ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 18 (1970)

STATECZNOŚĆ PEŁNEGO SPRĘŻYSTEGO WALCA PRZY DUŻYCH ODKSZTAŁCENIACH

ELENA ZŁATANOWA (WARSZAWA)

Praca rozważa zagadnienie stateczności sprężystego walca poddanego skończonemu rozciąganiu lub ściskaniu. Podstawą rozważań jest teoria małych odkształceń sprężystych, nałożonych na odkształcenia sprężyste skończone, opracowana przez A. E. GREENA, R. S. RIVLINA i R.T. SHIELDA [1 i 2].

Zakłada się, że materiał walca jest ściśliwy, jednorodny i izotropowy o najzupełnie dowolnej charakterystyce fizyklalnej. Analogiczne rozważania, jednak jedynie dla materiału nieściśliwego, zostały przeprowadzone przez Z. WESOŁOWSKIEGO w pracy [3].

1. Deformacja wstępna

Prosty walec kołowy o promieniu $\mathring{a}$ i długości $\mathring{h}$, znajdujący się w stanie naturalnym, oznaczamy przez $\mathring{B}$. Wskutek skończonego jednorodnego odkształcenia wstępnego wymiary walca zmieniają się odpowiednio na a i h. Walec o takich wymiarach oznaczamy przez B. Wstępne odkształcenia określają parametry λ oraz μ, zdefiniowane wzorami

$$a = \mu\mathring{a}, \qquad h = \lambda\mathring{h}. \tag{1.1}$$

Przyjmujemy w ciele B walcowy układ współrzędnych $(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (r, \theta, z)$, który uważać będziemy za konwencjonalny. Kartezjańskie współrzędne punktu P w B i $\mathring{P}$ w $\mathring{B}$ są następujące:

$$\begin{gathered} x_1 = r\cos\vartheta, \qquad x_2 = r\sin\vartheta, \qquad x_3 = z, \\ \mathring{x}_1 = \frac{r}{\mu}\cos\vartheta, \qquad \mathring{x}_2 = \frac{r}{\mu}\sin\vartheta, \qquad \mathring{x}_3 = \frac{z}{\lambda}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Tensory metryczne g_{ij}, $\mathring{g}_{ij}$ oraz symbole Christoffela Γ^i_{jk} nierówne tożsamościowo zeru mają postać

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = \det g_{ij} = r^2; \tag{1.3}$$

$$\text{(1.3) [c.d.]}\quad \overset{\circ}{g}_{ij} = \begin{bmatrix} 1/\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2/\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \overset{\circ}{g}^{ij} = \begin{bmatrix} \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \overset{\circ}{g} = r^2/\mu^4 \lambda^2;$$

$$\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}.$$

Powyższe związki pozwalają wyznaczyć niezmienniki odkształcenia I_k oraz tensor naprężenia τ^{ij} [2]:

$$I_1 = \overset{\circ}{g}^{ij} g_{ij} = 2\mu^2+\lambda^2, \quad I_2 = \overset{\circ}{g}_{ij} g^{ij} I_3 = 2\mu^2 \lambda^2+\mu^4, \quad I_3 = \frac{g}{\overset{\circ}{g}} = \mu^4\lambda^2,$$

$$\text{(1.4)}\quad b^{ij} = \begin{bmatrix} \mu^4+\mu^2\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2}(\mu+\mu^2\lambda^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^2\lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$\tau^{11} = r^2 \tau^{22} = \mu^2 \Phi+(\mu^2+\mu^2\lambda^2)\Psi+p,$$

$$\tau^{33} = \lambda^2 \Phi+2\mu^2\lambda^2 \Psi+p,$$

$$\tau^{31} = \tau^{32} = \tau^{12} = 0,$$

gdzie

$$\text{(1.5)}\quad \Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad p = 2\sqrt{I_3}\frac{\partial W}{\partial I_3},$$

przy czym $W = W(I_1, I_2, I_3)$ jest potencjałem sprężystości.

Zakładając, że powierzchnia boczna walca jest nieobciążona, mamy

$$\text{(1.6)}\quad \tau^{11} = \mu^2 \Phi+(\mu^4+\mu^2\lambda^2)\Psi+p = 0.$$

Jeden z parametrów λ i μ, np. λ, może być przyjęty dowolnie, a parametr μ jest wtedy określony przez (1.6), $\mu = \mu(\lambda)$.

Równania równowagi mają postać

$$\text{(1.7)}\quad \nabla_i \tau^{ij} = 0.$$

Określony przez (1.4) stan naprężenia jest jednorodny. Wynika stąd, że równania równowagi są spełnione tożsamościowo.

2. Dodatkowe małe odkształcenia

Niech punkty ciała B doznają dodatkowego małego przemieszczenia $\varepsilon\mathbf{w}$ (ε oznacza mały parametr, $\varepsilon^2 \approx 0$). Stan ten oznaczamy przez B^*. Dodatkowe przemieszczenia $\varepsilon\mathbf{w}$ powodują to, że każda z wielkości charakterystycznych dla stanu B doznaje pewnego przyrostu. Liniowe części tych przyrostów będziemy oznaczać znakiem «prim». Jeśli w_i i w^i są kowariantnymi i kontrawariantnymi współrzędnymi wektora dodatkowego przemieszczenia, a $\mathbf{g}_i$ i $\mathbf{g}^i$ są odpowiednimi wektorami bazy, to dla ciała ściśliwego mają miejsce zależności [1]

$$g'_{ij} = \nabla_j w_i + \nabla_i w_j, \quad g' = g g^{rs} g'_{rs}; \tag{2.1}$$

$$\Gamma'^{i}_{jk} = \nabla_j \nabla_k w^i; \tag{2.2}$$

$$I'_1 = \mathring{g}^{rs} g'_{rs}, \quad I'_2 = \mathring{g}_{rs} (g'^{rs} I_3 + g^{rs} I'_3), \quad I'_1 = I_3 g^{rs} g'_{rs}; \tag{2.3}$$

$$\tau'^{ij} = \Phi' \mathring{g}^{ij} + \Psi' b^{ij} + \Psi b'^{ij} + p g'^{ij} + p' g^{ij}; \tag{2.4}$$

$$\Phi' = A I'_1 + F I'_1 + E I'_3 - (\Phi/2I_3) I'_3,$$

$$\Psi' = F I'_1 + B I'_2 + D I'_3 - (\Psi/2I_3) I'_3,$$

$$p' = (E I'_1 + D I'_2 + C I'_3) I_3 + (p/2I_3) I'_3, \tag{2.5}$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2}, \quad B = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2}, \quad C = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2},$$

$$D = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2 \partial I_3}, \quad E = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_3 \partial I_1}, \quad F = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2};$$

$$b'^{ij} = (\mathring{g}^{ij} \mathring{g}^{rs} - \mathring{g}^{ir} \mathring{g}^{js}) g'_{rs}. \tag{2.6}$$

Ciało B jest w równowadze, gdy są spełnione następujące równania różniczkowe:

$$\nabla_i \tau'^{ij} + \Gamma'^{j}_{ir} + \Gamma'^{r}_{ir} \tau^{ij} = 0. \tag{2.7}$$

Dalsze rozważania ograniczamy do osiowo-symetrycznych dodatkowych przemieszczeń, co oznacza, że w_i zależą od zmiennych r i z, a $w_2 = 0$.

Na podstawie równań (2.1), (2.2), (2.3), (2.5) i (2.6) i wprowadzając oznaczenia $w_1 = u$, $w_2 = v$, $w_3 = w$, $u_r = \partial u/\partial r$, $u_{rr} = \partial^2 u/\partial r^2$ itd., otrzymujemy

$$\begin{gathered} g'_{11} = -g'^{11} = 2u_r, \quad g'_{22} = -r^4 g'^{22} = 2ru, \\ g'_{33} = -g'^{33} = 2w_2, \quad g'_{13} = -g'^{13} = u_z + w_r, \\ g'_{32} = g'^{32} = g'_{21} = g'^{21} = 0; \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered} \Gamma'^{1}_{11} = u_{rr}, \quad \Gamma'^{1}_{22} = r u_r - u, \quad \Gamma'^{1}_{33} = u_{zz}, \quad \Gamma'^{1}_{23} = \Gamma'^{1}_{21} = 0, \quad \Gamma'^{1}_{13} = u_{rz}, \\ \Gamma'^{2}_{11} = \Gamma'^{2}_{22} = \Gamma'^{2}_{33} = 0, \quad \Gamma'^{2}_{23} = \frac{1}{r} u_z, \quad \Gamma'^{2}_{12} = \frac{1}{r} u_r - \frac{u}{r^2}, \quad \Gamma'^{2}_{31} = 0, \\ \Gamma'^{3}_{11} = w_{rr}, \quad \Gamma'^{3}_{22} = r w_r, \quad \Gamma'^{3}_{33} = w_{zz}, \quad \Gamma'^{3}_{23} = \Gamma'^{3}_{12} = 0, \quad \Gamma'^{3}_{12} = w_{rz}; \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} I'_1 = 2\mu^2 \left(u_r + \frac{u}{r} \right) + 2\lambda^2 w_z, \\ I'_2 = 2(\mu^2 \lambda^2 + \mu^4) \left(u_r + \frac{u}{r} \right) + 4\mu^2 \lambda^2 w_z, \\ I'_3 = 2\mu^4 \lambda^2 \left(u_r + \frac{u}{r} + w_z \right); \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi' = [2A\mu^2+2F(\mu^2\lambda^2+\mu^4)+2E\mu^4\lambda^2-\Phi]\left(u_r+\frac{u}{r}\right)+\\
&\qquad\qquad +(2A\lambda^2+4F\mu^2\lambda^2+2E\mu^4\lambda^2-\Phi)\,w_z,\\
&\Psi' = [2F\mu^2+2B(\mu^2\lambda^2+\mu^4)+2D\mu^4\lambda^2-\Psi]\left(u_r+\frac{u}{r}\right)+\\
&\qquad\qquad +(2F\lambda^2+4B\mu^2\lambda^2+2D\mu^4\lambda^2-\Psi)\,w_z,\\
&p' = [2E\mu^6\lambda^2+2D(\mu^6\lambda^4+\mu^8\lambda^2)+2C\mu^8\lambda^4+p]\left(u_r+\frac{u}{r}\right)+\\
&\qquad\qquad +(2E\mu^4\lambda^4+4D\mu^6\lambda^4+2C\mu^8\lambda^4+p)\,w_z;
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&b'^{11} = 2\left(\mu^4\frac{u}{r}+\mu^2\lambda^2 w_z\right), \quad b'^{22} = \frac{2}{r^2}(\mu^4 u_r+\mu^2\lambda^2 w_z),\\
&b'^{33} = 2\mu^2\lambda^2\left(u_r+\frac{u}{r}\right), \quad b'^{13} = -\lambda^2\mu^2(u_z+w_r), \quad b'^{21} = b'^{23} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Podane wielkości pozwalają obliczyć współrzędne tensora przyrostu naprężenia:

$$
\begin{aligned}
&\tau'^{11} = N_1\left(u_r+\frac{1}{r}u\right)-2(p+\mu^4\Psi)\,u_r+M_1 w_z,\\
&r^2\tau'^{22} = N_1\left(u_r+\frac{1}{r}u\right)-2(p+\mu^4\Psi)\frac{u}{r}+M_1 w_z,\\
&\tau'^{33} = N_2\left(u_r+\frac{1}{r}u\right)+M_2 w_z,\\
&\tau'^{13} = -(\mu^2\lambda^2\Psi+p)(u_z+w_z),\\
&\tau'^{12} = \tau'^{23} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$
\begin{aligned}
&N_1 = 2A\mu^4+2B(\mu^4+\mu^2\lambda^2)^2+2C\mu^8\lambda^4+4D(\mu^8\lambda^2+\mu^6\lambda^4)+\\
&\qquad +4E\mu^6\lambda^2+4F(\mu^6+\mu^2\lambda^2)-\Phi\mu^2-\Psi(\mu^2\lambda^2-\mu^4)+p,\\
&N_2 = 2A\mu^2\lambda^2+4B(\mu^6\lambda^2+\mu^4\lambda^4)+2C\mu^8\lambda^4+2D(\mu^8\lambda^2+3\mu^6\lambda^4)+\\
&\qquad +2E(\mu^6\lambda^2+\mu^4\lambda^4)+2F(3\mu^4\lambda^2+\mu^2\lambda^4)-\Phi\lambda^2+p,\\
&M_1 = 2A\mu^2\lambda^2+4B(\mu^6\lambda^2+\mu^4\lambda^4)+2C\mu^8\lambda^4+2D(\mu^8\lambda^2+3\mu^6\lambda^4)+\\
&\qquad +2E(\mu^6\lambda^2+\mu^4\lambda^4)+2F(3\mu^4\lambda^2+\mu^4\lambda^4)-\Phi\mu^2-\Psi(\mu^4-\mu^2\lambda^2)+p,\\
&M_2 = 2A\lambda^4+8B\mu^4\lambda^4+2C\mu^8\lambda^4+8D\mu^6\lambda^4+\\
&\qquad +4E\mu^4\lambda^4+2F(\mu^4\lambda^2+3\mu^2\lambda^4)-\Phi\lambda^2-2\Psi\mu^2\lambda^2-p.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Podstawiając do równania (2.7) współrzędne tensora τ'^{ij} dla $j=1$ i $j=3$, otrzymujemy dwa liniowe równania różniczkowe cząstkowe. Dla $j=2$ wskutek osiowej symetrii odpowiednie równanie jest spełnione tożsamościowo:

$$(2.15)\quad \begin{aligned} &N_1^*\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}u\right)+\lambda^2(\Phi+\mu^2\Psi)u_{zz}+M_1^*w_{rz}=0,\\ &N_2^*\left(u_{rz}+\frac{1}{r}u_z\right)+\mu^2(\Phi+\mu^2\Psi)\left(w_{rr}+\frac{1}{r}w_r\right)+M_2^*w_{zz}=0; \end{aligned}$$

oznaczyliśmy tu

$$(2.16)\quad \begin{aligned} &N_1^*=N_1+2\mu^2(\Phi+\lambda^2\Psi), \qquad N_2^*=N_2+\lambda^2(\Phi+\mu^2\Psi),\\ &M_1^*=M_1+\mu^2(\Phi+\mu^2\Psi), \qquad M_2^*=M_2+2\lambda^2(\Phi+2\mu^2)+2\Psi p. \end{aligned}$$

Współczynniki powyższego układu są zależne jedynie od własności materiału i parametrów wstępnej deformacji λ i μ.

Zakładamy, że walec jest odkształcony w taki sposób, że powierzchnia jego $z=0, h$ pozostaje płaska i obciążona jedynie siłami normalnymi. Zakładamy dalej, że walcowa powierzchnia jest wolna od obciążenia. Odkształcenie takie ma miejsce przy ściskaniu (rozciąganiu) walca między dwiema płaskimi sztywnymi płytami. Zgodnie z (2.13) wynikają stąd następujące warunki brzegowe:

$$(2.17)\quad \begin{aligned} &w=0 \quad \text{dla} \quad z=0, l,\\ &\tau'^{13}=0, \quad u_z+w_r=0, \quad \text{dla } z=0, l; \end{aligned}$$

$$(2.18)\quad \begin{aligned} &\tau'^{13}=0, \quad u_z+w_r=0 \quad \text{dla } r=a,\\ &\tau'^{11}=0, \quad N_1\left(u_r+\frac{1}{r}u_r\right)-2(p+\mu^4\Psi)u_r+M_1w_z=0 \quad \text{dla } r=a. \end{aligned}$$

3. Rozwiązanie ogólne

Dla układu równań różniczkowych (2.15) poszukujemy rozwiązania w postaci szeregów

$$(3.1)\quad u=\sum_n a_n(r)\cos\nu z, \quad w=\sum_n \beta_n(r)\sin\nu z, \quad \nu=\frac{\pi n}{h},$$

w których $a_n(r)$ i $\beta_n(r)$ są funkcjami zmiennej r. Układ (2.15) jest spełniony wtedy, gdy funkcje te spełniają dla każdego ν następujące zwyczajne równania różniczkowe:

$$(3.2)\quad \begin{aligned} &N_1^*\left(\frac{d^2a_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{da_n}{dn}-\frac{1}{r^2}a_n\right)-\nu^2\lambda^2(\Phi+\mu^2\Psi)a_n+\nu M_1^*\frac{d\beta_n}{dn}=0,\\ &-\nu N_2^*\left(\frac{da_n}{dr}+\frac{1}{r}a_n\right)+\mu^2(\Phi+\mu^2\Psi)\left(\frac{d^2\beta_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\beta_r\right)-\nu^2M_2^*\beta_n=0. \end{aligned}$$

W celu rozwiązania układu (3.2) wyrażamy β_n przez a_n z pierwszego równania,

$$(3.3)\qquad \frac{d\beta_r}{dr} = -\frac{N_1^*}{\nu M_1^*}\left(\frac{d^2 a_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{da_n}{dr} - \frac{1}{r^2}a_n\right) + \nu\frac{\lambda^2(\Phi+\mu^2\Psi)}{M_1^*}a_n,$$

i podstawiamy (3.3) do równania drugiego. Ostatecznie otrzymujemy równanie różniczkowe czwartego rzędu, które da się przedstawić w następującej postaci

$$(3.4)\qquad (H^4 + 2\nu^2 bH^2 + \nu^4 C)\, a_n = 0,$$

gdzie

$$H^2 = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r)\right],$$

$$(3.5)\qquad b = \frac{1}{2}\left[\frac{N_2^* M_1^*}{\mu^2(\Phi+\mu^2\Psi)N_1^*} - \frac{M_2^*}{\mu^2(\Phi+\mu^2\psi)} - \frac{\lambda^2(\Phi+\mu^2\Psi)}{N_1^*}\right],$$

$$c = \frac{\lambda^2}{\mu^2}\cdot\frac{M_2^*}{N_1^*}.$$

Podstawiając funkcje (3.1) oraz (3.3) do warunków brzegowych (2.18), otrzymujemy warunki brzegowe na funkcje a_n:

$$\left[H^2 + \nu^2\frac{M_1^* - \lambda^2(\Phi+\mu^2\Psi)}{N_1^*}\right] a_n = 0 \quad \text{dla} \quad r = a,$$

$$(3.6)\qquad \left(N_1 - \frac{N_1^* M_1}{M_1^*}\right)H^2 a_n - 2(p+\mu^4\Psi)\frac{d^2 a_n}{dr^2} + \nu\frac{\lambda^2(\Phi+\mu^2\Psi)M_1}{M_1^*}a_n = 0$$

$$\text{dla } r = a.$$

Równanie (3.4) i warunki brzegowe (3.6) określają jednorodne zagadnienie brzegowe. Jeśli zagadnienie to ma rozwiązanie niezerowe, ciało B nie znajduje się w równowadze trwałej i traci stateczność [4].

Równanie (3.4) można przedstawić w postaci

$$(3.7)\qquad (H^2 + \nu^2\kappa_1^2)(H^2 + \nu^2\kappa_2^2)\, a_n = 0,$$

gdzie

$$\kappa_1 = \sqrt{b + \sqrt{b^2 - c}}, \qquad \kappa_2 = \sqrt{b - \sqrt{b^2 - c}}$$

są funkcjami parametrów deformacji λ i μ.

Rozwiązanie równania typu (3.7) wraz z obszerną analizą podane są w pracy [3]. Dla $\kappa_1 \neq \kappa_2$ całkę ogólną otrzymujemy jako sumę rozwiązań dwóch równań Bessela:

$$(3.8)\qquad (H^2 + \nu^2\kappa_1^2)\, a_n = 0, \qquad (H^2 + \nu^2\kappa_2^2)\, a_n = 0.$$

Rozwiązanie ogólne jest więc następujące:

$$(3.9)\qquad a_n = C_1 J_1(\nu\kappa_1 r) + C_2 J_1(\nu\kappa_2 r) + C_3 Y_1(\nu\kappa_1 r) + C_4 Y_1(\nu\kappa_2 r).$$

Jeżeli $\kappa_1 = \kappa_2$ to odpowiednim rozwiązaniem jest funkcja

$$a_n = C_1 J_1(\nu\kappa r) + C_2 rJ_0(\nu\kappa r) + C_3 Y_1(\nu\kappa r) + C_4 rY_0(\nu\kappa r), \tag{3.10}$$

gdzie C_i są stałymi całkowania, J_i są funkcjami Bessela pierwszego rodzaju, a Y_i drugiego rodzaju. Ponieważ jednak funkcje Y_i są nieokreślone dla $r = a$, więc biorąc pod uwagę fizyczny sens zagadnienia stałe przed nimi muszą być zerami.

Ostatecznym rozwiązaniem równania (3.6) jest układ funkcji

$$a_n = C_1 J_1(\nu\kappa_1 r) + C_2 J_1(\nu\kappa_2 r), \quad \text{dla } \kappa_1 \neq \kappa_2, \tag{3.11}$$

$$a_n = C_1 J_1(\nu\kappa r) + C_2 rJ_0(\nu\kappa r), \quad \text{dla } \kappa_1 = \kappa_2. \tag{3.12}$$

4. Warunki utraty stateczności

Jako warunek utraty stateczności przyjmujemy osiągnięcie takiego stanu, w którym zagadnienie brzegowe nałożenia małych odkształceń na odkształcenia skończone dopuszcza wieloznaczne rozwiązanie. W obecnym zagadnieniu istotne znaczenie ma wielkość $b^2 - C$. Odróżniamy dwa podstawowe przypadki, dla których sporządzamy odrębne warunki utraty stateczności.

1. Przypadek $b^2 - C \neq 0$ $(\kappa_1 \neq \kappa_2)$. Podstawiamy rozwiązanie (3.11) do warunków (3.6) i otrzymujemy

$$\begin{aligned} &C_1[M_1^* - \lambda^2(\Phi + \mu^2\Psi) - \kappa_1^2 N_1^*] J_1(\nu\kappa_1 a) + \\ &\qquad + C_2[M_1^* - \lambda^2(\Phi + \mu^2\Psi) - \kappa_2^2 N_1^*] J_1(\nu\kappa_2 a) = 0, \\ &C_1\{[\nu\lambda^2(\Phi + \mu^2\Psi) M_1 - (L_1 M_1^* - L_1^* M_1)\kappa_1^2\nu^2 - \\ &\qquad - 2(p + \mu^4\psi) M_1^*] J(\nu\kappa_1 a)^2 J_1(\nu\kappa_1 a) + \\ &+ 2(p + \mu^4\Psi) M_1^*[(\nu\kappa_1 a) J_0(\nu\kappa_1 a) - 2J_1(\nu\kappa_1 a)]\} + C_2\{\nu\lambda^2(\Phi + \mu^2\Psi) M_1 - \\ &- (L_1 M_1^* - L_1^* M_1)\kappa_2^2\nu^2 - 2(p + \mu^4\Psi)] M_1^*(\nu\kappa_2 a)^2 J_1(\nu\kappa_2 a) + \\ &+ 2(p + \mu^4\Psi) M_1^*[\nu\kappa_2 a J_0(\nu\kappa_2 a) - 2J_1(\nu\kappa_2 a)]\} = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Istnieje nietrywialne rozwiązanie powyższego układu wtedy, gdy wyznacznik, utworzony ze współczynników przy stałych C_i, równa się zeru. Jest to warunek utraty stateczności:

$$\begin{aligned} &[M_1^* - \lambda^2(\Phi + \mu^2\Psi) - \kappa_1^2 N_1^*] J_1(\nu\kappa_1 a)\{[\nu\lambda^2(\Phi + \mu^2\Psi) M_1 - \\ &- (L_1^* M_1^* - L_1^* M_1)\kappa_2^2\nu^2 - 2(p + \mu^4\Psi) M_1^*] J(\nu\kappa_2 a)^2 J_1(\nu\kappa_2 a) + \\ &+ 2(p + \mu^4\Psi) M_1^*[\nu\kappa_2 a J_0(\nu\kappa_2 a) - 2J_1(\nu\kappa_2 a)]\} - [M_1^* - \lambda^2(\Phi + \mu^2\Psi) - \\ &- \kappa_2^2 N_1^*] J_1(\nu\kappa_2 a)\{[\nu\lambda^2(\Phi + \mu^2\Psi) M_1 - (L_1 M_1^* - L_1^* M_1)\kappa_2^2\nu^2 - 2(p + \\ &+ \mu^4\Psi) M_1^*](\nu\kappa_1 a)^2 J_1(\nu\kappa_1 a) + 2(p + \mu^4\Psi) M_1^*[\nu\kappa_1 a J_0(\nu\kappa_1 a) - 2J_1(\nu\kappa_1 a)]\} = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Warunek (4.2) można stosować bezpośrednio, gdy $b^2 - c > 0, b > 0$, co oznacza, że κ_1 i κ_2 są rzeczywiste. Natomiast gdy $\kappa_1 \neq \kappa_2$ są urojone lub zespolone, należy warunek ten odpowiednio przekształcić i wyrazić przez funkcje Bessela urojonego i zespolonego argumentu.

2. Przypadek $b^2-c=0$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa$. Otrzymujemy ten warunek podstawiając rozwiązanie (3.12) do warunków brzegowych (3.6). Wtedy będą miały one postać:

$$
\begin{aligned}
&C_1\{\nu^2[M_1^*-\lambda^2(\Phi+\mu^2\Psi)]-N_1^*\}J_1(\nu\kappa a)+\\
&\qquad+C_2\{[\nu^2 M_1^*-\nu^2\lambda^2(\Phi+\mu^2\Psi)-N_1^*]\,\nu\kappa a\,J_0-2N_1^*J_1(\nu\kappa a)\}=0,\\
&C_1\{[\nu\lambda^2(\Phi+\mu^2\Psi)M_1+N_1M_1^*-N_1^*M_1-2(p+\mu^4)M_1^*](\nu\kappa a)^2J_1(\nu\kappa a)-\\
(4.3)\quad&-2(p+\mu^4\Psi)M_1^*+[2J_1(\nu\kappa a)-\nu\kappa a\,J_0(\nu\kappa a)]\}+C_2\{[\nu\lambda^2(\Phi+\mu^2\Psi)M_1-\\
&\qquad-2(p+\mu^4\Psi)M_1^*+N_1M_1^*-N_1^*M_1](\nu\kappa a)^3J_0(\nu\kappa a)-\\
&\qquad-2[(p+\mu^4\Psi)M_1^*-N_1M_1^*+N_1^*M_1](\nu\kappa a)^2J_1(\nu\kappa a)\}=0.
\end{aligned}
$$

Przypadek ten obejmuje tylko niektóre szczególne wartości parametrów deformacji λ i μ. Przy tym κ może być rzeczywiste, urojone lub zespolone.

Otrzymane rezultaty (4.2) i (4.3) dla walca ściśliwego istotnie się różnią od odpowiednich warunków otrzymanych w pracy [3] dla walca nieściśliwego. Wywołane jest to tym, że warunek brzegowy $\tau'^{11}=0$ dla walca ściśliwego jest drugiego rzędu, podczas gdy ten sam warunek dla walca nieściśliwego jest trzeciego rzędu.

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. Green, R. S. Rivlin, R. T. Shield, *General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformation*, Proc. Roy. Soc., **A211** (1952).
2. A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
3. Z. Wesołowski, *The symmetric problem of stability loss of an elastic bar subject to tension*, Arch. Mech. Stos., 3, **15** (1963).
4. Guo Zhong-heng, W. Urbanowski, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations*, Arch. Mech. Stos., 2, **15** (1963).

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛНОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Рассматривается устойчивость полного кругового цилиндра, подверженного конечному растяжению или сжатию. Предполагается, что материал цилиндра является упругим, сжимаемым с наиболее произвольной физической характеристикой. Использовался метод малых деформаций, наложенных на предварительные конечные деформации. После линеаризации зависимостей для малой добавочной деформации, получается система дифференциальных уравнений с частными производными, которая после разложения искомых функций в ряды Фурье, свелась к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Находится общее решение этой системы. Даются краевые условия для нагрузки, перпендикулярной торцевым поверхностям и боковой поверхности, свободной от нагрузки.

Даются условия потери устойчивости, соответствующей приведенному способу нагрузки.

Summary

STABILITY OF A FULLY-ELASTIC CYLINDER AT LARGE DEFORMATIONS

The paper considers the stability of a full circular cylinder subjected to a finite stretching or compressing. It is assumed that the cylinder material is elastic and compressible with a completely arbitrary physical characteristic. The method of small deformations superposed on the initial finite deformations is used. After the linearization of the relationships for a small additional deformation a set of partial differential equations was obtained, which upon the decomposition of the functions sought for into a Fourier series became reduced to a set of ordinary differential equations. The general solution of this set of equations has been found. The boundary conditions were constructed for a load vertical to the front surfaces, and the lateral surfaces are not under load.

The conditions of loss of stability are given corresponding to the above mentioned manner of loading.

POLITECHNIKA, SOFIA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 sierpnia 1969 r.