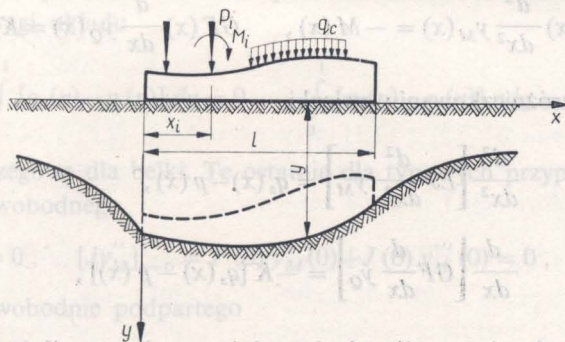


## KRÓTKIE BELKI NA PODŁOŻU TYPU PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ

JANUSZ MAĆZKA, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

## 1. Wstęp

Od czasu prac WINKLERA (1867) i ZIMMERMANN (1888) zagadnienie belek na podłożu sprężystym przykuwało uwagę wielu autorów. Różne koncepcje podłoża (WIEGHARDA, SCHULTZEGO, PASTERNAKA, półprzestrzeń sprężysta itp.) oraz uwzględnienie różnych przypadków obciążenia, warunków brzegowych i wpływu sił wewnętrznych (poprzecznych, podłużnych) składają się na bogaty dorobek teorii w tym zakresie. I chociaż problem ma, jak widać, długą historię, nie schodzi z pola zainteresowań badaczy dostarczając stale nowych opracowań. Z najnowszych wymienić by można prace MIKKOLÍ i YLINENA [2 i 6] oraz MIKKOLÍ [3].



Rys. 1

Osobny rozdział omawianej problematyki stanowią belki na podłożu typu półprzestrzeni sprężystej. Z licznych prac dotyczących tego zagadnienia ograniczymy się do zacytowania efektywnych rozwiązań FŁORINA, KŁUBINA i GORBUNOWA-POSADOWA [1]. Jakkolwiek otrzymane w tym zakresie wyniki przystosowano już do bezpośredniego zastosowania w praktyce inżynierskiej, problemu nie można uważać za całkowicie rozwiązany. Wystarczy nadmienić, że wpływ sił poprzecznych na ugięcie belki spoczywającej na półprzestrzeni sprężystej nie został jeszcze w pełni zanalizowany. Tę lukę wypełnić ma praca niniejsza. Podejmujemy w niej próbę możliwie ogólnego potraktowania i rozwiązania problemu. Rozważymy więc belkę skończonej długości, spoczywającą na półprzestrzeni sprężystej o zmiennym przekroju, obciążoną dowolnie, przy dowolnych warunkach brzegowych — z uwzględnieniem wpływu sił poprzecznych (rys. 1).

Do rozwiązania użyjemy transformacji całkowej Laplace'a oraz dla ogólności rozważań — elementów teorii dystrybucji. W ten sposób sprowadzimy problem do układu dwóch równań różniczkowo-całkowych Voltery drugiego rodzaju, dla którego w przypadku przekroju stałego podamy ściśle, zamknięte rozwiązanie. Dla przekroju zmiennego wykorzystanie własności przekształcenia całkowego pozwala na zastosowanie zbieżnego procesu kolejnych przybliżeń.

Wyprowadzone wzory zilustrujemy przykładem liczbowym, zamieszczając wykresy linii ugięcia i sił wewnętrznych.

## 2. Sformułowanie i ogólne rozwiązanie problemu

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $x, y$  rozważamy belkę o przekroju prostokątnym  $F(x)$ , spoczywającą na sprężystej półpłaszczyźnie, obciążoną w ogólności siłami i momentami skupionymi oraz obciążeniem ciągłym (rys. 1). Całkowite ugięcie osi belki  $y$  jest sumą przemieszczeń wywołanych momentem zginającym  $[y_M]$  i siłą poprzeczną  $[y_Q]$ :

$$(2.1) \quad y(x) = y_M(x) + y_Q(x).$$

Wychodząc ze znanych wzorów

$$(2.2) \quad EJ(x) \frac{d^2}{dx^2} y_M(x) = -M(x), \quad GF(x) \frac{d}{dx} y_Q(x) = KQ(x)$$

dostaniemy po zróżniczkowaniu związki

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ EJ \frac{d^2}{dx^2} y_M \right] &= q_s(x) - p(x), \\ \frac{d}{dx} \left[ GF \frac{d}{dx} y_Q \right] &= -K [q_s(x) - p(x)], \end{aligned}$$

które po wprowadzeniu współrzędnej zredukowanej  $\eta = x/l$  ( $\eta \in [0, 1]$ ) stanowiąc będą wyjściowy układ równań ze zmiennymi współczynnikami:

$$(2.3) \quad Jy_M^{(4)} + 2J'y_M''' + J''y_M'' = \frac{l^4}{E} [q_s(\eta) - p(\eta)],$$

$$Fy_Q'' + F'y_Q' = -\frac{Kl^2}{G} [q_s(\eta) - p(\eta)].$$

Tutaj  $J = J(x)$  oznacza moment bezwładności,  $E, G$  moduły sprężystości Younga i Kirchhoffa materiału belki,  $K$  stałą,

$$q_s(x) = \sum_{i=1}^n P_i \delta(x-x_i) + \sum_{i=1}^n M_i \frac{d}{dx} \delta(x-x_i) + q_c(x),$$

$\delta(x)$  dystrybucję «delta» Diraca oraz  $p(x)$  odpór podłoża.



Nieznany odpór  $p(x)$  wyznaczmy ze znanego wzoru Flamanta

$$(2.4) \quad v(z) = -\frac{2l}{\pi b E_p} \int_0^1 p(\eta) \ln |z-\eta| d\eta + A,$$

opisującego przemieszczenie pionowe punktów brzegu półprzestrzeni sprężystej, wywołane obciążeniem  $p(\eta)$ . Tutaj  $E_p$  jest modułem sprężystości podłoża,  $b$  szerokością belki oraz  $A$  dowolną stałą.

Przemieszczenia półprzestrzeni i ugięcia belki powinny być jednakowe, więc  $v(\eta) = y(\eta)$ , a ponieważ rozwiązanie równania całkowego (2.4) jest znane (CARLEMAN [5]), to mamy

$$(2.5) \quad p(\eta) = -\frac{B}{\sqrt{\eta(1-\eta)}} - \frac{bE_p}{2\pi l} \frac{1}{\sqrt{\eta(1-\eta)}} \int_0^1 \frac{y'(z) \sqrt{z(1-z)}}{z-\eta} dz,$$

$$B = \frac{1}{2\pi^2 \ln 2} \int_0^1 \frac{-\frac{\pi b E_p}{2l} [y(z) - A]}{\sqrt{z(1-z)}} dz.$$

Układ (2.3) przy uwzględnieniu (2.5) i (2.1) stanowi podstawowy układ różniczkowo-całkowych równań problemu. Do kompletu zależności dochodzą jeszcze ogólne warunki równowagi układu

$$(2.6) \quad \int_0^1 [q_s(\eta) - p(\eta)] d\eta = 0, \quad \int_0^1 [q_s(\eta) - p(\eta)] \eta d\eta = 0$$

oraz warunki brzegowe dla belki. Te ostatnie dla typowych przypadków wynoszą:

$$(2.7)_1 \quad y_M''(0) = 0, \quad [Jy_M'']_{\eta=0} = J'(0) y_M''(0) + J(0) y_M'''(0) = 0, \quad y_Q'(0) = 0;$$

dla brzegu swobodnie podpartego

$$(2.7)_2 \quad y_M(0) = 0, \quad y_M''(0) = 0, \quad y_Q(0) = 0;$$

dla brzegu utwierdzonego

$$(2.7)_3 \quad y_M(0) = 0, \quad y_M'(0) = 0, \quad y_Q(0) = 0.$$

Charakterystykę geometryczną przekroju przyjmujemy w ogólności w postaci

$$(2.8) \quad J(\eta) = a_0 + \sum_{i=1}^{n+2} a_i \eta^i, \quad F(\eta) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \eta^i,$$

$$2J'(\eta) = b_0 + \sum_{i=1}^{n+1} b_i \eta^i, \quad F'(\eta) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \eta^i,$$

$$J''(\eta) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \eta^i,$$

w związku z czym układ (2.3) możemy przepisać w formie

$$a_0 y_M^{(4)} + b_0 y_M''' + c_0 y_M'' = \frac{l^4}{E} [q_s(\eta) - p(\eta)] - \left[ \left( \sum_1^{n+2} a_i \eta^i \right) y_M^{(4)} + \left( \sum_1^{n+1} b_i \eta^i \right) y_M''' + \left( \sum_1^n c_i \eta^i \right) y_M'' \right],$$

$$a_0 y_Q'' + \beta_0 y_Q' = -\frac{Kl^2}{G} [q_s(\eta) - p(\eta)] - \left[ \left( \sum_1^n a_i \eta^i \right) y_Q'' + \left( \sum_1^{n-1} \beta_i \eta^i \right) y_Q' \right]$$

wygodnej dla dalszych rozważań.

Oznaczając dla zwięzłości

$$(2.9) \quad g_1(\eta) = \left( \sum_1^{n+2} a_i \eta^i \right) y_M^{(4)} + \left( \sum_1^{n+1} b_i \eta^i \right) y_M''' + \left( \sum_1^n c_i \eta^i \right) y_M'',$$

$$g_2(\eta) = \left( \sum_1^n a_i \eta^i \right) y_Q'' + \left( \sum_1^{n-1} \beta_i \eta^i \right) y_Q',$$

dostaniemy ostatecznie

$$(2.10) \quad a_0 y_M^{(4)} + b_0 y_M''' + c_0 y_M'' = \frac{l^4}{E} (q_s - p) - g_1(\eta),$$

$$a_0 y_Q'' + \beta_0 y_Q' = -\frac{Kl^2}{G} (q_s - p) - g_2(\eta).$$

Każdy konkretny przypadek obciążenia sprowadza się więc do scałkowania równań (2.10) z podstawieniem (2.5) i (2.1) przy warunkach (2.6) i (2.7).

W dalszym ciągu nakreśliśmy ogólną metodę rozwiązania. Na układzie (2.10) dokonujemy transformacji Laplace'a otrzymując

$$(2.11) \quad (a_0 s^4 + b_0 s^3 + c_0 s^2) \tilde{y}_M = [a_0 y_M'''(0) + b_0 y_M''(0) + c_0 y_M'(0)] + [a_0 y_M''(0) + b_0 y_M'(0) + c_0 y_M(0)] s + [a_0 y_M'(0) + b_0 y_M(0)] s^2 + a_0 y_M(0) s^3 + \frac{l^4}{E} \tilde{q}_s - \frac{l^4}{E} \tilde{p} - \tilde{g}_1,$$

$$(a_0 s^2 + \beta_0 s) \tilde{y}_Q = [a_0 y_Q'(0) + \beta_0 y_Q(0)] + a_0 y_Q(0) s - \frac{Kl^2}{G} \tilde{q}_s + \frac{Kl^2}{G} \tilde{p} - \tilde{g}_2,$$

gdzie funkcje

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_M(s) \\ \tilde{y}_Q(s) \\ \tilde{q}_s(s) \\ \tilde{p}(s) \\ \tilde{g}_1(s) \\ \tilde{g}_2(s) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} y_M(\eta) \\ y_Q(\eta) \\ q_s(\eta) \\ p(\eta) \\ g_1(\eta) \\ g_2(\eta) \end{bmatrix} e^{-s\eta} d\eta \quad (2.8)$$

są transformatami Laplace'a.



Transformata obciążenia

$$q_s(\eta) = q_c(\eta) + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i \delta(\eta - \eta_i) + \frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^n M_i \delta'(\eta - \eta_i)$$

wynosi

$$(2.12) \quad \tilde{q}_s(s) = \int_0^1 q_c(\eta) e^{-s\eta} d\eta + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i \int_0^{\infty} \delta(\eta - \eta_i) e^{-s\eta} d\eta + \\ + \frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^n M_i \int_0^{\infty} \delta'(\eta - \eta_i) e^{-s\eta} d\eta = \tilde{q}_c(s) + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i e^{-s\eta_i} + \frac{s}{l^2} \sum_{i=1}^n M_i e^{-s\eta_i}.$$

Dla transformaty odporu otrzymamy wyrażenie

$$(2.13) \quad \tilde{p}(s) = -B \int_0^1 \frac{e^{-s\eta}}{\sqrt{\eta(1-\eta)}} d\eta = \frac{bE_p}{2\pi l} \tilde{a}(s) = -B\pi e^{-\frac{s}{2}} I_0\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{bE_p}{2\pi l} \tilde{a}(s),$$

w którym  $I_0(x)$  jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu

$$\tilde{a}(s) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\eta(1-\eta)}} \int_0^1 \frac{y'(z) \sqrt{z(1-z)}}{z-\eta} dz \right] e^{-s\eta} d\eta.$$

Jeśli dalej w (2.11) podstawimy

$$(2.14) \quad \tilde{h}_1(s) = [a_0 y_M'''(0) + b_0 y_M''(0) + c_0 y_M'(0)] + [a_0 y_M''(0) + b_0 y_M'(0) + c_0 y_M(0)] s + \\ + [a_0 y_M'(0) + b_0 y_M(0)] s^2 + a_0 y_M(0) s^3 + \frac{l^4}{E} \tilde{q}_s(s) + \frac{l^4}{E} \pi B e^{-\frac{s}{2}} I_0\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$\tilde{h}_2(s) = [a_0 y_Q'(0) + \beta_0 y_Q(0)] + a_0 y_Q(0) s - \frac{Kl^2}{G} \tilde{q}_s(s) - \frac{Kl^2}{G} \pi B e^{-\frac{s}{2}} I_0\left(\frac{s}{2}\right),$$

$$\tilde{\varphi}_1(s) = \frac{1}{s^2(a_0 s^2 + b_0 s + c_0)}, \quad \tilde{\varphi}_2(s) = \frac{1}{s(a_0 s + \beta_0)}, \quad \rho_2 = -K(1+\nu),$$

to znajdziemy

$$(2.15) \quad \tilde{y}_M(s) = \tilde{\varphi}_1(s) \tilde{h}_1(s) + \frac{l^3 b}{2\pi} \frac{E_p}{E} \tilde{\varphi}_1(s) \tilde{a}(s) - \tilde{\varphi}_1(s) \tilde{g}_1(s),$$

$$\tilde{y}_Q(s) = \tilde{\varphi}_2(s) \tilde{h}_2(s) + \rho_2 \frac{lb}{\pi} \frac{E_p}{E} \tilde{\varphi}_2(s) \tilde{a}(s) - \tilde{\varphi}_2(s) \tilde{g}_2(s).$$

Wykonując następnie transformację odwrotną i stosując do drugiego i trzeciego (w obydwu równaniach) składnika twierdzenie o splocie dostajemy

$$(2.16) \quad \begin{aligned} y_M(\eta) &= L^{-1} [\tilde{\varphi}_1(s) \tilde{h}_1(s)] + \frac{l^3 b}{2\pi} \frac{E_p}{E} \int_0^\eta a(u) \varphi_1(\eta-u) du - \\ &\quad - \int_0^\eta g_1(u) \varphi_1(\eta-u) du, \\ y_Q(\eta) &= L^{-1} [\tilde{\varphi}_2(s) \tilde{h}_2(s)] + \rho_2 \frac{lb}{\pi} \frac{E_p}{E} \int_0^\eta a(u) \varphi_2(\eta-u) du - \\ &\quad - \int_0^\eta g_2(u) \varphi_2(\eta-u) du, \end{aligned}$$

gdzie symbolem  $L^{-1}$  oznaczono transformację odwrotną. W ten sposób, wyjściowy układ równań różniczkowo-całkowych (2.10) sprowadziliśmy do równoważnego układu (2.16) nie zawierającego już operatorów różniczkowych w wyrażeniach pozacalkowych. Dalsza dyskusja równań jest już bardziej efektywna zwłaszcza wobec faktu, że retransformaty pierwszych składników, zawierających dowolne obciążenia, warunki brzegowe oraz część odporu dadzą się łatwo wyznaczyć w postaci zamkniętej.

W dalszym ciągu osobno omówimy przypadek stałego przekroju i profilu zmiennego.

### 3. Przekrój stały

Mamy wówczas

$$a_0 = \frac{bh^3}{12}, \quad a_0 = bh, \quad b_0 = c_0 = \beta_0 = 0,$$

$$a_i = b_i = c_i = a_i = \beta_i = 0, \quad i \geq 1,$$

$$g_1(\eta) = g_2(\eta) = 0, \quad \tilde{\varphi}_1(s) = \frac{1}{a_0 s^4}, \quad \tilde{\varphi}_2(s) = \frac{1}{a_0 s^2},$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1(s) &= a_0 y_M''(0) + a_0 y_M''(0) s + a_0 y_M'(0) s^2 + a_0 y_M(0) s^3 + \\ &+ \frac{l^4}{E} \left[ \tilde{q}_c(s) + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i e^{-s\eta_i} + \frac{s}{l^2} \sum_{i=1}^n M_i e^{-s\eta_i} \right] + \frac{l^4}{E} \pi B e^{-\frac{s}{2}} I_0 \left( \frac{s}{2} \right). \end{aligned}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(s) \tilde{h}_1(s) &= \frac{y_M'''(0)}{s^4} + \frac{y_M''(0)}{s^3} + \frac{y_M'(0)}{s^2} + \frac{y_M(0)}{s} + A_1 l^2 \frac{\tilde{q}_c(s)}{s^4} + \\ &+ \frac{A_1 l}{s^4} \sum_{i=1}^n P_i e^{-s\eta_i} + \frac{A_1}{s^3} \sum_{i=1}^n M_i e^{-s\eta_i} + \pi A_2 \frac{e^{-\frac{s}{2}}}{s^4} I_0 \left( \frac{s}{2} \right), \end{aligned}$$



gdzie wprowadzono oznaczenia

$$A_1 = 12 \frac{l^2}{bh^3 E}, \quad A_2 = -\frac{12}{\pi} \frac{l^4}{bh^3} \frac{Q_s}{E}, \quad Q_s = \int_0^1 q_s(\eta) d\eta.$$

Korzystając ze znanych rezultatów transformacji Laplace'a

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{s^n} \right] = \frac{\eta^{n-1}}{(n-1)!}, \quad L^{-1} \left[ \frac{e^{-s\eta_i}}{s^4} \right] = \frac{(\eta-\eta_i)^3}{6} H(\eta-\eta_i),$$

$$L^{-1} \left[ \frac{e^{-s\eta_i}}{s^3} \right] = \frac{(\eta-\eta_i)^2}{2} H(\eta-\eta_i),$$

gdzie  $H(\eta)$  jest funkcją Heaviside'a obliczymy retransformaty wszystkich kolejnych składników z wyjątkiem ostatniego. Ten bowiem wymagać będzie powrotu do postaci (2.13)

$$\pi e^{-\frac{s}{2}} I_0 \left( \frac{s}{2} \right) = \int_0^1 \frac{e^{-s\eta}}{\sqrt{\eta(1-\eta)}} d\eta,$$

skąd po wykorzystaniu twierdzenia o splocie oraz wyników podanych wyżej, znajdziemy

$$L^{-1} \left[ \frac{\pi}{s^4} e^{-\frac{s}{2}} I_0 \left( \frac{s}{2} \right) \right] = L^{-1} \left[ \frac{1}{s^4} \int_0^1 \frac{e^{-s\eta}}{\sqrt{\eta(1-\eta)}} d\eta \right] =$$

$$= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4} L \left[ \frac{1}{\sqrt{\eta(1-\eta)}} \right] \right\} = \int_0^{\eta} \frac{(\eta-u)^3}{6} \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du.$$

Tę ostatnią całkę można obliczyć efektywnie, otrzymując po przekształceniach

$$L^{-1} \left[ \frac{\pi}{s^4} e^{-\frac{s}{2}} I_0 \left( \frac{s}{2} \right) \right] = \left( -\frac{5}{48} + \frac{3}{8} \eta - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \eta^3 \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} +$$

$$+ \left( \frac{5}{48} - \frac{11}{36} \eta + \frac{11}{36} \eta^2 \right) \sqrt{\eta(1-\eta)}.$$

Stąd więc

$$(3.1) \quad L^{-1} [\tilde{\varphi}_1(s) \tilde{h}_1(s)] = \frac{1}{6} y_M'''(0) \eta^3 + \frac{1}{2} y_M''(0) \eta^2 + y_M'(0) \eta + y_M(0) +$$

$$+ A_1 l^2 L^{-1} \left[ \frac{\tilde{q}_c(s)}{s^4} \right] + \frac{A_1 l}{6} \sum_{i=1}^n P_i (\eta-\eta_i)^3 H(\eta-\eta_i) +$$

$$+ \frac{A_1}{2} \sum_{i=1}^n M_i (\eta-\eta_i)^2 H(\eta-\eta_i) + A_2 \left[ \left( -\frac{5}{48} + \frac{3}{8} \eta - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \eta^3 \right) \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \left( \frac{5}{48} - \frac{11}{36} \eta + \frac{11}{36} \eta^2 \right) \sqrt{\eta(1-\eta)} \right].$$

Podobnie

$$\tilde{h}_2(s) = a_0 y'_Q(0) + a_0 y_Q(0) s - \frac{Kl^2}{G} \left[ \tilde{q}_c(s) + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i e^{-s\eta_i} + \frac{s}{l^2} \sum_{i=1}^n M_i e^{-s\eta_i} \right] - \frac{Kl^2}{G} \pi B e^{-\frac{s}{2}} I_0\left(\frac{s}{2}\right),$$

$$\tilde{\varphi}_2(s) \tilde{h}_2(s) = \frac{y'_Q(0)}{s^2} + \frac{y_Q(0)}{s} + \rho_2 \left[ B_1 l^2 \frac{\tilde{q}_c(s)}{s^2} + \frac{B_1 l}{s^2} \sum_{i=1}^n P_i e^{-s\eta_i} + \frac{B_1}{s} \sum_{i=1}^n M_i e^{-s\eta_i} + \pi B_2 \frac{e^{-\frac{s}{2}}}{s^2} I_0\left(\frac{s}{2}\right) \right],$$

gdzie

$$B_1 = \frac{2}{bhE}, \quad B_2 = -\frac{2}{\pi} \frac{l^2}{bh} \frac{Q_s}{E}.$$

Na podstawie identycznych jak poprzednio obliczeń otrzymujemy

$$(3.2) \quad L^{-1} [\tilde{\varphi}_2(s) \tilde{h}_2(s)] = y'_Q(0) \eta + y_Q(0) + \rho_2 \left\{ B_1 l^2 L^{-1} \left[ \frac{\tilde{q}_c(s)}{s^2} \right] + B_1 l \sum_{i=1}^n P_i (\eta - \eta_i) H(\eta - \eta_i) + B_1 \sum_{i=1}^n M_i H(\eta - \eta_i) + B_2 \left[ (-1 + 2\eta) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \right\}.$$

Układ (2.16) przyjmie postać

$$(3.3) \quad \begin{aligned} y_M(\eta) &= L^{-1} [\tilde{\varphi}_1 \tilde{h}_1] + \frac{6}{\pi} \left( \frac{l}{h} \right)^3 \frac{E_p}{E} \int_0^\eta \frac{(\eta-u)^3}{6} \left[ \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} \int_0^1 \frac{y'(z) \sqrt{z(1-z)}}{z-u} dz \right] du, \\ y_Q(\eta) &= L^{-1} [\tilde{\varphi}_2 \tilde{h}_2] + \frac{\rho_2}{\pi} \frac{l}{h} \frac{E_p}{E} \int_0^\eta (\eta-u) \left[ \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} \int_0^1 \frac{y'(z) \sqrt{z(1-z)}}{z-u} dz \right] du. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu zajmiemy się wyrażeniem całkowym pierwszego równania

$$(3.4) \quad \int_0^\eta \left[ \frac{(\eta-u)^3}{\sqrt{u(1-u)}} \int_0^1 \frac{y'(z) \sqrt{z(1-z)}}{z-u} dz \right] du = \int_0^1 y'(z) \sqrt{z(1-z)} \left[ \int_0^\eta \frac{(\eta-u)^3}{\sqrt{u(1-u)}} \frac{du}{z-u} \right] dz.$$



Całka wewnętrzna mnożona przez pierwiastek  $\sqrt{z(1-z)}$  daje po szeregu prostych operacji następujący wynik:

$$\begin{aligned} \sqrt{z(1-z)} \int_0^\eta \frac{(\eta-u)^3}{\sqrt{u(1-u)}} \frac{du}{z-u} &= \sqrt{z(1-z)} \left[ \left( \frac{3}{4} - 3\eta + 6\eta^2 \right) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \right. \\ &+ \left( -\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\eta \right) \sqrt{\eta(1-\eta)} \left. \right] + z \sqrt{z(1-z)} \left[ (1-6\eta) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} - \right. \\ &- \left. \sqrt{\eta(1-\eta)} \right] + 2z^2 \sqrt{z(1-z)} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + (\eta-z)^3 \ln \frac{\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \sqrt{\frac{z}{1-z}}}{\left| \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} - \sqrt{\frac{z}{1-z}} \right|}. \end{aligned}$$

Podstawiając otrzymany wynik do (3.4) oraz wykonując całkowanie przez części dostaniemy po licznych, lecz prostych przekształceniach

$$\begin{aligned} \frac{l^3 b E_p}{2\pi E} \int_0^\eta a(u) \varphi_1(\eta-u) du &= \\ &= \frac{6}{\pi} \left( \frac{l}{h} \right)^3 \frac{E_p}{E} \int_0^1 (\eta-z)^2 \left[ \ln(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) - \frac{1}{2} \ln|\eta-z| \right] y(z) dz - \\ &- \frac{1}{\pi} \left( \frac{l}{h} \right)^3 \frac{E_p}{E} \left[ (C_1 + C_2 \eta + C_3 \eta^2) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + (C_4 + C_5 \eta + C_6 \eta^2) \sqrt{\eta(1-\eta)} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} C_1 &= 3 \left( \frac{1}{8} i_0 + \frac{1}{4} i_1 + i_2 - 2i_3 \right), & C_4 &= 3 \left( -\frac{1}{8} i_0 - \frac{1}{4} i_1 + i_2 \right), \\ C_2 &= 3 \left( -\frac{1}{2} i_0 - 2i_1 + 4i_2 \right), & C_5 &= \frac{1}{2} \left( \frac{5}{2} i_0 - 9i_1 \right), \\ C_3 &= 3(i_0 - 2i_1), & C_6 &= i_0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$i_0 = \int_0^1 \frac{y(z)}{\sqrt{z(1-z)}} dz, \quad i_2 = \int_0^1 \frac{z^2 y(z)}{\sqrt{z(1-z)}} dz,$$

$$i_1 = \int_0^1 \frac{zy(z)}{\sqrt{z(1-z)}} dz, \quad i_3 = \int_0^1 \frac{z^3 y(z)}{\sqrt{z(1-z)}} dz.$$

Podobnie po wykonaniu analogicznych obliczeń otrzymamy wyrażenie całkowe równania (3.3)<sub>2</sub>:

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{lb}{\pi} \frac{E_p}{E} \int_0^\eta a(u) \varphi_2(\eta-u) du &= \\ &= \frac{2}{\pi} \rho_2 \frac{l}{h} \frac{E_p}{E} \int_0^1 \left[ \ln(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) - \frac{1}{2} \ln|\eta-z| \right] y(z) dz - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \rho_2 \frac{l}{h} \frac{E_p}{E} \left[ \frac{1}{3} C_3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + C_6 \sqrt{\eta(1-\eta)} \right]. \end{aligned}$$

Wprowadzając dalej oznaczenia

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \frac{l}{h} \frac{E_p}{E}, \quad \rho_1 = 3 \left( \frac{l}{h} \right)^2,$$

$$(3.6) \quad \psi_M(\eta) = L^{-1} [\tilde{\varphi}_1 \tilde{h}_1] - \frac{1}{6} \lambda \rho_1 \left[ (C_1 + C_2 \eta + C_3 \eta^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + (C_4 + C_5 \eta + C_6 \eta^2) \sqrt{\eta(1-\eta)} \right],$$

$$\begin{aligned} \psi_Q(\eta) &= L^{-1} [\tilde{\varphi}_2 \tilde{h}_2] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda \rho_2 \left[ \frac{1}{3} C_3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + C_6 \sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \end{aligned}$$

p odstawiając otrzymane rezultaty dla całek do układu (3.3) znajdziemy

$$(3.7) \quad y_M(\eta) - \lambda \int_0^1 \rho_1 (\eta-z)^2 \left[ \ln(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) - \frac{1}{2} \ln|\eta-z| \right] y(z) dz = \psi_M(\eta),$$

$$y_Q(\eta) - \lambda \int_0^1 \rho_2 \left[ \ln(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) - \frac{1}{2} \ln|\eta-z| \right] y(z) dz = \psi_Q(\eta).$$

Dodając stronami i uwzględniając (2.1) otrzymujemy

$$(3.8) \quad y(\eta) - \lambda \int_0^1 [\rho_1 (\eta-z)^2 + \rho_2] \left[ \ln(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) - \frac{1}{2} \ln|\eta-z| \right] y(z) dz = \psi(\eta),$$

gdzie funkcja  $\psi(\eta) = \psi_M(\eta) + \psi_Q(\eta)$  po uwzględnieniu (3.6) oraz (3.1) i (3.2) przyjmuje postać

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \psi(\eta) &= y_M(0) + y_Q(0) + [y'_M(0) + y'_Q(0)] \eta + \frac{1}{2} y''_M(0) \eta^2 + \frac{1}{6} y'''_M(0) \eta^3 + \\ &\quad + A_1 l^2 L^{-1} \left[ \frac{\tilde{q}_c(s)}{s^4} \right] + \rho_2 B_1 l^2 L^{-1} \left[ \frac{\tilde{q}_c(s)}{s^2} \right] + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \left\{ A_1 \left[ \frac{l}{6} P_i (\eta - \eta_i)^3 + \frac{1}{2} M_i (\eta - \eta_i)^2 \right] + \rho_2 B_1 [l P_i (\eta - \eta_i) + M_i] \right\} H(\eta - \eta_i) + \\
& + \left[ -\frac{5}{48} A_2 - \rho_2 B_2 + \left( \frac{3}{8} A_2 + 2\rho_2 B_2 \right) \eta - \frac{1}{2} A_2 \eta^2 + \frac{1}{3} A_2 \eta^3 \right] \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \\
& + \left( \frac{5}{48} A_2 + \rho_2 B_2 - \frac{11}{36} A_2 \eta + \frac{11}{36} A_2 \eta^2 \right) \sqrt{\eta(1-\eta)} - \\
& - \frac{1}{6} \lambda \left[ (\rho_1 C_1 + \rho_2 C_3 + \rho_1 C_2 \eta + \rho_1 C_3 \eta^2) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \right. \\
& \left. + (\rho_1 C_4 + 3\rho_2 C_6 + \rho_1 C_5 \eta + \rho_1 C_6 \eta^2) \sqrt{\eta(1-\eta)} \right].
\end{aligned}$$

Związek (3.8) jest równaniem całkowym Fredholma drugiego rzędu z jądrem słabo osobliwym. Wpływ siły poprzecznej wyraża się przez wszystkie wyrazy zawierające współczynnik  $\rho_2$  oraz wartości początkowe  $y_Q(0)$  i  $y_Q'(0)$ .

Jądro

$$(3.10) \quad \mathcal{K}(\eta, z) = [\rho_1 (\eta - z)^2 + \rho_2] \left[ \ln(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) - \frac{1}{2} \ln |\eta - z| \right]$$

zawiera logarytmiczną osobliwość i jedynie dla  $\rho_2 = 0$  (czyste zginanie) staje się regularne. Już w tym miejscu obserwujemy więc jakościowy wpływ siły poprzecznej. Dalszy jej udział widać w wyrażeniu (3.9), przy czym od razu łatwo zauważyć, że siły i momenty skupione dają osobliwości w postaci linii ugięcia (czego nie ma przy czystym zginaniu). Wpływ odporu na linię ugięcia belki odzwierciedlają wyrazy zawierające stałe  $A_2$  i  $B_2$  oraz  $\lambda$ .

W dalszym ciągu zajmiemy się rozwiązaniem równania (3.8). Zbadamy przede wszystkim, dla jakich wartości  $\lambda$  istnieje rozwiązanie w postaci szeregu jąder iterowanych. W tym celu bierzemy kwadrat normy jądra (3.10):

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}\|^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{K}^2(\eta, z) \, d\eta \, dz = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [\rho_1 (\eta - z)^2 + \rho_2]^2 \left[ \ln(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) - \frac{1}{2} \ln |\eta - z| \right]^2 \, d\eta \, dz = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [\rho_1 (\eta - z)^2 + \rho_2]^2 \left[ \ln^2(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) - \right. \\
&\quad \left. - \ln(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) \ln |\eta - z| + \frac{1}{4} \ln^2 |\eta - z| \right] \, d\eta \, dz
\end{aligned}$$

i na podstawie oczywistych nierówności

$$1 \geq \sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)} \geq |\eta - z| \geq 0,$$

$$0 \geq \ln(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) \geq \ln |\eta - z|$$

stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}\|^2 &\leq \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^1 [\rho_1(\eta-z)^2 + \rho_2]^2 \ln^2 |\eta-z| d\eta dz = \\ &= \frac{9}{4} \left(\frac{l}{h}\right)^4 \int_0^1 \int_0^1 (\eta-z)^4 \ln^2 |\eta-z| d\eta dz - \\ &- \frac{3}{2} K(1+\nu) \left(\frac{l}{h}\right)^2 \int_0^1 \int_0^1 (\eta-z)^2 \ln^2 |\eta-z| d\eta dz + \frac{1}{4} K^2(1+\nu)^2 \int_0^1 \int_0^1 \ln^2 |\eta-z| d\eta dz. \end{aligned}$$

Po obliczeniu elementarnych całek mamy

$$\|\mathcal{K}\|^2 \leq \frac{9}{4} \left(\frac{l}{h}\right)^4 \frac{91}{6750} = \frac{1}{4} \cdot \frac{819}{6750} \left(\frac{l}{h}\right)^4.$$

Rozwiązanie w postaci szeregu jąder iterowanych istnieje dla

$$\lambda < \frac{1}{\|\mathcal{K}\|} \approx \frac{2}{\sqrt{\frac{819}{6750} \left(\frac{l}{h}\right)^2}},$$

a więc po uwzględnieniu wartości  $\lambda$  otrzymamy

$$\frac{2}{\pi} \frac{l}{h} \frac{E_p}{E} < 2 \sqrt{\frac{6750}{819} \left(\frac{h}{l}\right)^2},$$

skąd ostatecznie

$$(3.11) \quad \frac{h}{l} > \sqrt[3]{\frac{E_p}{9E}}.$$

Otrzymane oszacowanie obejmuje praktycznie najważniejsze przypadki belek.

Rozwiązanie równania (3.8) ma więc postać

$$(3.12) \quad y(\eta) = \psi(\eta) + \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(\eta, z) \psi(z) dz + \dots$$

Powyższy związek stanowi w efekcie rozwiązanie całego problemu. Mając bowiem całkowite ugięcie  $y(\eta)$ , możemy z (3.7) wyznaczyć  $y_M(\eta)$  lub  $y_Q(\eta)$ , a dalej za pomocą (2.2) momenty i siły poprzeczne w dowolnym przekroju belki.

Dla efektywnego, analitycznego wyrażenia postaci  $y(\eta)$  podstawiamy funkcję  $\psi(\eta)$  z (3.9) do (3.12). W trakcie obliczania funkcji pierwotnych

$$\int \mathcal{K}(\eta, z) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{z}{1-z}} dz \quad \text{i} \quad \int \mathcal{K}(\eta, z) \sqrt{z(1-z)} dz$$



pojawiają się całki nieelementarne, nie dające się wyznaczyć w sposób ścisły. Stosując przybliżenia

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{z}{1-z}} &\approx \frac{\pi}{4} + \left(z - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} \left(z - \frac{1}{2}\right)^3, \\ \sqrt{z(1-z)} &\approx \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + z(1-z), \end{aligned}$$

obliczamy wszystkie potrzebne całki, otrzymując po żmudnych lecz elementarnych rachunkach następujący wzór:

$$\begin{aligned} (3.13) \quad y(\eta) &\approx y_M(0) + y_Q(0) + [y'_M(0) + y'_Q(0)]\eta + \frac{1}{2} y''_M(0)\eta^2 + \\ &+ \frac{1}{6} y'''_M(0)\eta^3 + A_1 l^2 L^{-1} \left[ \frac{\tilde{q}_c(s)}{s^4} \right] + \rho_2 B_1 l^2 L^{-1} \left[ \frac{\tilde{q}_c(s)}{s^2} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ A_1 \left[ \frac{l}{6} P_i(\eta - \eta_i)^3 + \frac{1}{2} M_i(\eta - \eta_i)^2 \right] + \rho_2 B_1 [l P_i(\eta - \eta_i) + M_i] \right\} H(\eta - \eta_i) + \\ &+ \left[ -\frac{5}{48} A_2 - \rho_2 B_2 + \left( \frac{3}{8} A_2 + 2\rho_2 B_2 \right) \eta - \frac{1}{2} A_2 \eta^2 + \frac{1}{3} A_2 \eta^3 \right] \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \\ &+ \left( \frac{5}{48} A_2 + \rho_2 B_2 - \frac{11}{36} A_2 \eta + \frac{11}{36} A_2 \eta^2 \right) \sqrt{\eta(1-\eta)} + \\ &+ \lambda \left\{ -\frac{1}{6} (\rho_1 C_1 + \rho_2 C_3 + \rho_1 C_2 \eta + \rho_1 C_3 \eta^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\eta(1-\eta)} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{m=0}^5 g_m^i \eta^m + \sum_{m=0}^8 G_m \eta^m \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^6 -(\eta_i - \eta)^m \left[ \ln(\sqrt{\eta_i(1-\eta)} + \sqrt{\eta(1-\eta_i)}) - \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{2} \ln |\eta - \eta_i| \right] A_{im}(\eta) + \rho_1 d_1(\eta) + \rho_2 d_2(\eta) \right\}. \end{aligned}$$

Znaczenie poszczególnych wielkości podaje poniższe zestawienie:

$$A_{i1}(\eta) = \rho_2 (d_0^i + d_1^i \eta + d_2^i \eta^2 + d_3^i \eta^3),$$

$$A_{i2}(\eta) = \rho_2 \left( \frac{1}{2} d_1^i + d_2^i \eta + \frac{3}{2} d_3^i \eta^2 \right),$$

$$A_{i3}(\eta) = \frac{1}{3} \rho_1 d_0^i + \frac{1}{3} \rho_2 d_2^i + \left( \frac{1}{3} \rho_1 d_1^i + \rho_2 d_3^i \right) \eta + \frac{1}{3} \rho_1 d_2^i \eta^2 + \frac{1}{3} \rho_1 d_3^i \eta^3,$$

$$A_{i4}(\eta) = \frac{1}{4} \rho_1 d_1^i + \frac{1}{4} \rho_2 d_3^i + \frac{1}{2} \rho_1 d_2^i \eta + \frac{3}{4} \rho_1 d_3^i \eta^2,$$

$$A_{i5}(\eta) = \rho_1 \left( \frac{1}{5} d_2^i + \frac{3}{5} d_3^i \eta \right),$$

$$A_{i6}(\eta) = \frac{1}{6} \rho_1 d_3^i;$$

$$d_0^i = -\frac{1}{6} A_1 l P_i \eta_i^3 + \frac{1}{2} A_1 M_i \eta_i^2 - \rho_2 B_1 l P_i \eta_i + \rho_2 B_1 M_i,$$

$$d_1^i = \frac{1}{2} A_1 l P_i \eta_i^2 - A_1 M_i \eta_i + \rho_2 B_1 l P_i,$$

$$d_2^i = -\frac{1}{2} A_1 l P_i \eta_i + \frac{1}{2} A_1 M_i,$$

$$d_3^i = \frac{1}{6} A_1 l P_i;$$

$$F_0 = y(0) + \frac{5}{192} \left( -\pi + \frac{17}{6} \right) A_2 + \frac{1}{4} \left( -\pi + \frac{17}{6} \right) \rho_2 B_2 + \\ + \frac{\lambda}{8} \left\{ \left( \frac{l}{h} \right)^2 \left[ \left( -\pi + \frac{7}{3} \right) C_1 - \frac{1}{2} C_4 \right] + \rho_2 \left[ \frac{1}{3} \left( -\pi + \frac{7}{3} \right) C_3 - \frac{1}{2} C_6 \right] \right\},$$

$$F_1 = y'(0) + \frac{1}{16} \left( \frac{3}{2} \pi - \frac{37}{9} \right) A_2 + \frac{1}{2} \left( \pi - \frac{7}{3} \right) \rho_2 B_2 + \\ + \frac{\lambda}{4} \left\{ \left( \frac{l}{h} \right)^2 \left[ -3C_1 + \frac{1}{2} \left( -\pi + \frac{7}{3} \right) C_2 - 3C_4 - \frac{1}{4} C_5 \right] - \rho_2 (C_3 + 3C_6) \right\},$$

$$F_2 = \frac{1}{2} y''(0) + \frac{1}{8} \left( -\pi + \frac{55}{18} \right) A_2 + \frac{5}{2} \rho_2 B_2 + \frac{\lambda}{2} \left\{ \left( \frac{l}{h} \right)^2 \left[ C_1 - \frac{3}{2} C_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \left( -\pi + \frac{7}{3} \right) C_3 + \frac{3}{2} C_4 - \frac{3}{2} C_5 - \frac{1}{8} C_6 \right] + \rho_2 \left( \frac{1}{3} C_3 + \frac{3}{2} C_6 \right) \right\},$$

$$F_3 = \frac{1}{6} y'''(0) + \frac{1}{12} \left( \pi - \frac{17}{3} \right) A_2 - \frac{8}{3} \rho_2 B_2 + \\ + \lambda \left\{ \left( \frac{l}{h} \right)^2 \left( -\frac{1}{3} C_1 + \frac{1}{2} C_2 - \frac{3}{4} C_3 + \frac{3}{4} C_5 - \frac{3}{4} C_6 \right) - \frac{1}{9} \rho_2 C_3 \right\},$$

$$F_4 = \frac{19}{24} A_2 + \frac{4}{3} \rho_2 B_2 + \lambda \left( \frac{l}{h} \right)^2 \left( -\frac{1}{3} C_2 + \frac{1}{2} C_3 + \frac{3}{4} C_6 \right),$$

$$F_5 = -\frac{2}{3} A_2 - \frac{\lambda}{3} \left( \frac{l}{h} \right)^2 C_3,$$

$$F_6 = \frac{2}{9} A_2;$$

$$(3.14) \quad G_0 = \frac{\pi}{8} \rho_1 \left( F_0 + \frac{5}{8} F_1 + \frac{7}{16} F_2 + \frac{21}{64} F_3 + \frac{33}{128} F_4 + \frac{429}{2048} F_5 + \right. \\ \left. + \frac{715}{4096} F_6 - \frac{8}{3\pi} C_4 \right) + \pi \rho_2 \left( F_0 + \frac{1}{4} F_1 + \frac{1}{8} F_2 + \frac{5}{64} F_3 + \frac{7}{128} F_4 + \right. \\ \left. + \frac{21}{512} F_5 + \frac{33}{1024} F_6 - \frac{1}{\pi} C_6 \right),$$



$$\begin{aligned}
 G_1 &= -\rho_1 \left( \frac{1}{3} F_0 + \frac{5}{32} F_1 + \frac{3}{32} F_2 + \frac{49}{768} F_3 + \frac{3}{64} F_4 + \frac{297}{8182} F_5 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{715}{24576} F_6 + \frac{1}{3\pi} C_5 \right) + \frac{\pi}{2} \rho_2 \left( F_1 + \frac{1}{3} F_2 + \frac{3}{16} F_3 + \frac{1}{8} F_4 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{35}{384} F_5 + \frac{9}{128} F_6 \right), \\
 G_2 &= \pi \rho_1 \left( \frac{1}{3} F_0 + \frac{1}{24} F_1 + \frac{1}{80} F_2 + \frac{1}{192} F_3 + \frac{1}{384} F_4 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2048} F_5 + \frac{11}{12288} F_6 - \frac{1}{3\pi} C_6 \right) + \pi \rho_2 \left( \frac{1}{3} F_2 + \frac{1}{8} F_3 + \frac{3}{40} F_4 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{96} F_5 + \frac{5}{128} F_6 \right), \\
 G_3 &= \frac{\pi}{4} \rho_1 \left( \frac{1}{3} F_1 + \frac{1}{15} F_2 + \frac{1}{40} F_3 + \frac{1}{84} F_4 + \frac{5}{768} F_5 + \frac{1}{256} F_6 \right) + \\
 &\quad + \frac{\pi}{2} \rho_2 \left( \frac{1}{2} F_3 + \frac{1}{5} F_4 + \frac{1}{8} F_5 + \frac{5}{56} F_6 \right), \\
 G_4 &= \frac{\pi}{2} \rho_1 \left( \frac{1}{15} F_2 + \frac{1}{60} F_3 + \frac{1}{140} F_4 + \frac{5}{1344} F_5 + \frac{5}{2304} F_6 \right) + \\
 &\quad + \pi \rho_2 \left( \frac{1}{5} F_4 + \frac{1}{12} F_5 + \frac{3}{56} F_6 \right), \\
 G_5 &= \frac{\pi}{2} \rho_1 \left( \frac{1}{30} F_3 + \frac{1}{105} F_4 + \frac{1}{224} F_5 + \frac{5}{2016} F_6 \right) + \frac{\pi}{2} \rho_2 \left( \frac{1}{3} F_5 + \frac{1}{7} F_6 \right), \\
 G_6 &= \frac{\pi}{3} \rho_1 \left( \frac{1}{35} F_4 + \frac{1}{112} F_5 + \frac{1}{224} F_6 \right) + \frac{\pi}{7} \rho_2 F_6, \\
 G_7 &= \frac{\pi}{24} \rho_1 \left( \frac{1}{7} F_5 + \frac{1}{21} F_6 \right), \\
 G_8 &= \frac{\pi}{252} \rho_1 F_6; \\
 g_0^i &= \rho_1 \left( \frac{1}{3} d_0^i \gamma_i + \frac{1}{4} d_1^i \delta_i + \frac{1}{5} d_2^i \varepsilon_i + \frac{1}{6} d_3^i \zeta_i \right) + \\
 &\quad + \rho_2 \left( d_0^i a_i + \frac{1}{2} d_1^i \beta_i + \frac{1}{3} d_2^i \gamma_i + \frac{1}{4} d_3^i \delta_i \right), \\
 g_1^i &= -\rho_1 \left( \frac{2}{3} d_0^i \beta_i + \frac{5}{12} d_1^i \gamma_i + \frac{3}{10} d_2^i \delta_i + \frac{7}{30} d_3^i \varepsilon_i \right) + \\
 &\quad + \rho_2 \left( \frac{1}{2} d_1^i a_i + \frac{1}{3} d_2^i \beta_i + \frac{1}{4} d_3^i \gamma_i \right),
 \end{aligned}$$

$$g_2^i = \frac{1}{3} \rho_1 \left( d_0^i a_i + \frac{1}{4} d_1^i \beta_i + \frac{1}{10} d_2^i \gamma_i + \frac{1}{20} d_3^i \delta_i \right) + \rho_2 \left( \frac{1}{3} d_2^i a_i + \frac{1}{4} d_3^i \beta_i \right),$$

$$g_3^i = \frac{1}{6} \rho_1 \left( \frac{1}{2} d_1^i a_i + \frac{1}{5} d_2^i \beta_i + \frac{1}{10} d_3^i \gamma_i \right) + \frac{1}{4} \rho_2 d_3^i a_i,$$

$$g_4^i = \frac{1}{30} \rho_1 \left( d_2^i a_i + \frac{1}{2} d_3^i \beta_i \right),$$

$$g_5^i = \frac{1}{60} \rho_1 d_3^i a_i;$$

$$a_i = \pi - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta_i}{1-\eta_i}},$$

$$\beta_i = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta_i}{1-\eta_i}},$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{4} \pi + \frac{3}{2} \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} + \eta_i \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} - \frac{3}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta_i}{1-\eta_i}} \right],$$

$$\delta_i = \frac{5}{16} \pi + \frac{5}{8} \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} + \frac{5}{12} \eta_i \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} + \frac{1}{3} \eta_i^2 \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} - \frac{5}{8} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta_i}{1-\eta_i}},$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{4} \left[ \frac{35}{32} \pi + \frac{35}{16} \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} + \frac{35}{24} \eta_i \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} + \frac{7}{6} \eta_i^2 \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} + \eta_i^3 \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} - \frac{35}{16} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta_i}{1-\eta_i}} \right],$$

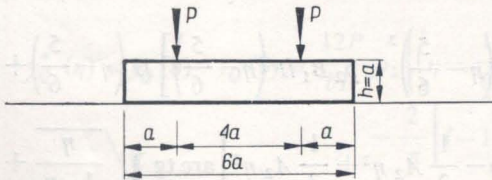
$$\zeta_i = \frac{63}{256} \pi + \frac{63}{128} \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} + \frac{21}{64} \eta_i \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} + \frac{21}{80} \eta_i^2 \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} + \frac{9}{40} \eta_i^3 \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} + \frac{1}{5} \eta_i^4 \sqrt{\eta_i(1-\eta_i)} - \frac{63}{128} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta_i}{1-\eta_i}},$$

$$d_1(\eta) = \int_0^1 (\eta-z)^2 \left[ \ln(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) - \frac{1}{2} \ln |\eta-z| \right] \times \\ \times \left[ A_1 l^2 L^{-1} \left( \frac{\tilde{q}_c}{s^4} \right) + \rho_2 B_1 l^2 L^{-1} \left( \frac{\tilde{q}_c}{s^2} \right) \right] dz,$$

$$d_2(\eta) = \int_0^1 \left[ \ln(\sqrt{\eta(1-z)} + \sqrt{z(1-\eta)}) - \frac{1}{2} \ln |\eta-z| \right] \times \\ \times \left[ A_1 l^2 L^{-1} \left( \frac{\tilde{q}_c}{s^4} \right) + \rho_2 B_1 l^2 L^{-1} \left( \frac{\tilde{q}_c}{s^2} \right) \right] dz.$$



Korzystanie ze wzoru (3.13) jest w ogólności dosyć uciążliwe, lecz dla konkretnego przypadku obciążenia może okazać się celowe. Należy podkreślić, że ta «zawiłość» wyrażenia (3.13) wynika z uwzględnienia wielu wpływów (warunki brzegowe, dowolne obciążenie, odpór sprężysty, siły poprzeczne) i to w możliwie ogólnej formie. Warto też zauważyć, że w przypadkach nastęrczających zbyt wiele trudu istnieje zawsze możliwość numerycznego rozwiązania równania (3.8), które przy wykorzystaniu maszyn cyfrowych nie przedstawia większego problemu.



Rys. 2

Pragniemy w tym miejscu zwrócić też uwagę na jeszcze jedną okoliczność. Otóż główny wpływ odporu podłoża wynikający z przemieszczenia belki jako ciała sztywnego ( $v = \text{const}$ ) zawiera się w wyrażach ze współczynnikami  $A_2$  i  $B_2$ . Pozostała część odporu uwzględniająca odchylenie osi belki od postaci prostoliniowej, po jej ugięciu, uwidacznia się wyrażeniem stojącym w (3.13) przy parametrze  $\lambda$ . Ponieważ stoimy na gruncie małych odkształceń, możemy przyjąć, że dla dostatecznie małych wartości  $\lambda$  wpływ tego wyrazu na całkowite ugięcie będzie pomijalnie mały, co w rezultacie znacznie upraszcza obliczenia. Dla takiego przypadku wykonano przykład liczbowy przyjmując następujący schemat obciążeń i dane (rys.2). Mamy wówczas

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{6}, \quad \nu = \frac{1}{6}, \quad K = \frac{6}{5},$$

$$q_s(\eta) = \frac{P}{l} \left[ \delta\left(\eta - \frac{1}{6}\right) + \delta\left(\eta - \frac{5}{6}\right) \right], \quad q_c(\eta) = 0, \quad M_i = 0,$$

$$Q_s = \int_0^1 q_s(\eta) d\eta = \frac{2}{l} P, \quad A_1 = 12 \frac{l^2}{bh^3 E},$$

$$A_2 = -\frac{12}{\pi} \frac{l^4}{bh^3} \frac{2P}{lE} = -\frac{2}{\pi} \cdot 6^3 \cdot \frac{12P}{bE},$$

$$B_1 = \frac{2}{bhE}, \quad B_2 = -\frac{2}{\pi} \frac{l^2}{bh} \frac{2P}{lE} = -\frac{2}{\pi} \frac{12P}{bE}, \quad y'_Q(0) = y''_M(0) = y'''_M(0) = 0.$$

Wartości  $y(0) = y_M(0) + y_Q(0)$  możemy nie wyznaczać (nie ma ona bowiem wpływu na obliczenie momentów zginających i sił poprzecznych) ograniczając się do ugięcia względnego  $y^*(\eta) = y(\eta) - y(0)$ . Pozostałą stałą  $y'_M(0)$  możemy ze względu na symetrię wyznaczyć z warunku  $y_M(0) = y_M(1)$ , otrzymując na podstawie wzoru (3.13) ( $\rho_2 = 0$ )

$$y_M(1) = y_M(0) + y'_M(0) + \frac{A_1 l}{6} P \frac{125}{216} + A_1 \frac{l}{6} P \frac{1}{216} + \left( -\frac{5}{48} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) A_2 \frac{\pi}{2},$$

skąd

$$y'_M(0) = 18 \frac{P}{bE}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} y^*(\eta) \approx & \frac{18P}{bE} \eta + \left[ A_1 \frac{l}{6} P \left( \eta - \frac{1}{6} \right)^3 + \rho_2 B_1 l P \left( \eta - \frac{1}{6} \right) \right] H \left( \eta - \frac{1}{6} \right) + \\ & + \left[ A_1 \frac{l}{6} P \left( \eta - \frac{5}{6} \right)^3 + \rho_2 B_1 l P \left( \eta - \frac{5}{6} \right) \right] H \left( \eta - \frac{5}{6} \right) + \\ & + \left[ -\frac{5}{48} A_2 - \rho_2 B_2 + \left( \frac{3}{8} A_2 + 2\rho_2 B_2 \right) \eta - \frac{1}{2} A_2 \eta^2 + \frac{1}{3} A_2 \eta^3 \right] \text{arc tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \\ & + \left( \frac{5}{48} A_2 + \rho_2 B_2 - \frac{11}{36} A_2 \eta + \frac{11}{36} A_2 \eta^2 \right) \sqrt{\eta(1-\eta)} = \\ = & \frac{12P}{bE} \left\{ \frac{3}{2} \eta + \left[ 36 \left( \eta - \frac{1}{6} \right)^2 + \rho_2 \right] \left( \eta - \frac{1}{6} \right) H \left( \eta - \frac{1}{6} \right) + \left[ 36 \left( \eta - \frac{5}{6} \right)^2 + \rho_2 \right] \times \right. \\ & \times \left. \left( \eta - \frac{5}{6} \right) H \left( \eta - \frac{5}{6} \right) + \frac{1}{\pi} [45 + 2\rho_2 - 2(81 + 2\rho_2)\eta + 216\eta^2 - 144\eta^3] \times \right. \\ & \left. \times \text{arc tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \frac{1}{\pi} (-45 - 2\rho_2 + 132\eta - 132\eta^2) \sqrt{\eta(1-\eta)} \right\} \end{aligned}$$

lub bezpośrednio z (3.7)

$$\begin{aligned} y_M(\eta) \approx \psi_M(\eta) \approx L^{-1} [\tilde{\varphi}_1 \tilde{h}_1] = & y_M(0) + \frac{18P}{bE} \eta + \frac{A_1 l}{6} \times \\ & \times \left[ P \left( \eta - \frac{1}{6} \right)^3 H \left( \eta - \frac{1}{6} \right) + P \left( \eta - \frac{5}{6} \right)^3 H \left( \eta - \frac{5}{6} \right) \right] + \\ & + A_2 \left[ \left( -\frac{5}{48} + \frac{3}{8} \eta - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \eta^3 \right) \text{arc tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{5}{48} - \frac{11}{36} \eta + \frac{11}{36} \eta^2 \right) \sqrt{\eta(1-\eta)} \right], \end{aligned}$$

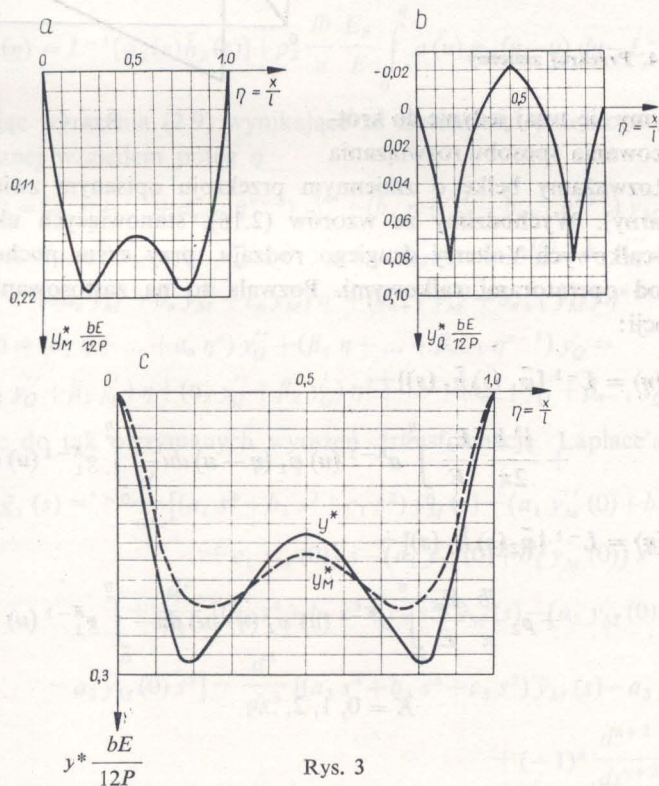
$$\begin{aligned} y_Q(\eta) \approx \psi_Q(\eta) \approx L^{-1} [\tilde{\varphi}_2 \tilde{h}_2] = & y_Q(0) + \rho_2 B_1 l \left[ P \left( \eta - \frac{1}{6} \right) H \left( \eta - \frac{1}{6} \right) + \right. \\ & \left. + P \left( \eta - \frac{5}{6} \right) H \left( \eta - \frac{5}{6} \right) \right] + \rho_2 B_2 \left[ (-1 + 2\eta) \text{arc tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \sqrt{\eta(1-\eta)} \right]. \end{aligned}$$



Po podstawieniu poszczególnych wielkości i przekształceniach będzie ostatecznie

$$y_M^*(\eta) = y_M(\eta) - y_M(0) \approx \frac{12P}{bE} \left\{ \frac{3}{2} \eta + 36 \left[ \left( \eta - \frac{1}{6} \right)^3 H \left( \eta - \frac{1}{6} \right) + \left( \eta - \frac{5}{6} \right)^3 H \left( \eta - \frac{5}{6} \right) \right] - \frac{1}{\pi} \left[ (-45 + 162\eta - 216\eta^2 + 144\eta^3) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + (45 - 132\eta + 132\eta^2) \sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \right\},$$

$$y_Q^*(\eta) = y_Q(\eta) - y_Q(0) \approx \frac{12P}{bE} \rho_2 \left\{ \left( \eta - \frac{1}{6} \right) H \left( \eta - \frac{1}{6} \right) + \left( \eta - \frac{5}{6} \right) H \left( \eta - \frac{5}{6} \right) - \frac{2}{\pi} \left[ (-1 + 2\eta) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} + \sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \right\}.$$



Rys. 3

Wykresy poszczególnych ugięć jak i porównanie ugięcia całkowitego z ugięciem wywołanym przez moment zginający podano na rys. 3. Wielkości momentów zginających i sił poprzecznych otrzymamy wprost z (2.2). Po prostych obliczeniach znajdziemy następujące wzory:

na siłę poprzeczną

$$Q(\eta) \approx -P \left[ H \left( \eta - \frac{1}{6} \right) + H \left( \eta - \frac{5}{6} \right) - \frac{4}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} \right];$$

na moment zginający

$$M(\eta) = -\frac{bE}{12\rho_2} y_Q^*(\eta) \approx -Pl \left\{ \left( \eta - \frac{1}{6} \right) H \left( \eta - \frac{1}{6} \right) + \left( \eta - \frac{5}{6} \right) H \left( \eta - \frac{5}{6} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \left[ (1-2\eta) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} - \sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \right\}.$$

Wykres sił poprzecznych podano na rys. 4, a wykres momentów ma przebieg jak na rys. 3b, przy czym rzędne należy jedynie pomnożyć przez wielkość  $-bE/12\rho_2$ .

Z otrzymanych rezultatów widać, że wpływ siły poprzecznej na ugięcia dostatecznie krótkich belek (w naszym przypadku  $h/l=1/6$ ) może być dosyć istotny.

#### 4. Przekrój zmienny

Ograniczymy się tutaj jedynie do krótkiego naszkicowania sposobu rozwiązania problemu. Rozważamy belkę o zmiennym przekroju opisanym związkami (2.8) (profil regularny). Wychodzimy ze wzorów (2.16), stanowiących układ równań różniczkowo-całkowych Voltery drugiego rodzaju, przy czym pochodne funkcji występują pod operatorami całkowymi. Pozwala to na zastosowanie zbieżnego procesu iteracji:

$$(4.1) \quad y_M^K(\eta) = L^{-1} [\tilde{\varphi}_1(s) \tilde{h}_1(s)] + \\ + \frac{l^3 b}{2\pi} \frac{E_p}{E} \int_0^\eta a^{K-1}(u) \varphi_1(\eta-u) du - \int_0^\eta g_1^{K-1}(u) \varphi_1(\eta-u) du,$$

$$y_Q^K(\eta) = L^{-1} [\tilde{\varphi}_2(s) \tilde{h}_2(s)] + \\ + \rho_2 \frac{lb}{\pi} \frac{E_p}{E} \int_0^\eta a^{K-1}(u) \varphi_2(\eta-u) du - \int_0^\eta g_2^{K-1}(u) \varphi_2(\eta-u) du,$$

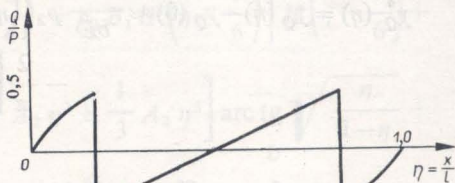
$$K = 0, 1, 2, \dots,$$

w którym

$$y_M^0(\eta) = L^{-1} [\tilde{\varphi}_1(s) \tilde{h}_1(s)], \quad y_Q^0(\eta) = L^{-1} [\tilde{\varphi}_2(s) \tilde{h}_2(s)],$$

$$a^{K-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} \int_0^1 \frac{y'_{K-1}(z) \sqrt{z(1-z)}}{z-u} dz,$$

$$g_1^{K-1}(u) = \left( \sum_1^{n+2} a_i u^i \right) y_{M,K-1}^{(4)} + \left( \sum_1^{n+1} b_i u^i \right) y_{M,K-1}''' + \left( \sum_1^n c_i u^i \right) y_{M,K-1}''$$



Rys. 4



$$g_2^{K-1}(u) = \left( \sum_1^n a_i u^i \right) y_{Q,K-1}'' + \left( \sum_1^{n-1} \beta_i u^i \right) y_{Q,K-1}' ,$$

$$\varphi_1(z) = L^{-1} [\tilde{\varphi}_1(s)] = L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2(a_0 s^2 + b_0 s + c_0)} \right] ,$$

$$\varphi_2(z) = L^{-1} [\tilde{\varphi}_2(s)] = L^{-1} \left[ \frac{1}{s(a_0 s + \beta_0)} \right] .$$

Możemy też zastosować drugi wariant rozwiązania, w którym za podstawę weźmiemy retransformację układu (2.15) w postaci

$$y_M(\eta) = L^{-1} [\tilde{\varphi}_1(s) \tilde{h}_1(s)] + \frac{l^3 b}{2\pi} \frac{E_p}{E} \int_0^\eta a(u) \varphi_1(\eta-u) du - L^{-1} [\tilde{\varphi}_1(s) \tilde{g}_1(s)] , \quad (4.2)$$

$$y_Q(\eta) = L^{-1} [\tilde{\varphi}_2(s) \tilde{h}_2(s)] + \rho_2 \frac{lb}{\pi} \frac{E_p}{E} \int_0^\eta a(u) \varphi_2(\eta-u) du - L^{-1} [\tilde{\varphi}_2(s) \tilde{g}_2(s)] .$$

Przepisując wyrażenia (2.9) wynikające ze zmienności przekroju w formie uporządkowanej względem potęg  $\eta$

$$\begin{aligned} g_1(\eta) &= (a_1 \eta + \dots + a_{n+2} \eta^{n+2}) y_M^{(4)} + (b_1 \eta + \dots + b_{n+1} \eta^{n+1}) y_M''' + \\ &+ (c_1 \eta + \dots + c_n \eta^n) y_M'' = (a_1 y_M^{(4)} + b_1 y_M''' + c_1 y_M'') \eta + (a_2 y_M^{(4)} + b_2 y_M''' + c_2 y_M'') \eta^2 + \dots + \\ &+ (a_n y_M^{(4)} + b_n y_M''' + c_n y_M'') \eta^n + (a_{n+1} y_M^{(4)} + b_{n+1} y_M''') \eta^{n+1} + a_{n+2} y_M^{(4)} \eta^{n+2} , \\ g_2(\eta) &= (a_1 \eta + \dots + a_n \eta^n) y_Q'' + (\beta_1 \eta + \dots + \beta_{n-1} \eta^{n-1}) y_Q' = \\ &= (a_1 y_Q'' + \beta_1 y_Q') \eta + (a_2 y_Q'' + \beta_2 y_Q') \eta^2 + \dots + (a_{n-1} y_Q'' + \beta_{n-1} y_Q') \eta^{n-1} + a_n y_Q'' \eta^n \end{aligned}$$

i stosując do tak otrzymanych wyrażeń transformację Laplace'a, dostaniemy

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(s) &= - \frac{d}{ds} [(a_1 s^4 + b_1 s^3 + c_1 s^2) \tilde{y}_M(s) - (a_1 y_M'(0) + b_1 y_M(0) + \\ &+ c_1 y_M(0)) s - (a_1 y_M'(0) + b_1 y_M(0)) s^2 - a_1 y_M(0) s^3] + \\ &+ \frac{d^2}{ds^2} [(a_2 s^4 + b_2 s^3 + c_2 s^2) \tilde{y}_M(s) - (a_2 y_M'(0) + b_2 y_M(0)) s^2 - \\ &- a_2 y_M(0) s^3] - \frac{d^3}{ds^3} [(a_3 s^4 + b_3 s^3 + c_3 s^2) \tilde{y}_M(s) - a_3 y_M(0) s^3] + \dots + \\ &+ (-1)^n \frac{d^{n+2}}{ds^{n+2}} [a_{n+2} s^4 \tilde{y}_M(s)] , \\ \tilde{g}_2(s) &= - \frac{d}{ds} [(a_1 s^2 + \beta_1 s) \tilde{y}_Q(s) - a_1 y_Q(0) s] + \\ &+ \frac{d^2}{ds^2} [(a_2 s^2 + \beta_2 s) \tilde{y}_Q(s)] + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [a_n s^2 \tilde{y}_Q(s)] . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Do układu (4.2) stosujemy następnie metodę kolejnych przybliżeń, rozpoczynając podobnie jak w przypadku (4.1) od wyrażeń  $y_M^0(\eta)$  i  $y_Q^0(\eta)$ . Kolejne funkcje  $y_M^K$  i  $y_Q^K$  wstawiamy do (4.3) (po transformacji) i znajdujemy potrzebne retransformaty.

Opisane tu sposoby rozwiązywania równań o zmiennych współczynnikach z powodzeniem stosowane były do szeregu konkretnych przykładów [4], między innymi przez G. SZEFERA i B. STACHOWICZ do pewnego problemu kontaktowego dla niejednorodnej półprzestrzeni sprężystej.

### 5. Zakończenie

Celem pracy była próba przedstawienia z jednolitego stanowiska złożonego problemu belki na podłożu typu półprzestrzeni sprężystej przy dostatecznie ogólnych założeniach, przede wszystkim zaś przy uwzględnieniu wpływu sił poprzecznych. Tę zwartą pozycję znaleziono na gruncie transformacji całkowitej Laplace'a, dzięki czemu udało się otrzymać efektywne rozwiązanie, ogólniejsze od rezultatów znanych dotąd w tym zakresie. Ogólność rozważań została co prawda okupiona nakładem stosunkowo żmudnych obliczeń [wzór (3.13) oraz (4.1) i (4.2)] jednakże, jak to pokazano na konkretnym przykładzie, można też otrzymać dogodnie przybliżone rezultaty przy dodatkowych, upraszczających założeniach.

Jak się wydaje, przedstawiony w pracy tok rozwiązania problemu rokuje szansę otrzymania nowych rezultatów dla wielu nieklasycznych zagadnień belek na podłożu sprężystym (belki na terenach objętych uszkodzeniami górnictwami itp.).

### Literatura cytowana w tekście

1. M. I. GORBUNOW-POSADOW, *Obliczanie konstrukcji na podłożu sprężystym*, Warszawa 1956.
2. M. MIKKOLA, A. YLINEN, *Effect of Shearing Force on the Deflection of a Beam of Finite Length on an Elastic Foundation*, Acta Polytechn. Scandin, Helsinki 1964.
3. M. MIKKOLA, *Influence Lines for Beams on a Winkler-Type Elastic Foundation, with the Effect of the Shear Deformation of the Beam taken into Account*, The State Inst. techn. Res., Finland, Helsinki 1967.
4. А. В. СОЛОДОВ, *Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами*, Ф. М., Москва 1962.
5. W. SCHMEIDLER, *Integralgleichungen mit anwendungen*, in Physik u. Technik, Leipzig 1955.
6. A. YLINEN, M. MIKKOLA, *A Beam on a Wieghardt-type elastic foundation*, Int. J. Sol. Struct., 3 (1967).

### Резюме

#### КОРОТКИЕ БАЛКИ НА ОСНОВАНИИ ТИПА УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе, рассматривается вопрос конечных балок, переменного сечения, при произвольной нагрузке и произвольных краевых условиях. Балки покоятся на упругом полупространстве, при учете влияния поперечных сил. Применяя интегральное преобразование Лапласа и элементы теории обобщенных функций, дается общее решение задачи. Для постоянного сечения удалось получить точное решение в виде ряда итерированных ядер (с оценкой сходимости), для переменного же сечения, приводится сходящийся процесс итерации. Результаты иллюстрируются числовым примером, доказывая, что влияние поперечных сил может иметь существенное значение.



## Summary

## SHORT BEAMS ON A BASE OF THE ELASTIC HALF-SPACE TYPE

Here considered is the problem of beams of finite length and variable cross-section — with an arbitrary load and arbitrary boundary conditions — lying upon an elastic base of the elastic half-space type, consideration being given to the influence of transverse forces. Using the Laplace integral transformation and elements of the theory of distribution, the general solution of the problem is given. For a constant cross-section it was possible to obtain an exact solution in the form of a series of iterated nuclei (with evaluation of the convergence); for the variable cross-section the convergent process of iteration is given. The results are illustrated with a numerical example, which proves that the influence of the transverse forces can be significant.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 lipca 1969 r.

Zakłada się, że materiał walca jest ściśły, jednorodny i izotropowy o najpełniejszej dowolnej charakterystyce fizycznej. Analogiczne rozważania, jednak jedynie dla materiału ściśniętego, zostały przeprowadzone przez Z. Wexlerowicza w pracy [1].

## 1. Definicja walcu

Prosty walec kołowy o promieniu  $a$  i długości  $h$ , znajdujący się w stanie naturalnym, oznaczamy przez  $B$ . Wskutek skończonego jednorodnego odkształcenia wstępnego wymiary walca zmieniają się odpowiednio na  $a'$  i  $h'$ . Walec o takich wymiarach oznaczamy przez  $B'$ . Wstępne odkształcenia określają parametry  $\lambda$  oraz  $\mu$ , definiowane wzorami

$$(1.1) \quad a' = \mu a, \quad h' = \lambda h.$$

Przyjmujemy w ciele  $B'$  walcowy układ współrzędnych  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (r, \theta, z)$ , który uważać będziemy za konwencjonalny. Kartezjańskie współrzędne punktu  $P$  w  $B'$  i  $\bar{P}$  w  $B$  są następujące:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta, & x_2 &= r \sin \theta, & x_3 &= z, \\ x_1 &= \frac{r'}{\mu} \cos \theta, & x_2 &= \frac{r'}{\mu} \sin \theta, & x_3 &= \frac{z'}{\lambda}. \end{aligned}$$

Tensory metryczne  $g_{ij}$ ,  $g_0$  oraz symbole Christoffela  $F_{ij}^k$  nierównoważnościowo zero mają postać

$$(1.3) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = \det g_{ij} = r'^2.$$