnoszących się do ośrodków o takiej konfiguracji przestrzennej lub dla zadań o takich warunkach brzegowych, dla których zawodzą tradycyjne metody obliczeń analitycznych.

2. Określenia wstępne

Zanim przystąpimy do rozwiązania zadania, podamy kilka oznaczeń, które dalej wykorzystamy.

Występująca zmienna t (czas) należeć będzie do zbioru

$$(2.1) \qquad \mathcal{T} = \{t: \quad t_0 < t \leqslant T < \infty\}.$$

Zbiór ten w przypadku lewostronnego domknięcia oznaczać będziemy symbolem $\overline{\mathcal{T}}$, gdzie $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{t_0\}$.

Jeżeli używać będziemy zmiennej czasowej dyskretnej $t_r = t_0 + h_4 p_4$, gdzie $r = p_4 = 1, ..., N_4 = (T - t_0)/h_4$, a h_4 jest podziałką metody różnicowej, to zbiór dyskretny zawierający punkty t_r określimy symbolem

(2.2) $$\mathcal{T}_h = \{t_r : \quad t_r = t_0 + h_4 p_4,\ p_4 = 1, 2, ..., N_4\}.$$

W przypadku włączenia elementu t_0 zbiór taki oznaczymy symbolem $\mathcal{T}_h$.

Otwarty podzbiór przestrzeni kartezjańskiej $\mathcal{C}_3$, zawierający zbiór punktów ośrodka ciągłego

(2.3) $$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z),$$

umówimy się oznaczać symbolem $\mathcal{V}$. Będzie to zgodnie z przyjętymi wyżej założeniami zbiór zawierający zmienne przestrzenne rozpatrywanego ośrodka. Powierzchnię brzegową tego zbioru oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{G}$. Zachodzi oczywista równość $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cup \mathcal{G}$, gdzie $\overline{\mathcal{V}}$ oznacza zbiór domknięty.

Oprócz zbiorów $\mathcal{V}$ i $\mathcal{T}$ wprowadzimy jeszcze podzbiór czterowymiarowej przestrzeni $\mathcal{C}_4$ (czasoprzestrzeni), który przedstawiać będzie iloczyn kartezjański zbiorów $\mathcal{V}$ i $\mathcal{T}$; podzbiór ten oznaczymy symbolem

(2.4) $$\mathcal{B} = \mathcal{V} \times \mathcal{T} \overset{df}{=} \{\langle \mathbf{x}, t\rangle : \mathbf{x} \in \mathcal{V} \wedge t \in \mathcal{T}\}.$$

W (2.4) symbol $\langle\ \rangle$ oznacza parę uporządkowaną. W przypadku domknięcia zbioru $\mathcal{B}$, używać będziemy symbolu $\overline{\mathcal{B}}$, gdzie $\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{V}} \times \overline{\mathcal{T}}$.

Ograniczając obszar $\mathcal{V}$ prostopadłościanem

(2.5) $$\mathcal{P} = \{x_i : \quad a_i < x_i < b_i, \quad i = 1, 2, 3\},$$

a następnie dzieląc przedziały $[a_i, b_i]$ na n_i dowolnych części punktami $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{n_i-1}}$, gdzie

(2.6) $$a_i = x_{i_0} < x_{i_1} < ... < x_{i_{n_i-1}} < x_{i_{n_i}} = b_i,$$

i oznaczając przez h_i długość przedziałów $[x_{i_{k_i-1}}, x_{i_{k_i}}]$, $k_i = 1, ..., n_i$, przeprowadzimy przez te punkty podziału płaszczyzny równoległe do podstaw prostopadłościanu. Płaszczyzny te określone są równaniami

(2.7) $$x_{i_{p_i}} = x_{i_0} + h_i p_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad p_i = 0, 1, ..., n_{p_i-1}, n_{p_i}$$

i przecinają się wzdłuż krawędzi, które wyznaczają siatkę prostokątną. Siatka taka wyznacza węzły, które dzielić będziemy na wewnętrzne i brzegowe [3]. Zbiór węzłów wewnętrznych (brzegowych) umówimy się oznaczać symbolem $\mathcal{V}_h$ ($\mathcal{G}_h$). Zbiór węzłów wewnętrznych i brzegowych oznaczymy natomiast symbolem $\overline{\mathcal{V}_h}$. Analogicznie do (2.4) iloczyn kartezjański punktów należących do zbiorów dyskretnych $\mathcal{V}_h$ i $\mathcal{T}_h$ oznaczymy przez $\mathcal{B}_h$, a jego domknięcie przez $\overline{\mathcal{B}}_h$. Węzły mają współrzędne, które oznaczać będziemy przez $\mathbf{x}_p$, gdzie $\mathbf{x}_p = (x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3})$.

3. Sprzężone dynamiczne układy równań termosprężystości

3.1. Określenie zadania. Należy wyznaczyć układ funkcji u_i, $i = 1, 2, 3$ lub inaczej funkcję wektorową $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ oraz funkcję Θ, które zależne są od zmiennych $\mathbf{x}$, t i które spełniają w obszarze walcowym $\mathcal{B} = \mathcal{V} \times \mathcal{T}$ sprzężony dynamiczny układ równań termosprężystości

$$
\begin{gathered}
\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{j,ji} + X_i = \gamma \Theta_{,i} + \rho \ddot{u}_i, \\
\Theta_{,jj} - \frac{1}{k}\dot{\Theta} - \eta \dot{u}_{j,j} = -\frac{Q}{k}, \quad \text{jeśli} \quad \langle \mathbf{x}, t\rangle \in \mathcal{B}, \text{ a } \eta \neq 0
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

oraz warunki brzegowe na powierzchni $\mathcal{G}$

$$
\begin{gathered}
[\mathbf{L}_{1\mathbf{x}} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]]_{\mathbf{x}\in\mathcal{G}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_g, t) = \mathbf{u}_g(t), \quad \text{jeśli} \quad t \in \overline{\mathcal{T}}, \\
[L_{2\mathbf{x}} [\Theta(\mathbf{x}, t)]]_{\mathbf{x}\in\mathcal{G}} = \Theta(\mathbf{x}_g, t) = \Theta_g(t), \quad \text{jeśli} \quad t \in \overline{\mathcal{T}}
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

i początkowe dla $t = t_0$

$$
\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_t^0(\mathbf{x}), \quad \Theta(\mathbf{x}, t_0) = \Theta^0(\mathbf{x}), \tag{3.3}
$$

gdy $\mathbf{x} \in \overline{\mathcal{V}}$.

Wielkości μ, λ, γ, ρ, k, η są stałe; X_i, Q są to znane funkcje żądanej klasy. Występująca w $(3.2)_1$ macierz operatorów $\mathbf{L}_{1\mathbf{x}}$ mieć będzie w ogólnym przypadku jednakową budowę tylko dla zmiennych $\mathbf{x}_g$ należących do obszarów $\mathcal{G}_i$ brzegu $\mathcal{G}$. Podobszary $\mathcal{G}_i$ spełniają relacje $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}$ oraz $\bigcup_i \mathcal{G}_i = \mathcal{G}$. Podobna uwaga odnosi się i do operatora $L_{2\mathbf{x}}$. Symbolicznie zaznaczono to umieszczając obok dolnych wskaźników indeksy $\mathbf{x}$. Tak określone operatory przedstawiają też wszystkie możliwe typy zagadnień brzegowych. Będziemy przyjmować dalej, iż operatory te są liniowe. Zakładać będziemy również, że sformułowane powyżej zagadnienie, podobnie jak i dalej określone zadania, mają rozwiązania i to jedyne [1 i 4].

Przystąpimy obecnie do wykazania, że spełniony jest podstawowy

LEMAT 1. *Jeżeli do układu równań* (3.1) *wprowadzimy następujące macierze*:

$$
\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \Theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -X_1 \\ -X_2 \\ -X_3 \\ \frac{1}{k} Q \end{bmatrix};
$$

$$
\mathbf{D}_{00}^{20} = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \lambda+2\mu \\ \mu \\ \mu \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{00}^{02} = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda+2\mu \\ \mu \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{20}^{00} = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \\ \lambda+2\mu \\ -1 \end{bmatrix}; \tag{3.4}
$$

$$
\mathbf{D}_{00}^{11} = \begin{bmatrix} d_{12} = d_{21} = \lambda+\mu \\ \textit{pozostałe } d_{ij} = 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{10}^{10} = \begin{bmatrix} d_{13} = d_{31} = \lambda+\mu \\ \textit{pozostałe } d_{ij} = 0 \end{bmatrix},
$$

$$\mathbf{D}_{10}^{01}=\begin{bmatrix} d_{23}=d_{32}=\lambda+\mu \\ pozostałe\ \ d_{ij}=0\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}_{00}^{10}=\begin{bmatrix} d_{14}=-\gamma \\ pozostałe\ \ d_{ij}=0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{00}^{01}=\begin{bmatrix} d_{24}=-\gamma \\ pozostałe\ \ d_{ij}=0\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}_{10}^{00}=\begin{bmatrix} d_{34}=\gamma \\ pozostałe\ \ d_{ij}=0\end{bmatrix},$$

(3.4) [c.d.]
$$\mathbf{D}_{01}^{10}=\begin{bmatrix} d_{41}=\eta \\ pozostałe\ \ d_{ij}=0\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}_{01}^{01}=\begin{bmatrix} d_{42}=-\eta \\ pozostałe\ \ d_{ij}=0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{11}^{00}=\begin{bmatrix} d_{43}=\eta \\ pozostałe\ \ d_{ij}=0\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}_{01}^{00}=\begin{bmatrix} d_{44}=-\dfrac{1}{k} \\ pozostałe\ \ d_{ij}=0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{02}^{00}=-\rho\mathbf{E}$$

oraz dla pozostałych wartości $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\mathbf{D}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}=\mathbf{0},$$

gdzie występujące powyżej macierze $\mathbf{D}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$, są kwadratowymi macierzami o wymiarach 4×4, a symbol $\mathbf{0}$ oznacza macierz zerową, to wtedy układ tych równań ma reprezentację macierzową kształtu następującego:

$$\sum_{i+j+k+l=1}^{2} \mathbf{D}_{kl}^{ij}\,\mathbf{v}_{x^i y^j z^k t^l}(\mathbf{x},t)=\mathbf{f}(\mathbf{x},t). \tag{3.5}$$

Symbolem $\mathbf{v}_{x^i y^j z^k t^l}$ oznaczono pochodną cząstkową funkcji wektorowej $\mathbf{v}$, która napisana wyraźniej ma postać $\partial^{i+j+k+l}\mathbf{v}/\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k\,\partial t^l$.

Dowód. Układ równań (3.1) można doprowadzić do postaci

$$L_{mn}\,v_n=-f_m, \tag{3.6}$$

gdzie występujące operatory L_{mn} zestawione są w pracy [6]. W równaniu (3.6) przyjęto $v_n=u_n$ dla $1\leqslant n\leqslant 3$ oraz $f_m=X_m$ dla $1\leqslant m\leqslant 3$ i $v_4=\Theta$, $f_4=Q/k$. Operatory L_{mn}, które są liniowe i zawierają pochodne pierwszego i drugiego rzędu, łatwo przedstawić w postaci sumy iloczynów współczynników i pochodnych cząstkowych,

$$L_{mn}(\,)=\sum_{i+j+k+l=1}^{2} d_{mn}^{ijkl}(\,)_{x^i y^j z^k t^l}. \tag{3.7}$$

Wprowadzimy teraz do (3.7) macierze

$$\mathbf{D}_{kl}^{ij}\overset{df}{=}[d_{mn}^{ijkl}], \tag{3.8}$$

w których $m\,(n)$ oznacza kolejny wiersz (kolumnę) macierzy $\mathbf{D}_{kl}^{ij}$, natomiast liczby i, j, k, l mogą przyjmować wartości 0, 1, 2 lecz takie, aby spełnione były warunki $i+j+k+l=1$ lub 2. Podstawiając (3.7) do (3.6), a następnie uwzględniając w tak otrzymanej formie pierwszą i drugą zależność z układu (3.4) oraz równanie (3.8), otrzymamy w końcu (3.5).

Wniosek 1. Ponieważ podane warunki brzegowe i początkowe określone są również liniowymi operatorami, przeto, podobnie jak to uczyniono poprzednio, możemy wprowadzić macierze $\tilde{\mathbf{d}}_{kl}^{ij}$, $\bar{\mathbf{d}}_{kl}^{ij}$, zależne kolejno od budowy operatorów warunków brzegowych (3.2) i początkowych (3.3). Operator warunków początkowych jest określony przez $(3.3)_2$, możemy więc napisać

$$\mathbf{d}_{01}^{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.8'}$$

a dla pozostałych $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\mathbf{d}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = \mathbf{0}.$$

Wprowadzając macierze

$$\mathbf{f}_g(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_g(t) \\ \Theta_g(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_t(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t^0(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

gdzie w (3.9) symbolem $\mathbf{u}$ oznaczono teraz kolumnowe ustawienie funkcji u_1, u_2, u_3, możemy również warunki brzegowe i początkowe napisać w sposób analogiczny do (3.5), tj. w postaci

$$\begin{gathered} \sum_{i+j+k+l=p_L}^{q_L} \tilde{\mathbf{d}}_{kl}^{ij} \, \mathbf{v}_{x^i y^j z^k t^l}(\mathbf{x}_g, t) = \mathbf{f}_g(t), \\ \sum_{i+j+k+l=1}^{1} \bar{\mathbf{d}}_{kl}^{ij} \, \mathbf{v}_{x^i y^j z^k t^l}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{f}_t^0(\mathbf{x}). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Warunki początkowe określone pierwszym i trzecim równaniem (3.3) wyznaczają wartości odpowiednich funkcji w chwili t_0; pozostaje zatem określenie tych funkcji tylko dla $t \neq t_0$. Należy o tym pamiętać przy budowaniu równań algebraicznych metody różnic skończonych.

Granice sumowania we wzorze $(3.10)_1$ zależne są od rzędu operatorów $\mathbf{L}_{1x}$, L_{2x}; symbolicznie zaznaczono to umieszczając przy indeksach sumacyjnych wskaźnik L.

Przedstawiony powyżej sposób sprowadzenia zagadnienia do postaci (3.5) i (3.10) nie jest jedyny. Można wydzielić pochodne względem czasu, sprowadzając zadanie do innej postaci, którą otrzymamy z (3.5) przeprowadzając w nieco inny sposób sumowanie, mianowicie

$$\left[\sum_{i+j+k=1}^{2} \mathbf{D}_{k0}^{ij} \, \mathbf{v}_{x^i y^j z^k}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}_{02}^{00} \, \mathbf{v}_{tt} + \left[\sum_{i+j+k=0}^{2} \mathbf{D}_{kl}^{ij} \, \mathbf{v}_{x^i y^j z^k}(\mathbf{x}, t)\right]_t = \mathbf{f}. \right. \tag{3.11}$$

4. Sprzężone równania termosprężystości dla zagadnienia quasi-statycznego

Sformułowanie zadania. Należy wyznaczyć funkcję $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ oraz $\Theta(\mathbf{x}, t)$, które czynią zadość sprzężonym równaniom ($\eta \neq 0$) quasi-statycznego zadania termosprężystości w obszarze walcowym $\mathcal{V} \times \mathcal{T}$, postaci następującej:

$$\begin{gathered} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \gamma \Theta_{,i}, \\ \Theta_{,jj} - \frac{1}{k} \dot{\Theta} - \eta \dot{u}_{j,j} = -\frac{Q}{k}, \quad \text{jeśli} \quad \eta \neq 0 \end{gathered} \tag{4.1}$$

oraz warunkom brzegowym (3.2) i warunkom początkowym $(3.3)_{1,3}$. Reprezentację macierzową tego zadania otrzymujemy z wniosku drugiego.

Wniosek 2. W przypadku, gdy problem początkowo-brzegowy występuje dla sprzężonych równań, lecz dla zagadnienia quasi-statycznego termosprężystości, wtedy równanie macierzowe otrzymujemy przyjmując formalnie $\rho = 0$. Równania (3.5) lub (3.11) pozostają poprawne, jednak należy pamiętać o tym, że macierz $\mathbf{D}_{02}^{00}$ jest macierzą zerową, czyli że

$$\mathbf{D}_{02}^{00} = \mathbf{0}. \tag{4.2}$$

5. Dynamiczne równania termosprężystości

W przypadku gdy nie uwzględniamy sprzężenia pola przemieszczeń i pola temperatur ($\eta = 0$), to zadanie określa się jak poniżej.

Określenie zadania. Należy wyznaczyć funkcję $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i $\Theta(\mathbf{x}, t)$ czyniącą zadość w obszarze $\mathcal{V}\times\mathcal{T}$ następującym równaniom dynamicznej niesprzężonej termosprężystości:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{j,ji} + X_i = \gamma\Theta_{,i} + \rho\ddot{u}_i, \qquad \Theta_{,jj} - \frac{1}{k}\dot{\Theta} = -\frac{Q}{k} \tag{5.1}$$

oraz warunkom brzegowym (3.2) i początkowym (3.3). Dalej rozpatrywać będziemy tylko równanie $(5.1)_1$. W tym przypadku pole temperatur otrzymujemy z rozwiązania problemu początkowo-brzegowego dla równania $(5.1)_2$. Równaniem tym jednak ze względu na bardzo obszerne jego omówienie w literaturze zajmować się tutaj nie będziemy. Podamy więc dalej reprezentację macierzową równań $(5.1)_1$ mając na uwadze lemat analogiczny do lematu pierwszego. Przejdziemy do sformułowania lematu drugiego.

Lemat 2. *Jeżeli do układu rownań $(5.1)_1$ wprowadzimy macierze*

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} -X_1 + \gamma\Theta_{,x} \\ -X_2 + \gamma\Theta_{,y} \\ -X_3 + \gamma\Theta_{,z} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{00}^{20} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \lambda+2\mu \\ \mu \\ \mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{00}^{02} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \mu \\ \lambda+2\mu \\ \mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{20}^{00} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \mu \\ \mu \\ \lambda+2\mu \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{B}_{00}^{11} = \begin{bmatrix} d_{12} = d_{21} = \lambda+\mu \\ \text{pozostałe } d_{ij} = 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{10}^{10} = \begin{bmatrix} d_{13} = d_{31} = \lambda+\mu \\ \text{pozostałe } d_{ij} = 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{10}^{01} = \begin{bmatrix} d_{23} = d_{32} = \lambda+\mu \\ \text{pozostałe } d_{ij} = 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{02}^{00} = -\rho\mathbf{E}$$

oraz dla pozostałych $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\mathbf{B}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = \mathbf{0},$$

to układ ten otrzyma postać następującą:

$$\mathbf{B}_{00}^{11}\,\mathbf{u}_{xy} + \mathbf{B}_{10}^{10}\,\mathbf{u}_{xz} + \mathbf{B}_{10}^{01}\,\mathbf{u}_{yz} + \mathbf{B}_{00}^{20}\,\mathbf{u}_{xx} + \mathbf{B}_{00}^{02}\,\mathbf{u}_{yy} + \mathbf{B}_{20}^{00}\,\mathbf{u}_{zz} + \mathbf{B}_{02}^{00}\,u_{tt} = \boldsymbol{\varphi} \tag{5.3}$$

lub w bardziej zwartej formie

$$(5.4)\qquad \sum_{i+j+k+l=1}^{2} \mathbf{B}^{ij}_{kl}\, \mathbf{u}_{x^i y^j z^k t^l}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t).$$

Dowód przeprowadza się podobnie jak dla lematu 1. Podkreślamy, że występujące w (5.2) macierze $\mathbf{B}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2$, są macierzami kwadratowymi o wymiarach 3×3.

Wniosek 3. Jeżeli do układu $(3.2)_1$ i $(3.3)_{1,2}$ wprowadzimy macierze

$$(5.5)\qquad \boldsymbol{\varphi}_g(t) = [\mathbf{u}_g(t)], \quad \boldsymbol{\varphi}^0_t(\mathbf{x}) = [\mathbf{u}^0(\mathbf{x})],$$

gdzie symbol $\mathbf{u}$ oznacza kolumnowe ustawienie współrzędnych u_1, u_2, u_3 oraz odpowiednie macierze dla operatorów warunków brzegowych, oznaczone tutaj symbolicznie przez $\tilde{\mathbf{b}}^{ij}_{kl}$ i $\bar{\mathbf{b}}^{ij}_{kl}$, to równania te otrzymają postać

$$(5.6)\qquad \begin{aligned} &\sum_{i+j+k+l=p_L}^{q_L} \tilde{\mathbf{b}}^{ij}_{kl}\, \mathbf{u}_{x^i y^j z^k t^l}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varphi}_g(t), \\ &\sum_{i+j+k+l=1}^{1} \bar{\mathbf{b}}^{ij}_{kl}\, \mathbf{u}_{x^i y^j z^k t^l}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varphi}^0_t(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ponieważ jeden z operatorów warunków początkowych ma formę $\partial/\partial t$, przeto wolno nam napisać

$$(5.7)\qquad \mathbf{b}^{00}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix},$$

a dla pozostałych $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\mathbf{b}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = \mathbf{0}.$$

6. Równania termosprężystości dla zagadnienia quasi-statycznego

Określenie zadania. Należy wyznaczyć funkcje $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\Theta(\mathbf{x}, t)$, czyniące zadość w obszarze $\mathcal{V} \times \mathcal{T}$ równaniom postaci

$$(6.1)\qquad \mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu)\, u_{j,ji} + X_i = \gamma \Theta_{,i}, \quad \Theta_{,jj} - \frac{1}{k}\dot{\Theta} = -\frac{Q}{k}$$

oraz warunkom brzegowym (3.2) i początkowym $(3.3)_{1,3}$. Reprezentację macierzową tego zadania uzyskujemy z wniosku czwartego.

Wniosek 4. Jeżeli rozpatrujemy problem początkowo-brzegowy dla niesprzężonych równań ($\eta = 0$) i zagadnienia quasi-statycznego termosprężystości, to w tym przypadku równanie macierzowe, podobnie jak poprzednio [por. (4.2)], otrzymujemy z (5.4) przyjmując

$$(6.2)\qquad \mathbf{B}^{00}_{02} = \mathbf{0}.$$

Uwagi końcowe. W przypadku zagadnień stacjonarnych istnieje możliwość wykorzystania podanych uprzednio równań; należy jednak wtedy pamiętać o znikaniu pochodnych czasowych, co odbija się na elementach odpowiednich macierzy. Ponieważ w tym przypadku zadanie sprowadza się do odpowiedniego problemu brzegowego, przeto należy pamiętać o podaniu warunków ustalenia ośrodka w przestrzeni (uniemożliwienie ruchów sztywnych ośrodka).

Z tak sformułowanych zagadnień początkowo-brzegowych wynika, iż rozpatrywane problemy mogą być ujęte w postaci macierzowej jednym zwięzłym zapisem

$$(6.3)\qquad \sum_{i+j+k+l=m_\alpha}^{n_\alpha} \mathbf{D}^{\alpha}_{ijkl}(\mathbf{x})\, \mathbf{v}_{x^i y^j z^k t^l}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}, t), \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Macierze $\mathbf{D}^{\alpha}_{ijkl}$, $\alpha = 1, 2, 3$, występujące we wzorze (6.3), są macierzami liczbowymi, przyporządkowanymi: układowi równań termosprężystości ($\alpha = 1$), warunkom brzegowym ($\alpha = 2$) lub początkowym ($\alpha = 3$). Dla przykładu, jeśli rozpatrujemy zadanie określone w p. 5, to dla $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ mamy: $m_1 = 1$, $n_1 = 2$, a macierze $\mathbf{D}^{1}_{ijkl}$, $\mathbf{f}_1$ określone są przez (5.2); dla $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ uzyskujemy: $m_2 = p_L$, $n_2 = q_L$, a macierze $\mathbf{D}^{2}_{ijkl}$ należy zastąpić macierzami $\widetilde{\mathbf{b}}^{ij}_{kl}$ [równania $(5.6)_1$]; wreszcie dla $\mathbf{x} \in \overline{\mathcal{V}}$ otrzymujemy $m_3 = 1$, $n_3 = 1$, a macierze $\mathbf{D}^{3}_{ijkl}$ należy zastąpić przez $\mathbf{b}^{ij}_{kl}$ [równania $(5.6)_2$]. W rozpatrywanym tutaj przykładzie układ równań (5.3) jest typu hiperbolicznego. Podobną analizę można przeprowadzić dla każdego rozpatrywanego poprzednio zadania.

W przypadku gdy mamy do czynienia z jednym równaniem, np. równaniem przewodnictwa ciepła, to należy macierze $\mathbf{D}_{ijkl}$ zastąpić odpowiednimi liczbami.

W drugiej części pracy zastosujemy jako przykład dla jednego równania z układu (6.3) metodę różnic skończonych i przedstawimy końcowy układ równań liniowych tej metody w postaci dogodnej dla techniki maszyn cyfrowych. Szczegółowy tok postępowania przedstawimy tam dla przypadku określonego w p. 3 i to dla tej części zadania, która określona jest równaniem (3.5).

7. Zastosowanie metody różnic skończonych

Do rozwiązania sformułowanego uprzednio zagadnienia początkowo-brzegowego, które, jak wykazano, wyraża się układem równań typu (6.3), zastosujemy metodę różnic skończonych. Wyprowadzenie równań algebraicznych tej metody przeprowadzimy sposobem, który w przypadku dwu i trzech zmiennych stosowany był w monografii [10].

Przejdziemy teraz do zbudowania operatorów różnicowych korzystając przy tym z odpowiednich wyników podanych w [3], s. 271 i [10], s. 82, które ujmiemy tutaj jako

LEMAT 3. *Jeżeli założymy, że* h_α, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ *jest przyrostem (podziałką metody rożnicowej) kolejno zmiennych dyskretnych* $x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}, t_r$; $\mathbf{b}^{i_1 i_2 i_3 i_4}_{j_1 j_2 j_3 j_4}(\mathbf{p}, r)$ *funkcją określoną na dyskretnym zbiorze zawierającym punkt* $\mathbf{x}_\mathbf{p}$, t_r *(na co wskazują indeksy* $j_1 j_2 j_3 j_4$*), zależną od kształtu pochodnej* $\partial^{i_1+i_2+i_3+i_4}\mathbf{v}/\partial x^{i_1}\partial y^{i_2}\partial z^{i_3}\partial t^{i_4}$ *(na co* *wskazują indeksy $i_1\, i_2\, i_3\, i_4$), to każde wyrażenie przybliżające pochodną cząstkową możemy napisać w postaci następującej:*

$$
(7.1)\qquad \frac{\partial^{i_1+i_2+i_3+i_4}\mathbf{v}}{\partial x^{i_1}\partial y^{i_2}\partial z^{i_3}\partial t^{i_4}} = \sum_{\substack{j_k=p_k-\alpha_k\\(k=1,2,3,4)}}^{p_k+\beta_k} \frac{1}{h_1^{i_1}h_2^{i_2}h_3^{i_3}h_4^{i_4}}\,\mathbf{b}^{i_1i_2i_3i_4}_{j_1j_2j_3j_4}(\mathbf{p}, r)\,\mathbf{v}_{j_1j_2j_3j_4} + \varepsilon^{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{P}, r),
$$

gdzie $\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{p}, r)\to 0$, gdy $h_\alpha \to 0$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$, $p_4 = r$, a α_k, β_k *są liczbami zależnymi od kształtu wyrażenia przybliżającego.*

Dowód lematu trzeciego wraz z oszacowaniem błędu przeprowadzić można wykorzystując wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych. Pochodna występująca po lewej stronie równania (7.1) jest wzięta w punkcie $(\mathbf{x}_p, t_r)$. Wykorzystując poprzednio sformułowane lematy udowodnimy teraz następujące

TWIERDZENIE. *Jeżeli pozostaną spełnione założenia podane w lemacie 1 oraz 3, samo zaś rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego z założenia istnieje i jest jednoznaczne, to przybliżone rozwiązanie tego zadania sprowadza się do rozwiązania układu algebraicznych równań liniowych z niewiadomymi będącymi wspołrzędnymi wektorów, których jest co najmniej tyle, ile punktów w zbiorze $\mathcal{B}_h$.*

Dowód. Wprowadźmy następujące skrócone oznaczenia dla $\langle \mathbf{x}_p, t_r\rangle \in \mathcal{B}_h$:

$$
\mathbf{D}_{ijkl} \stackrel{df}{=} \mathbf{D}^{i_1i_2i_3i_4},
$$

$$
(7.2)\qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_p, t_r)\,\mathbf{f}_{pr} \stackrel{df}{=} \mathbf{f}_{p_1p_2p_3p_4},
$$

$$
\mathbf{v}_{j_1j_2j_3j_4} \stackrel{df}{=} \mathbf{v}(x_{j_1}, y_{j_2}, z_{j_3}, t_{j_4}),
$$

w których $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ jest rozwiązaniem problemu wyrażonego równaniem (6.3). Rozwiązanie to istnieje z założenia. Jeżeli podstawimy tak napisane równości dokładne (7.1) i (7.2) do (3.5), to po prostych przekształceniach otrzymamy dla każdego węzła wewnętrznego równanie

$$
(7.3)\qquad \sum_{\substack{j_k=p_k-\alpha_k\\(k=1,2,3,4)}}^{p_k+\beta_k} \mathbf{C}^{p_1p_2p_3p_4}_{j_1j_2j_3j_4}\,\mathbf{v}_{j_1j_2j_3j_4} = \mathbf{f}_{p_1p_2p_3p_4} + \varepsilon(\mathbf{p}, r),
$$

gdzie przyjęto

$$
(7.4)\qquad \mathbf{C}^{p_1p_2p_3p_4}_{j_1j_2j_3j_4} \stackrel{df}{=} \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=1}^{2} \frac{\mathbf{D}^{i_1i_2i_3i_4}}{h_1^{i_1}h_2^{i_2}h_3^{i_3}h_4^{i_4}}\,\mathbf{b}^{i_1i_2i_3i_4}_{j_1j_2j_3j_4}(\mathbf{p}, r).
$$

We wzorze (7.3) $\varepsilon(\mathbf{p}, r)$ jest zależne od wszystkich błędów $\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{p}, r)$ dla poszczególnych pochodnych oraz $\varepsilon(\mathbf{p}, r)\to 0$ gdy $h_\alpha \to 0$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$. Bierzemy teraz pod uwagę równanie różnicowe (dokładne), obejmujące wszystkie węzły wewnętrzne $\langle \mathbf{x}_p, t_r\rangle \in \mathcal{B}_h$. Występujące w nich wektory niewiadome oznaczymy symbolem $\mathbf{w}_{j_1j_2j_3j_4}$. Zachodzi więc

$$
(7.5)\qquad \sum_{\substack{j_k=p_k-\alpha_k\\(k=1,2,3,4)}}^{p_k+\alpha_k} \mathbf{C}^{p_1p_2p_3p_4}_{j_1j_2j_3j_4}\,\mathbf{w}_{j_1j_2j_3j_4} = \mathbf{f}_{p_1p_2p_3p_4}.
$$

W węzłach $(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}, t_r)$ mamy teraz wartości $\mathbf{w}_{p_1p_2p_3p_4}$ oraz $\mathbf{v}_{p_1p_2p_3p_4}$, z których pierwsze są przybliżeniami dla drugich. W przypadku, gdy podana metoda różnicowa będzie zbieżną, to przy zagęszczonej sieci rozwiązania $\mathbf{w}_{p_1p_2p_3p_4}$ równania różnicowego (7.5) będą zmierzały do wartości rozwiązania dokładnego równania (6.3) w węzłach sieci, tzn. zachodzić będzie $\mathbf{w}_{p_1p_2p_3p_4} - \mathbf{v}_{p_1p_2p_3p_4} \to 0$, gdy $h_\alpha \to 0$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ dla wszystkich punktów $\langle \mathbf{x}_p, t_r \rangle \in \mathcal{B}_n$.

Występujące w $(7.2)_1$ macierze $\mathbf{D}^{i_1i_2i_3i_4}$ mają wymiar 4×4.

Będziemy przekształcać dalej układ (7.5) doprowadzając go do postaci bardziej przydatnej do obliczeń. W tym celu ustalimy wskaźniki p_1, p_2 i p_3. Wskaźnik p_4, który powiązany jest ze zbiorem $\mathcal{T}_h$, niech przebiega ciąg liczb $1, \ldots, N_4 = (T - t_0)/h_4 \overset{df}{=} n_{p_{123}}$. Oznaczmy dalej symbolami $\mathbf{w}_{j_1j_2j_3}$ i $\mathbf{f}_{p_1p_2p_3}$ następujące macierze kolumny:

$$(7.6)\qquad \mathbf{w}_{j_1j_2j_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{j_1j_2j_31} \\ \mathbf{w}_{j_1j_2j_32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{w}_{j_1j_2j_3n_{j_{123}}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{p_1p_2p_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{p_1p_2p_31} \\ \mathbf{f}_{p_1p_2p_32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{f}_{p_1p_2p_3n_{p_{123}}} \end{bmatrix}.$$

Przyjmując w równaniach (7.5) kolejno $p_4 = 1, 2, \ldots, n_{p_{123}}$ i uwzględniając w nich zależności (7.6), otrzymamy

$$(7.7)\qquad \sum_{\substack{j_k = p_k - \alpha_k \\ (k=1,2,3)}}^{p_k+\beta_k} \mathbf{A}^{p_1p_2p_3}_{j_1j_2j_3} \mathbf{w}_{j_1j_2j_3} = \mathbf{f}_{p_1p_2p_3}.$$

W równaniu (7.7) przez $\mathbf{A}^{p_1p_2p_3}_{j_1j_2j_3}$ oznaczono macierz blokową o wymiarach $n_{p_{123}} \times n_{j_{123}}$, gdzie jako element wymiaru liczony jest jeden blok 4×4. Budowa tej macierzy jest następująca:

$$(7.8)\qquad \mathbf{A}^{p_1p_2p_3}_{j_1j_2j_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{p_1p_2p_31}_{j_1j_2j_31} & \mathbf{C}^{p_1p_2p_31}_{j_1j_2j_32} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{C}^{p_1p_2p_3n_{p_{123}}}_{j_1j_2j_3\,n_{j_{123}}-1} & \mathbf{C}^{p_1p_2p_3n_{p_{123}}}_{j_1j_2j_3\,n_{j_{123}}} \end{bmatrix}.$$

Ustalamy następnie wskaźniki p_1 i p_2; wskaźnik p_3 niech przebiega taki ciąg, aby dyskretny zbiór punktów zawierał wszystkie punkty wewnętrzne leżące na linii równoległej do osi z. Zbiór ten zawiera więc punkty $z_{p_3} = z_{0g} + p_3 h_3$, gdzie $p_3 = 1, 2, \ldots, n_{p_{12}}$. Tutaj z_{0g} oznacza pierwszy punkt wewnętrzny, a $n_{p_{12}}$ jest liczbą określającą ostatni punkt wewnętrzny, który znajduje się na wspomnianej powyżej linii. Taki sposób wyrażania wymaga założenia wypukłości obszaru $\mathcal{V}$; w przypadku innych obszarów nie wszystkim liczbom z ciągu $1, 2, \ldots, n_{p_{12}}$ odpowiadać będą punkty wewnętrzne. Liczba punktów tego zbioru wynosi więc $n_{p_{12}}$. Jeżeli wprowadzimy do (7.7) macierze kolumny

$$\text{(7.9)} \qquad \mathbf{w}_{j_1 j_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{j_1 j_2 1} \\ \mathbf{w}_{j_1 j_2 2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{w}_{j_1 j_2 n_{j_{12}}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{p_1 p_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{p_1 p_2 1} \\ \mathbf{f}_{p_1 p_2 2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{f}_{p_1 p_2 n_{p_{12}}} \end{bmatrix}$$

i przyjmiemy, że p_3 przebiegać będzie ciąg liczb 1, 2, ..., $n_{p_{12}}$, to (7.7) otrzyma postać

$$\text{(7.10)} \qquad \sum_{\substack{j_k = p_k - \alpha_k \\ (k=1,2)}}^{p_k + \beta_k} \mathbf{A}_{j_1 j_2}^{p_1 p_2} \mathbf{w}_{j_1 j_2} = \mathbf{f}_{p_1 p_2},$$

w której macierz $\mathbf{A}_{j_1 j_2}^{p_1 p_2}$ ma kształt następujący:

$$\text{(7.11)} \qquad \mathbf{A}_{j_1 j_2}^{p_1 p_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{j_1 j_2 1}^{p_1 p_2 1} & \mathbf{A}_{j_1 j_2 2}^{p_1 p_2 1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_{j_1 j_2\, n_{j_{12}}-1}^{p_1 p_2\, n_{p_{12}}} & \mathbf{A}_{j_1 j_2\, n_{j_{12}}}^{p_1 p_2\, n_{p_{12}}} \end{bmatrix}.$$

Macierz (7.11) jest macierzą blokową o wymiarach $n_{p_{12}} \times n_{j_{12}}$, gdzie jako wymiar przyjęto macierz blokową $n_{p_{123}} \times n_{j_{123}}$; ostatecznie więc będzie to macierz blokowa o wymiarach $(n_{p_{123}} + n_{p_{12}}) \times (n_{j_{123}} + n_{j_{12}})$, gdzie elementem wymiaru będzie blok 4×4.

Ustalimy z kolei indeks p_1; wskaźnik p_2 przebiega ciąg liczb $1, ..., n_{p_1} = n_1$. Jeżeli wprowadzimy do równań (7.10) następujące macierze-kolumny:

$$\text{(7.12)} \qquad \mathbf{w}_{j_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{j_1 1} \\ \mathbf{w}_{j_1 2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{w}_{j_1 n_{j_1}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{p_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{p_1 1} \\ \mathbf{f}_{p_1 2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{f}_{p_1 n_{p_1}} \end{bmatrix}$$

i przyjmiemy w tych równaniach, że indeks p_2 przebiega ciąg liczb $1, 2, ..., n_{p_1}$ przy podobnych zastrzeżeniach jak dla wskaźnika p_3, to (7.10) możemy zanotować w postaci

$$\text{(7.13)} \qquad \sum_{j_1 = p_1 - \alpha_1}^{p_1 + \beta_1} \mathbf{A}_{j_1}^{p_1} \mathbf{w}_{j_1} = \mathbf{f}_{p_1},$$

gdzie przez $\mathbf{A}_{j_1}^{p_1}$ oznaczono

$$\text{(7.14)} \qquad \mathbf{A}_{j_1}^{p_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{j_1 1}^{p_1 1} & \mathbf{A}_{j_1 2}^{p_1 1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_{j_1\, n_{j_1}-1}^{p_1\, n_{p_1}} & \mathbf{A}_{j_1\, n_{j_1}}^{p_1\, n_{p_1}} \end{bmatrix}.$$

Równanie (7.14) określa macierz blokową o wymiarach $(n_{p_{123}} + n_{p_{12}} + n_{p_1}) \times$ $\times (n_{j_{123}} + n_{j_{12}} + n_{j_1})$, gdzie jako podstawę wymiaru przyjęto blok 4×4. Jeżeli w końcu założymy w (7.13), że p_1 (j_1) przebiega ciąg liczb 1, ..., m (1, ..., n) przy analogicznych zastrzeżeniach jak dla wskaźnika p_3, i przyjmiemy macierz blokową kształtu

$$\underset{1}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^1 & \mathbf{A}_2^1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{n-1}^m & \mathbf{A}_n^m \end{bmatrix}, \tag{7.15}$$

posiadającą wymiar $(n_{p_{123}}+n_{p_{12}}+n_{p_1}+m) \times (n_{j_{123}}+n_{j_{12}}+n_{j_1}+n)$, gdzie jako podstawę wymiaru przyjęto blok 4×4, oraz wprowadzimy macierze kolumny

$$\underset{1}{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{w}_m \end{bmatrix}, \quad \underset{1}{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix}, \tag{7.15'}$$

to postać równania metody różnic skończonych dla równania typu (3.5) napisanego też jako (6.3); gdy $a = 1$, jest następująca:

$$\underset{1}{\mathbf{A}}\underset{1}{\mathbf{w}} = \underset{1}{\mathbf{f}}. \tag{7.16}$$

W (7.16) wektory będące elementami macierzy $\underset{1}{\mathbf{w}}$ określone są na rozszerzonym zbiorze dyskretnym $(\mathcal{V}_h \cup \mathcal{V}_h')\times(\mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}_h')$. Zbiory $\mathcal{V}_h'$, $\mathcal{T}_h'$ pojawiają się w wyniku zastąpienia operatorów układu równań operatorami różnicowymi: w otoczeniu brzegu $\mathcal{G}_h$ czy zbioru $\{t_0\}$ (lub $\{T\}$) wychodzimy bowiem poza punkty zbioru $\mathcal{V}_h\times\mathcal{T}_h$, co powoduje konieczność włączenia do ostatniego zbioru nowych elementów, które zawarte są właśnie w zbiorach $\mathcal{V}_h'$ i $\mathcal{T}_h'$.

Do zupełnie analogicznej postaci można doprowadzić warunki $(3.10)_{1,2}$, napisane też jako (6.3), gdy $a = 2, 3$; będą one miały postać

$$\underset{2}{\mathbf{A}}\underset{2}{\mathbf{w}} = \underset{2}{\mathbf{f}}, \quad \underset{3}{\mathbf{A}}\underset{3}{\mathbf{w}} = \underset{3}{\mathbf{f}}, \tag{7.17}$$

gdzie występujące w (7.17) macierze blokowe $\underset{2}{\mathbf{A}}$ i $\underset{3}{\mathbf{A}}$ buduje się w sposób pokazany dla macierzy $\underset{1}{\mathbf{A}}$. W (7.17) wektory macierzy $\underset{2}{\mathbf{w}}$ określone są na rozszerzonym zbiorze $(\mathcal{G}_h \cup \mathcal{V}_h'')\times(\mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}_h'')$, a wektory macierzy $\underset{3}{\mathbf{w}}$ na zbiorze $\{t_0\} \cup \mathcal{T}_h'''$, gdzie zbiory $\mathcal{V}_h''$, $\mathcal{T}_h''$ i $\mathcal{T}_h'''$ są dyskretnymi zbiorami punktów, wynikającymi z przybliżenia operatorów różniczkowych, kolejno warunków brzegowych i początkowych: takie przybliżenia z reguły określone są na liczniejszym zbiorze punktów, niż to wynika z warunków brzegowych czy początkowych. Przy pewnym wyborze schematu różnicowego (sposobu przybliżenia) lub prostocie warunków brzegowych może zachodzić jednak $\mathcal{V}_h'' \cap \mathcal{T}_h'' \cap \mathcal{T}_h''' = \Phi$, gdzie Φ oznacza zbiór pusty.

Uwzględniając w równaniach (7.16) i (7.17) znane wartości $\mathbf{w}$, określone równaniami $(3.3)_{1,3}$, możemy zmniejszyć liczbę niewiadomych, a otrzymane w ten sposób zredukowane układy uporządkować. Uporządkowanie to rozumieć będziemy w tym sensie, że z każdej trójki trzech macierzy $\underset{i}{\mathbf{A}}, \underset{i}{\mathbf{w}}, \underset{i}{\mathbf{f}}$ $(i = 1, 2, 3)$ zbudujemy kolejno po jednej macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{w}, \mathbf{f}$, co zaznaczymy symbolicznie

$$\mathbf{A} = p_A(\underset{1}{\mathbf{A}}, \underset{2}{\mathbf{A}}, \underset{3}{\mathbf{A}}), \quad \mathbf{w} = p_w(\underset{1}{\mathbf{w}}, \underset{2}{\mathbf{w}}, \underset{3}{\mathbf{w}}), \quad \mathbf{f} = p_f(\underset{1}{\mathbf{f}}, \underset{2}{\mathbf{f}}, \underset{3}{\mathbf{f}}), \tag{7.18}$$

tak że po takim uporządkowaniu grupę trzech równań będzie można napisać w postaci jednego równania, kształtu

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{f}. \tag{7.19}$$

Teraz $\mathbf{A}$ jest kwadratową macierzą blokową o wymiarach $q \times q$, gdzie q jest liczbą niewiadomych wektorów funkcji; $\mathbf{w}$ przedstawia macierz-kolumnę wektorów funkcji należących do dyskretnego, rozszerzonego zbioru punktów $(\overline{\mathcal{V}}_h \cup \mathcal{V}_c) \times \times (\mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}_c)$. Tutaj zbiory $\mathcal{V}_c$ i $\mathcal{T}_c$ są dyskretnymi zbiorami punktów, wynikającymi z przybliżeń różnicowych, operatorów, warunków brzegowych i początkowych oraz operatorów samych równań. Zbiory te są sumą zbiorów poprzednio określonych, mianowicie $\mathcal{V}_c = \mathcal{V}'_h \cup \mathcal{V}''_h$, a $\mathcal{T}_c = \mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}'_h \cup \mathcal{T}''_h \cup \mathcal{T}'''_h$. W ten sposób otrzymujemy układ równań różnicowych, niezbędny do wyznaczenia wszystkich niewiadomych funkcji przemieszczeń i temperatur. Ze względu na ogólność określenia zarówno obszaru jak i warunków brzegowych oraz operatorów różnicowych liczba q nie jest tutaj wyznaczona. Wielkość tę, która określa liczbę niewiadomych wektorów, można łatwo wyznaczyć w przypadku przyjęcia konkretnego obszaru, sprecyzowania warunków brzegowych oraz określenia wyrażeń przybliżających pochodne.

Równość (7.19) kończy dowód twierdzenia.

8. Uwagi końcowe

Rozwiązywanie układu równań typu (7.19) jest w ogólnym przypadku możliwe jedynie na maszynach cyfrowych jedną z metod podanych np. w [5] lub w [10].

Dalsze szczegółowe badania, dotyczące takich zagadnień jak szybkość zbieżności czy stabilność (równania paraboliczne i hiperboliczne) mogą być rozpatrywane dla określonego już problemu brzegowego. W ogólności problemy te są bardzo trudne i, o ile wiadomo, nie stanowiły przedmiotu badań w jakimś bardziej ogólnym ujęciu [7].

Próbę zbudowania bardziej szczegółowych algorytmów w zastosowaniu do dynamicznych zagadnień, lecz przy dosyć prostym zadaniu początkowo-brzegowym (obszar prostopadłościenny, pierwsze zadanie brzegowe), przedstawiono w pracy A. A. Samarskiego [9]. Zastosowanie otrzymanych tam wyników do termosprężystości podano w pracy B. A. Baturowa [8]. Bardziej szczegółowy przegląd prac związanych między innymi i z metodami numerycznymi termosprężystości podano w [2].

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda ujmuje problematykę możliwie jak najogólniejszą; z tego powodu nie rości sobie pretensji do rozwiązania szczegółowego wszystkich nasuwających się problemów, których jest oczywiście cała klasa. Problemami tymi zajmować się będziemy w dalszych pracach.

Literatura cytowana w tekście

1. B. A. Boley, J. H. Weiner, *Theory of Thermal Stress*, New York 1960.
2. S. Borkowski, *Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych* (lata 1965 – 1967), Mech. Teor. Stos., 2, 7 (1969), 107 – 153.
3. L. Collatz, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, Warszawa 1960.
4. M. Krzyżański, *Równania różniczkowe rzędu drugiego*, 1, Warszawa 1957.
5. G. N. Lance, *Numerical methods for high speed computers*, London 1960.
6. W. Nowacki, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1966.
7. R. D. Richtmyer, *Difference methods for initial-value problems*, New York 1958.
8. Б. А. Батуров, *К решению задач теории термоупругости на ЭЦВМ локально-одномерным методом А. А. Самарского*, Вопр. Киб. Выч. Мат., 5, Ташкент 1966, 75 – 84.
9. А. А. Самарский, *Экономичные разностные схемы для гиперболической системы уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости*, Журн. Выч. Мат. Мат. Физ., 1, 5 (1965), 34 – 43.
10. В. Е. Шаманский, *Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ*, ч. 1, Киев 1963.

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В работе, дается матричное представление, начально-краевых динамических уравнений сопряженной термоупругости. Затем, выводятся матричные представления для отдельных случаев этих уравнений (сопряженные и несопряженные квази-статические задачи). Наконец, к так представленным начально-краевым задачам, применяется метод конечных разностей, доказывая, что этот метод может быть представлен одним матричным уравнением. В этом уравнении, в качестве неизвестных, существуют значения функций перемещений и температуры, в определенных точках дискретного множества времени и пространства.

Summary

NUMERICAL SOLUTION OF THE EQUATIONS OF THERMOELASTICITY

In this paper is given the matrix representation for initial boundary problems of the dynamic equations of conjugated thermoelasticity. Subsequently, the matrix representations are derived for particular cases of these equations (conjugated and non-conjugated quasi-static problems). Finally, to the initial-boundary problems so conceived is applied the method of finite differences, proving that it can be described by a single matrix equation. In this equation, the unknown quantities are the values of the functions of displacements and temperature at determined points of the discrete set of space-time.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
W GLIWICACH

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 stycznia 1969 r.