ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 38, 3-4, 507-528, 1990
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

LAMINARNY MAGNETOHYDRODYNAMICZNY PRZEPŁYW CIECZY LEPKIEJ W SZCZELINIE MIĘDZY KRZYWOLINIOWYMI WIRUJĄCYMI POWIERZCHNIAMI OBROTOWYMI

JERZY S A W I C K I (BYDGOSZCZ)

W pracy rozpatrzono stacjonarny przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między krzywoliniowymi powierzchniami obrotowymi. Do rozwiązania problemu wykorzystano równania warstwy przyściennej w układzie krzywoliniowym współrzędnych x, θ, y. Równania warstwy przyściennej rozwiązano metodą małego parametru. Otrzymane formuły określają takie parametry, jak składowe prędkości $\bar{V}_x, \bar{V}_\theta, \bar{V}_y$ i ciśnienie $\bar{p}$.

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

B	wektor indukcji magnetycznej,
B_x, B_θ, B_y	składowe wektora indukcji magnetycznej,
E	wektor natężenia pola elektrycznego,
E_x, E_θ, E_y	składowe natężenia pola elektrycznego,
H	wektor natężenia pola magnetycznego,
H_x, H_θ, H_y	składowe wektora natężenia pola magnetycznego,
Ha	liczba Hartmanna,
$2h(x)$	grubość szczeliny,
I	całkowity prąd elektryczny,
j	wektor gęstości prądu,
j_x, j_θ, j_y	składowe wektora gęstości prądu,
POS, POK	bezwymiarowe parametry związane z wpływem odśrodkowych sił bezwładności,
PWS, PWK	bezwymiarowe parametry związane z wpływem wzdłużnych sił bezwładności,

p	ciśnienie,
pw	ciśnienie na wlocie do szczeliny,
pz	ciśnienie na wylocie ze szczeliny,
$R(x)$	promień powierzchni środkowej szczeliny,
Re	liczba Reynoldsa,
$\mathbf{V}$	wektor prędkości,
V_x, V_θ, V_y	składowe wektora prędkości,
μ	współczynnik lepkości dynamicznej,
ρ	gęstość cieczy,
σ	konduktywność cieczy,
ω_1, ω_2	prędkości kątowe powierzchni obrotowej górnej i dolnej.

1. Wprowadzenie

Laminarne przepływy cieczy lepkiej przewodzącej elektrycznie w szczelinach między wirującymi powierzchniami obrotowymi w obecności pól magnetycznych i elektrycznych odgrywają coraz bardziej istotną rolę w technice [1,2]. Z tego też względu, badania w tej dziedzinie mają bardzo duże znaczenie zarówno dla badań podstawowych, jak również dla licznych zastosowań praktycznych.

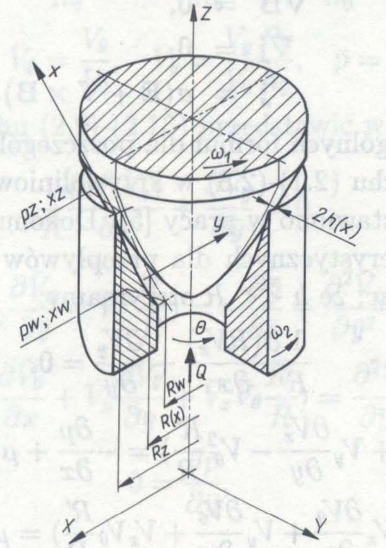
Badania ruchu cieczy lepkich w obecności pól magnetycznych i elektrycznych, a także badania wpływu tych pól na różne procesy fizyczne i chemiczne były prowadzone od wielu już lat. Dotyczyły one w istocie problemów astro i geofizyki, takich jak: dynamika gazowych kosmicznych mas, przenikanie promieniowania kosmicznego, dynamika ciekłych mas we wnętrzu Ziemi, jak również zagadnień związanych z bezpośrednią przemianą energii cieplnej w elektryczną w tzw. generatorach magnetohydrodynamicznych.

Nowe możliwości jakie stwarzają ciecze przewodzące elektrycznie w rozwiązywaniu licznych zagadnień konstrukcyjnych i eksploatacyjnych w zakresie tarcia, zużycia i smarowania, a zwłaszcza w teorii łożysk ślizgowych, sprzęgieł i uszczelnień zadecydowały o konieczności badania zjawisk występujących w tego rodzaju przepływach.

Celem pracy jest analiza wpływu pola magnetycznego i elektrycznego oraz efektów bezwładności pochodzących od wzdłużnych i odśrodkowych sił wywołanych przepływem cieczy przewodzącej elektrycznie w szczelinach między obracającymi się krzywoliniowymi powierzchniami obrotowymi, w obecności azymutalnego pola magnetycznego.

2. Równania ruchu cieczy

Rozpatrywany ruch cieczy lepkiej przewodzącej elektrycznie w szczelinie o konfiguracji przedstawionej na rysunku 1 jest laminarny, ustalony i izotermiczny.



Rys. 1. Obszar przepływu cieczy lepkiej

Przepływ odbywa się w obecności zewnętrznego, stacjonarnego, niejednorodnego pola magnetycznego $(0, B_\theta, 0)$ oraz ortogonalnego do powierzchni środkowej pola elektrycznego $(0, 0, E_y)$. Ponadto ograniczono się w rozważaniach ruchu analizowanej cieczy do tzw. przybliżenia magnetohydrodynamicznego [3]. Prowadzi ono, przy założeniu dużej przewodności elektrycznej ośrodka, do pominięcia w równaniach elektrodynamiki gęstości prądu przesunięcia i gęstości prądu konwekcji. Zakładając, iż magnetyczna liczba Reynoldsa jest bardzo mała ($\mathrm{Re}_M << 1$) pominięto wpływ indukowanego przez ruch cieczy pola magnetycznego.

Na podstawie zasad zachowania masy i pędu, równania ruchu przyjmują postać [4]:

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \tag{2.1}$$

$$\rho(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{V} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}. \tag{2.2}$$

Równania (2.1)-(2.2) wymagają do ich "zamknięcia" dodatkowych równań opisujących pole magnetyczne i elektryczne, a mianowicie równań elektrodynamiki:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla \mathbf{E} = 0, \tag{2.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j}, \tag{2.5}$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \tag{2.6}$$

$$\nabla \mathbf{j} = 0, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \tag{2.8}$$

Korzystając z ogólnych formuł dla poszczególnych operacji wektorowych, równania ruchu (2.1)-(2.8) w krzywoliniowym układzie współrzędnych x, θ, y przedstawiono w pracy [5]. Dokonując w tych równaniach oszacowań charakterystycznych dla przepływów w cienkich warstwach cieczy, tj. zakładając, że $h << R$ otrzymamy:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial(RV_x)}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \tag{2.9}$$

$$\rho(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} - V_\theta^2\frac{R'}{R}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - j_y B_\theta, \tag{2.10}$$

$$\rho(V_x\frac{\partial V_\theta}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_\theta}{\partial y} + V_x V_\theta\frac{R'}{R}) = \mu\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial y^2}, \tag{2.11}$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2.12}$$

$$j_y = \sigma(E_y + V_x B_\theta). \tag{2.13}$$

Z równania (2.12) wynika zależność:

$$p = p(x). \tag{2.14}$$

Warunki brzegowe dla składowych prędkości są następujące:

$$V_x = 0 \quad \text{dla} \quad y = \mp h,$$
$$V_y = 0 \quad \text{dla} \quad y = \mp h,$$

$$\begin{aligned} V_\theta &= \omega_1 R(x) \quad \text{dla} \quad y = h, \\ V_\theta &= \omega_2 R(x) \quad \text{dla} \quad y = -h. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Natomiast na wlocie i wylocie ze szczeliny powinny być spełnione następujące warunki brzegowe dla ciśnienia:

$$\begin{aligned} p &= pw \quad \text{dla} \quad x = xw, \\ p &= pz \quad \text{dla} \quad x = xz. \end{aligned} \tag{2.16}$$

3. Całki równań ruchu

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe określone następującymi formułami:

$$\bar{x} = \frac{x}{R_0}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_0}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h_0},$$

$$\bar{V}_x = \frac{V_x}{V_0}, \quad \bar{V}_\theta = \frac{V_\theta}{V_0}, \quad \bar{V}_y = \frac{V_y}{V_0}\frac{R_0}{h_0}, \quad \bar{p} = \frac{p h_0}{\mu V_0}\frac{h_0}{R_0},$$

możemy równania ruchu (2.9)-(2.13) przedstawić w postaci

$$(3.1) \qquad \frac{1}{\bar{R}}\frac{\partial(\bar{R}\bar{V}_x)}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{V}_y}{\partial\bar{y}} = 0,$$

$$(3.2) \qquad \lambda\left(\bar{V}_x\frac{\partial\bar{V}_x}{\partial\bar{x}} + \bar{V}_y\frac{\partial\bar{V}_x}{\partial\bar{y}} - \bar{V}_\theta^2\frac{\bar{R}'}{\bar{R}}\right) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial^2\bar{V}_x}{\partial\bar{y}^2} - \bar{j}_y\bar{B}_\theta \mathrm{Ha},$$

$$(3.3) \qquad \lambda\left(\bar{V}_x\frac{\partial\bar{V}_\theta}{\partial x} + \bar{V}_y\frac{\partial\bar{V}_\theta}{\partial y} + \bar{V}_x\bar{V}_\theta\frac{\bar{R}'}{\bar{R}}\right) = \frac{\partial^2\bar{V}_\theta}{\partial\bar{y}^2},$$

$$(3.4) \qquad 0 = \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}},$$

gdzie

$$\mathrm{Ha} = B_0 h_0\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \quad \bar{B}_\theta = \frac{B_\theta}{B_0}, \quad \bar{j}_y = \frac{h_0 j_y}{V_0}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \quad \lambda = \mathrm{Re}\left(\frac{h_0}{R_0}\right).$$

Wielkości oznaczone indeksem "zero", są wielkościami średnimi w rozpatrywanym obszarze przepływu, λ – zmodyfikowaną liczbą Reynoldsa, która w przepływach laminarnych spotykanych w praktyce spełnia zależność

$$(3.5) \qquad \lambda < 1.$$

Z równań (3.1)-(3.4) wynika, że dla ruchu cieczy przewodzącej elektrycznie, dla której spełniony jest warunek (3.5), λ jest małym parametrem układu. Można zatem jego rozwiązania poszukiwać w postaci szeregów potęgowych względem λ:

$$(3.6) \quad \bar{V}_x = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\bar{V}_x^i, \quad \bar{V}_\theta = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\bar{V}_\theta^i, \quad \bar{V}_y = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\bar{V}_y^i, \quad \bar{p}_{i=0} = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\bar{p}^i.$$

Podstawiając szeregi (3.6) do równań (3.1)-(3.4), a następnie porządkując i grupując wyrazy względem tych samych potęg λ, otrzymamy, ograniczając się do przybliżenia liniowego oraz wracając do postaci wymiarowej, następujący ciąg równań:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial(RV_x^0)}{\partial x}+\frac{\partial V_y^0}{\partial y}=0, \tag{3.7}$$

$$0=-\frac{\partial p^0}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 V_x^0}{\partial y^2}-j_y^0 B_\theta, \tag{3.8}$$

$$0=\mu\frac{\partial^2 V_\theta^0}{\partial y^2}, \tag{3.9}$$

$$0=\frac{\partial p^0}{\partial y}, \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial(RV_x^1)}{\partial x}+\frac{\partial V_y^1}{\partial y}=0, \tag{3.11}$$

$$\rho\Big(V_x^0\frac{\partial V_x^0}{\partial x}+V_y^0\frac{\partial V_x^0}{\partial y}-V_\theta^0\frac{R'}{R}\Big)=-\frac{\partial p^1}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 V_x^1}{\partial y^2}, \tag{3.12}$$

$$\rho\Big(V_x^0\frac{\partial V_\theta^0}{\partial x}+V_y^0\frac{\partial V_\theta^0}{\partial y}+V_x^0 V_\theta^0\frac{R'}{R}\Big)=\mu\frac{\partial^2 V_\theta^1}{\partial y^2}-j_y^1 B_\theta, \tag{3.13}$$

$$0=\frac{\partial p^1}{\partial y}. \tag{3.14}$$

Warunki brzegowe zgodnie z (2.15) i (2.16) przyjmują teraz postać:

$$\begin{aligned}
V_x^0 &= 0,\ V_y^0=0,\ V_\theta^0=\omega_1 R(x),\\
V_x^1 &= 0,\ V_y^1=0,\ V_\theta^1=0,\ \text{dla}\ y=+h;\\
V_x^0 &= 0,\ V_y^0=0,\ V_\theta^0=\omega_2 R(x),\\
V_x^1 &= 0,\ V_y^1=0,\ V_\theta^1=0,\ \text{dla}\ y=-h;\\
p^0 &= pw,\ p^1=0,\ \text{dla}\ x=xw;\\
p^0 &= pz,\ p^1=0,\ \text{dla}\ x=xz.
\end{aligned}$$

Całkując równania (3.7)-(3.14) przy spełnieniu powyższych warunków brzegowych, otrzymamy:

$$V_x^0=\frac{1}{2\mu Rh^3}\frac{pw-pz-(Bw-Bz)}{(Aw-Az)+(Mw-Mz)}(y^2-h^2), \tag{3.15}$$

$$V_y^0=-\frac{h'}{2\mu Rh^4}\frac{pw-pz-(Bw-Bz)}{(Aw-Az)+(Mw-Mz)}(h^2y-y^3), \tag{3.16}$$

$$(3.17)\quad V_\theta^0 = \frac{R}{2}[(\omega_1-\omega_2)\frac{y}{h}+(\omega_1+\omega_2)],$$

$$(3.18)\quad p^0 = B(x)+\frac{[A(x)-Az](pw-Bw)[1+Z(x)]}{(Aw-Az)[1+(Mw-Mz)/(Aw-Az)]}-$$

$$-\frac{[A(x)-Aw](pz-Bz)[1+W(x)]}{(Aw-Az)[1+(Mw-Mz)/(Aw-Az)]},$$

$$(3.19)\quad V_x^1 = \frac{1}{840}\frac{\rho C^2(Rh')}{\mu^3R^3h^7}(35h^2y^4-7y^6+5h^6-33h^4y^2)-$$

$$-\frac{1}{240}\frac{\rho RR'}{\mu h^2}[(\omega_1-\omega_2)^2(5y^4-6h^2y^2+h^4)+20(\omega_1^2-\omega_2^2)(y^3h-h^3y)],$$

$$(3.20)\quad V_y^1 = \frac{1}{840}\frac{\rho C^2}{\mu^3R}[(\frac{(Rh)'}{R^2h^7})'(y^7-7h^2y^5-5h^6y+11h^4y^3)+$$

$$+\frac{(Rh)'h'}{R^2h^7}(44h^3y^3-14y^5-30h^5y)]+\frac{1}{240}\frac{\rho}{\mu R}\{\frac{(R^2R')'}{h^2}\times$$

$$\times[(\omega_1-\omega_2)^2(y^5-2h^2y^3+h^4y)+5(\omega_1^2-\omega_2^2)(hy^4-2h^3y^2+h^5)]+$$

$$+\frac{R^2R'}{h^2}h'[4(\omega_1-\omega_2)^2(h^3y-hy^3)+5(\omega_1^2-\omega_2^2)(y^4-6h^2y^2+5h^4)]\},$$

$$(3.21)\quad V_\theta^1 = \frac{1}{120}\frac{\rho CR'}{\mu^2Rh^4}[(\omega_1-\omega_2)(3y^5-10h^2y^3+7h^4y)+(\omega_1+$$

$$+\omega_2)(5hy^4-30h^3y^2+25h^5)],$$

$$(3.22)\quad p^1 = D(x)-\frac{[A(x)-Az]Dw-[A(x)-Aw]Dz}{Aw-Az};$$

tutaj

$$R'=\frac{dR}{dx},\quad h'=\frac{dh}{dx},\; C=\frac{pw-Bw-(pz-Bz)}{(Aw-Az)+(Mw-Mz)},$$

$$A(x) = \int\frac{dx}{R(x)h^3},\quad Aw=A(xw),\quad Az=A(xz),$$

$$B(x) = -\sigma E_y BoRw\int\frac{dx}{R},\quad Bw=B(xw),\quad Bz=B(xz),$$

$$Z(x) = \frac{M(x)-Mz}{A(x)-Az}, \ W(x) = \frac{M(x)-Mw}{A(x)-Aw},$$

$$M(x) = \frac{1}{3}\mathrm{Ha}^2 Rw^2 \int \frac{dx}{(Rh)^3}, \ Mw = M(xw), Mz = M(xz),$$

$$E_y = \frac{1}{[c(x) - \frac{1}{3}\mathrm{Ha}^2 Rw^2 \frac{cl(x)}{1+(Mw-Mz)/(Aw-Az)}} \frac{J}{2\pi\sigma} +$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{h^2}{\sigma\mu}\mathrm{Ha}Rw\frac{pw-pz}{Aw-Az}\frac{1}{1+(Mw-Mz)/(Aw-Az)}\frac{cl(x)}{},$$

$$c(x) = \int_{xw}^{xz} R dx, \quad cl(x) = \int_{xw}^{xz} \frac{dx}{R},$$

$$D(x) = \int \{ \frac{6}{35}\frac{\rho C^2 (Rh)'}{\mu^2 R^3 h^3} + \frac{\rho R R'}{20}[(\omega_1 - \omega_2)^2 + 5(\omega_1 + \omega_2)^2]\} dx,$$

$$Dw = D(xw), \ Dz = D(xz).$$

Pełne rozwiązanie przepływu cieczy przewodzącej elektrycznie w szczelinie w ogólności o zarysie krzywoliniowym stanowią sumy rozwiązań cząstkowych.

4. Ruch cieczy w szczelinie między wirującymi powierzchniami stożkowymi

Wstawiając w sposób następujący do zależności (3.15) - (3.22) funkcje określające geometrię obszaru przepływu (rys.2):

$$(4.1) \quad R = x\sin(\alpha), \ Rw = xw\sin(\alpha), \ Rz = xz\sin(\alpha), \ R' = \sin(\alpha),$$

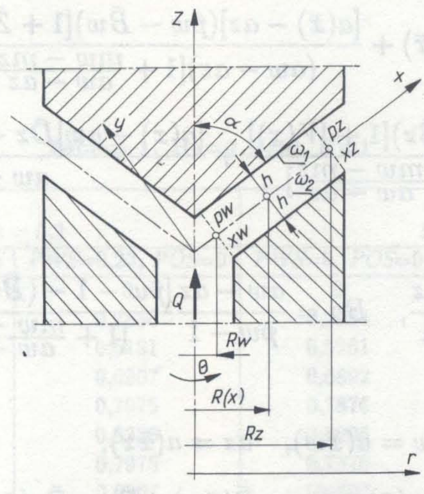
a następnie wprowadzając zmienne bezwymiarowe:

$$\bar{x} = \frac{x}{Rz}, \ \bar{y} = \frac{y}{h}, \ \bar{R} = \frac{R}{Rz}, \ \bar{R}' = 1,$$

$$\bar{V}_x = \frac{V_x}{V^0_{x_{\max}}}, \ \bar{V}_y = \frac{V_y}{V^0_{x_{\max}}}\frac{xz\sin(\alpha)}{h}, \ \bar{V}_\theta = \frac{V_\theta}{\omega_1 xz\sin(\alpha)}\frac{2}{x},$$

gdzie

$$V^0_{x_{\max}} = -\frac{1}{2}\frac{pzh^2}{\mu xz\sin(\alpha)}\frac{(\bar{p}w-1)}{(aw-az)}\frac{1}{x},$$



Rys. 2. Geometria szczeliny stożkowej

otrzymamy bezwymiarowe formuły opisujące pole prędkości i ciśnienia w szczelinie, w postaci:

przybliżenie zerowe

$$(4.2) \qquad \bar{V}_x^0 = \frac{\left[1 - \dfrac{\bar{B}w - \bar{B}z}{pw - 1}\right]}{\left[1 + \dfrac{mw - mz}{aw - az}\right]}(1 - \bar{y}^2),$$

$$(4.3) \qquad \bar{V}_y^0 = 0,$$

$$(4.4) \qquad \bar{V}_\theta^0 = [(1-K)\bar{y} + (1+K)],$$

przybliżenie liniowe (suma rozwiązań cząstkowych $\bar{V}^0$ i $\bar{V}^1$)

$$(4.5) \quad \bar{V}_x = \bar{V}_x^0 - \frac{1}{420} PWSBa \frac{1}{\bar{x}^2}(5 - 7\bar{y}^6 + 35\bar{y}^4 - 33\bar{y}^2) +$$

$$+ \frac{1}{120} POSAp\bar{x}^2[(1-K)^2(5\bar{y}^4 - 6\bar{y}^2 + 1) + 20(1-K^2)(\bar{y}^3 - \bar{y})],$$

$$(4.6) \quad \bar{V}_y = \frac{1}{240} PWSBa \frac{1}{\bar{x}^3}(\bar{y}^7 - 7\bar{y}^5 + 11\bar{y}^3 - 5\bar{y}) +$$

$$+ \frac{1}{60} POSAp\bar{x}[(1-K)^2(\bar{y}^5 - 2\bar{y}^3 + \bar{y}) + 5(1-K^2)(\bar{y}^4 - 2\bar{y}^2 + 1)],$$

$$(4.7) \quad \bar{V}_\theta = [(1-K)\bar{y} + (1+K)] + \frac{1}{60} PWS(aw - az)[\bar{p}w - 1 -$$

$$-(\bar{B}w - \bar{B}z)]\frac{1}{\bar{x}^2}[(1-K)(3\bar{y}^5 - 10\bar{y}^3 + 7\bar{y}) + (1+K)(5\bar{y}^4 - 30\bar{y}^2 + 25)],$$

$$(4.8)\ \bar{p} = \bar{B}(\bar{x}) + \bar{D}(\bar{x}) + \frac{[a(\bar{x}) - az](\bar{p}w - \bar{B}w)[1 + \bar{Z}(x)]}{(aw - az)[1 + \frac{mw - mz}{aw - az}]} -$$

$$- \frac{[a(\bar{x}) - aw](1 - \bar{B}z)[1 + \bar{W}(x)]}{(aw - az)[1 + \frac{mw - mz}{aw - az}]} + \frac{[a(x) - aw]\bar{D}z - [a(x) - az]\bar{D}w}{aw - az};$$

gdzie

$$Ap = \frac{aw - az}{pw - 1}, \quad Ba = \frac{aw - az}{\bar{p}w - 1} \frac{[\bar{p}w - 1 - (\bar{B}w - \bar{B}z)]^2}{[1 + \frac{mw - mz}{aw - az}]^2},$$

$$a(\bar{x}) = ln(\bar{x}), \; aw = a(\bar{x}w), \; az = a(\bar{x}z),$$

$$B(\bar{x}) = -E\mathrm{Ha}\bar{x}w\ln(\bar{x}), \; \bar{B}w = \bar{B}(\bar{x}w), \; \bar{B}z = \bar{B}z(\bar{x}z), \; \mathrm{Ha} = B_0 h\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}},$$

$$E = \frac{E_y x z \sin(\alpha)\sqrt{\sigma\mu}}{hpz},$$

$$m(\bar{x}) = -\frac{1}{6}\mathrm{Ha}^2\frac{\bar{x}w^2}{\bar{x}^2}, \; mw = m(\bar{x}w), \; mz = m(\bar{x}z),$$

$$\bar{Z}(\bar{x}) = 1 + \frac{m(\bar{x}) - mz}{a(\bar{x}) - az}, \; \bar{W}(\bar{x}) = 1 + \frac{m(\bar{x}) - mw}{a(\bar{x}) - aw},$$

$$\bar{D}(\bar{x}) = PWSfw\frac{1}{\bar{x}^2} + POSfo\bar{x}^2, \; \bar{D}w = \bar{D}(\bar{x}w), \bar{D}z = \bar{D}(\bar{x}z),$$

$$fw = -\frac{3}{35}\frac{[\bar{p}w - 1 - \bar{B}w + \bar{B}z]^2}{[1 + \frac{mw - mz}{aw - az}]^2}, \; fo = \frac{1}{40}[(1 - K)^2 + 5(1 + K)^2],$$

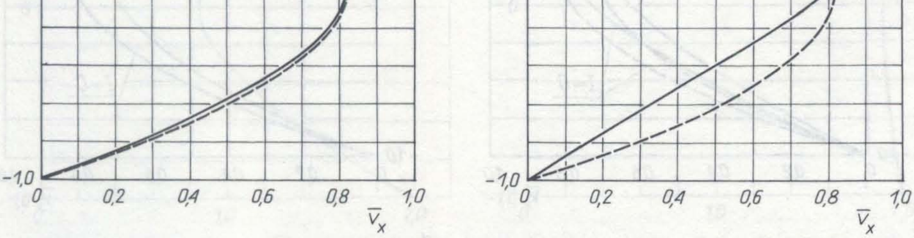
$$K = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

$$PWS = \frac{\rho p z h^4}{\mu^2 x z^2 \sin^2(\alpha)(aw - az)^2}, \; POS = \frac{\rho\omega_1^2 \bar{x} z^2 \sin^2(\alpha)}{pz}.$$

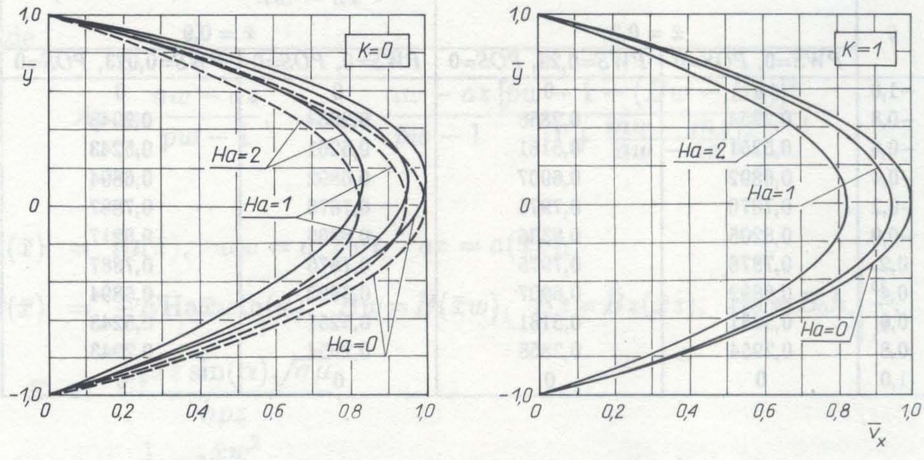
Przedstawione powyżej formuły zilustrowano wykresami (rys.3-11), natomiast wpływ wzdłużnych sił bezwładności na profil składowej prędkości wzdłużnej zobrazowano w tablicy 1.

Tablica 1. Ha=2, I=0, K=1

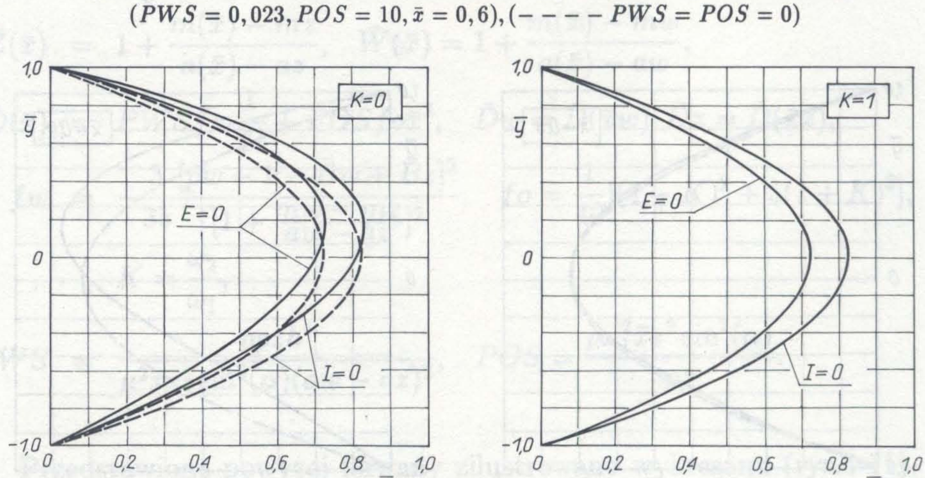
$\bar{y}$	$\bar{x}$ = 0,3		$\bar{x}$ = 0,9	
	PWS=0, *POS*=0	*PWS*=0,23, *POS*=0	*PWS*=0, *POS*=0	*PWS*=0,023, *POS*=0
−1,0	0	0	0	0
−0,8	0,2954	0,2858	0,2954	0,2943
−0,6	0,5251	0,5181	0,5261	0,5243
−0,4	0,6892	0,6907	0,6892	0,6894
−0,2	0,7876	0,7975	0,7876	0,7887
−0,0	0,8205	0,8336	0,8205	0,8217
0,2	0,7876	0,7975	0,7876	0,7887
0,4	0,6892	0,6907	0,6892	0,6894
0,6	0,5251	0,5181	0,5251	0,5243
0,8	0,2954	0,2858	0,2954	0,2943
1,0	0	0	0	0



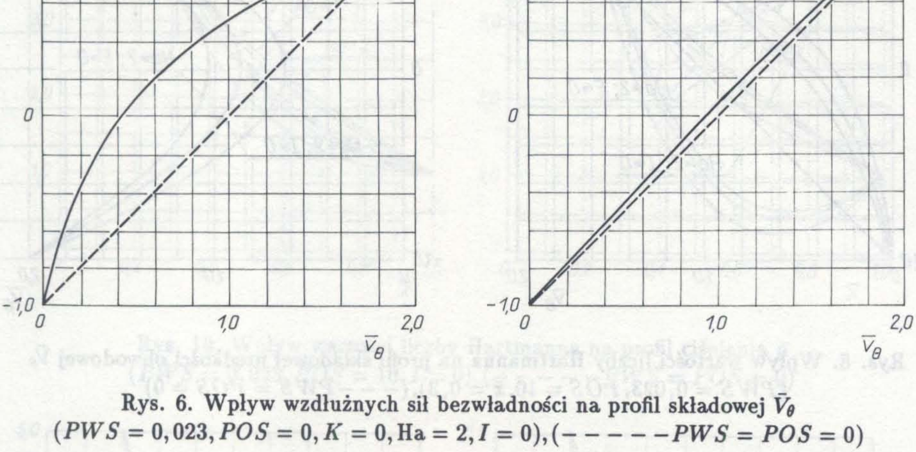
Rys. 3. Wpływ odśrodkowych sił bezwładności na profil składowej prędkości $\bar{V}_x$,
($PWS = 0, POS = 10, K = 0, \mathrm{Ha} = 2, I = 0$), (– – – – $PWS = POS = 0$)



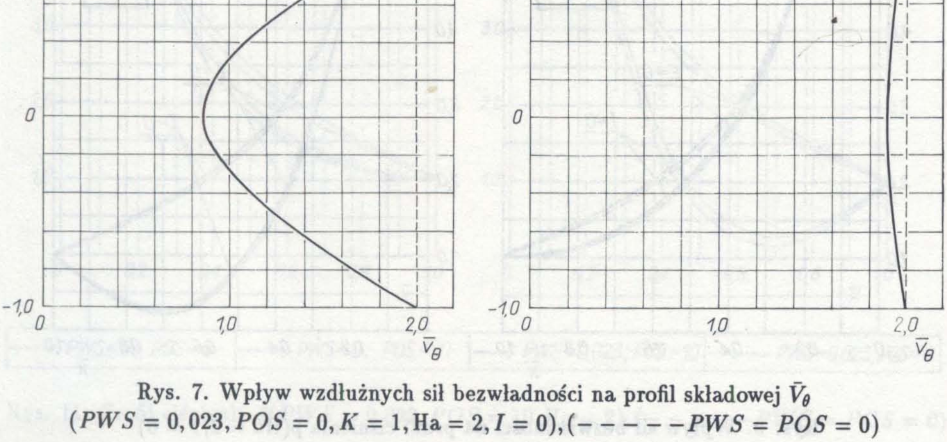
Rys. 4. Wpływ wartości liczby Hartmanna na profil prędkości wzdłużnej $\bar{V}_x$, $(PWS = 0,023, POS = 10, \bar{x} = 0,6), (- - - - PWS = POS = 0)$



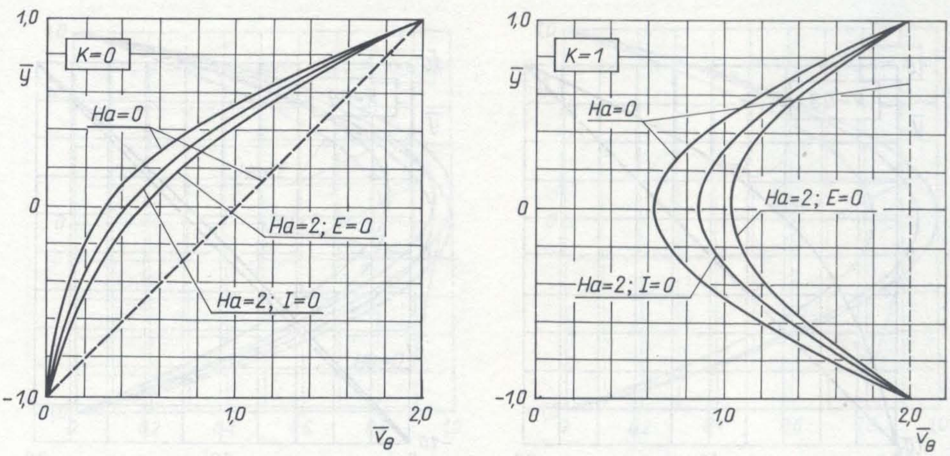
Rys. 5. Profil składowej prędkości wzdłużnej $\bar{V}_x$ ($I = 0$ – otwarty obwód elektryczny, $E = 0$ – stan zwarcia w obwodzie), $(PWS = 0{,}023, POS = 10, \mathrm{Ha} = 2, \bar{x} = 0{,}6), (- - - - PWS = POS = 0)$



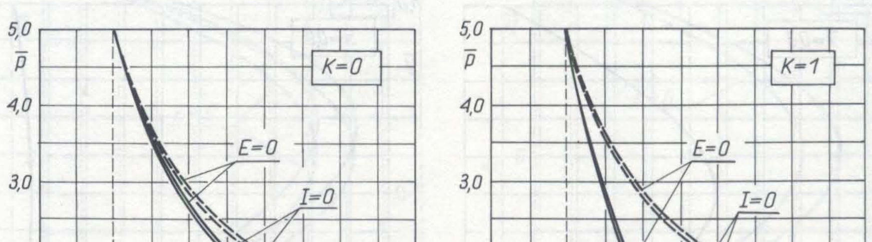
Rys. 6. Wpływ wzdłużnych sił bezwładności na profil składowej $\bar{V}_\theta$
$(PWS = 0,023, POS = 0, K = 0, \mathrm{Ha} = 2, I = 0), (- - - - - PWS = POS = 0)$



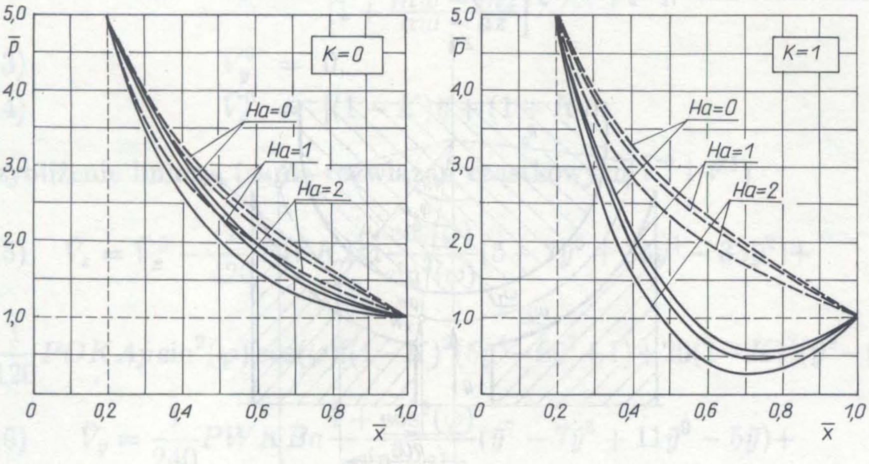
Rys. 7. Wpływ wzdłużnych sił bezwładności na profil składowej $\bar{V}_\theta$
$(PWS = 0,023, POS = 0, K = 1, \mathrm{Ha} = 2, I = 0), (- - - - - PWS = POS = 0)$



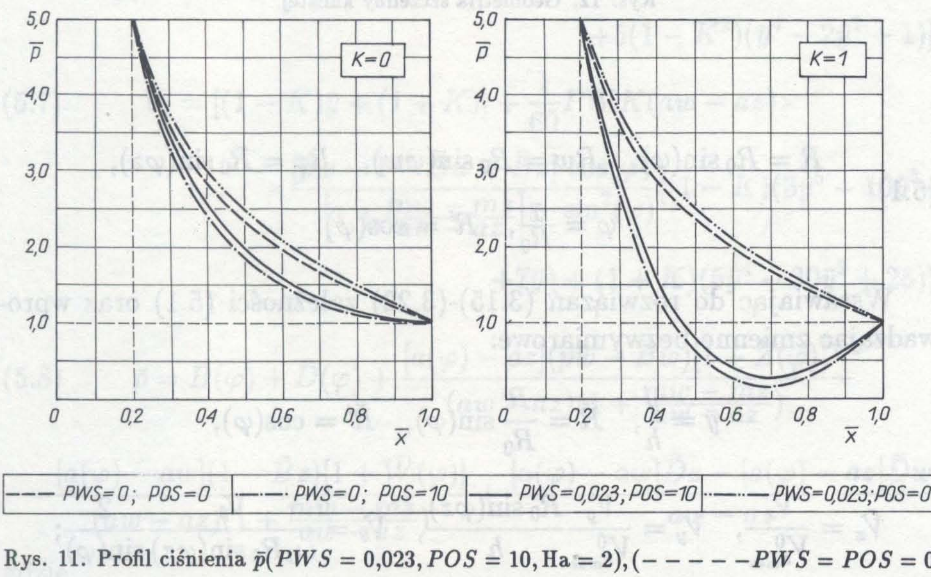
Rys. 8. Wpływ wartości liczby Hartmanna na profil składowej prędkości obwodowej $\bar{V}_\theta$ $(PWS = 0,023, POS = 10, \bar{x} = 0,3), (- - - PWS = POS = 0)$



Rys. 9. Wpływ sił bezwładności na profil ciśnienia $\bar{p}(\mathrm{Ha} = 2, I = 0)$



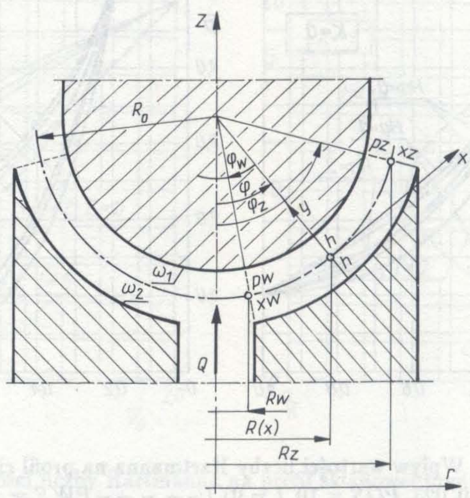
Rys. 10. Wpływ wartości liczby Hartmanna na profil ciśnienia $\bar{p}$ $(PWS = 0,023, POS = 10, I = 0), (- - - - - PWS = POS = 0)$



Rys. 11. Profil ciśnienia $\bar{p}(PWS = 0{,}023, POS = 10, \mathrm{Ha} = 2), (- - - - - PWS = POS = 0)$

5. Ruch cieczy w szczelinie między wirującymi powierzchniami kulistymi

Parametry charakteryzujące geometrię obszaru przepływu można przedstawić następująco (rys.12):



Rys. 12. Geometria szczeliny kulistej

$$
R = R_0 \sin(\varphi), \quad Rw = R_0 \sin(\varphi w), \quad Rz = R_0 \sin(\varphi z),
$$

$$
\varphi = \frac{\bar{x}}{R_0}, \quad R' = \cos(\varphi). \tag{5.1}
$$

Wstawiając do rozwiązań (3.15)-(3.22) zależności (5.1) oraz wprowadzając zmienne bezwymiarowe:

$$
\bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_0} \sin(\varphi), \quad \bar{R}' = \cos(\varphi),
$$

$$
\bar{V}_x = \frac{V_x}{V^0_{x_{\max}}}, \quad \bar{V}_y = \frac{V_y}{V^0_{x_{\max}}} \frac{R_0 \sin(\varphi z)}{h}, \quad \bar{V}_\theta = \frac{V_\theta}{\omega_1 R_0 \sin(\varphi z)} \frac{2}{\sin(\varphi)};
$$

gdzie

$$
V^0_{x_{\max}} = -\frac{1}{2} \frac{pzh^2}{\mu zx \sin(\varphi z)} \frac{(\bar{p}w - 1)}{(aw - az)} \frac{1}{\sin(\varphi)},
$$

otrzymamy wzory określające pole fizyczne przepływu cieczy w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi kulistymi:

$$\bar{V}_x^0 = \frac{\left[1 - \dfrac{\bar{B}w - \bar{B}z}{pw - 1}\right]}{\left[1 + \dfrac{mw - mz}{aw - az}\right]}(1 - y^2), \tag{5.2}$$

$$\bar{V}_y^0 = 0, \tag{5.3}$$

$$\bar{V}_\theta^0 = [(1 - K)\bar{y} + (1 + K)], \tag{5.4}$$

przybliżenie liniowe (suma rozwiązań cząstkowych $\bar{V}^0$ i $\bar{V}^1$)

$$\bar{V}_x = \bar{V}_x^0 - \frac{1}{420} PWKBa \frac{\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}(5 - 7\bar{y}^6 + 35\bar{y}^4 - 33\bar{y}^2) + \tag{5.5}$$

$$+ \frac{1}{120} POKAp \sin^2(\varphi)\cos(\varphi)[(1-K)^2(5\bar{y}^4 - 6\bar{y}^2 + 1) + 20(1-K)^2(\bar{y}^9 - \bar{y})],$$

$$\bar{V}_y = \frac{1}{240} PWKBa \frac{1 + \cos^2(\varphi)}{\sin^3(\varphi)}(\bar{y}^7 - 7\bar{y}^5 + 11\bar{y}^9 - 5\bar{y}) + \tag{5.6}$$

$$+ \frac{1}{60} POKAp(2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi) - \sin^3(\varphi))[(1 - K)^2(\bar{y}^5 - 2\bar{y}^3 + \bar{y}) +$$

$$+ 5(1 - K^2)(\bar{y}^4 - 2\bar{y}^2 + 1)],$$

$$\bar{V}_\theta = [(1 - K)\bar{y} + (1 + K)] + \frac{1}{60} PWK(aw - az) \times \tag{5.7}$$

$$\times \frac{[\bar{p}w - 1 - \bar{B}w + \bar{B}z]}{\left[1 + \dfrac{mw - mz}{aw - az}\right]} \frac{\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}[(1 - K)(3\bar{y}^5 - 10\bar{y}^3 +$$

$$+ 7\bar{y}) + (1 + K)(5\bar{y}^4 - 30\bar{y}^2 + 25)],$$

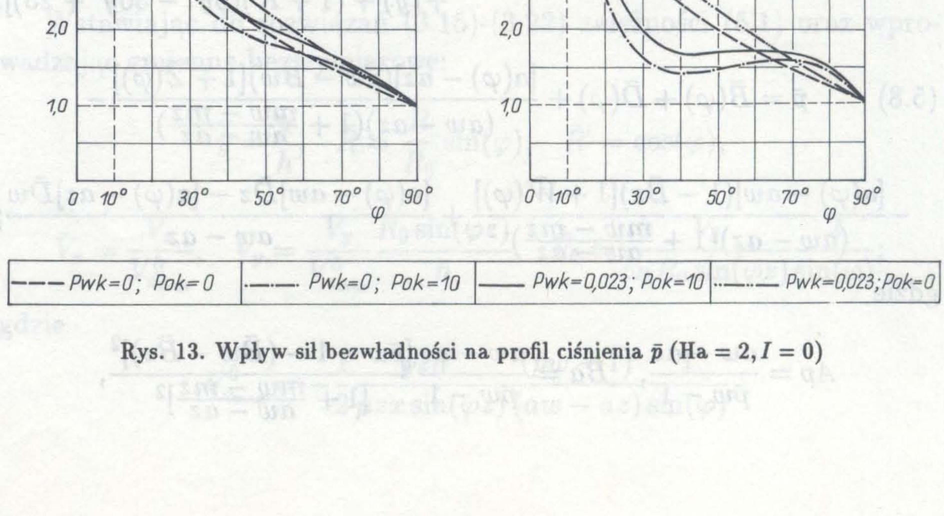
$$\bar{p} = \bar{B}(\varphi) + \bar{D}(\varphi) + \frac{[a(\varphi) - az](\bar{p}w - \bar{B}w)[1 + \bar{Z}(\varphi)]}{(aw - az)(1 + \dfrac{mw - mz}{aw - az})} - \tag{5.8}$$

$$- \frac{[a(\varphi) - aw](1 - \bar{B}z)[1 + \bar{W}(\varphi)]}{(aw - az)(1 + \dfrac{mw - mz}{aw - az})} + \frac{[a(\varphi) - aw]\bar{D}z - [a(\varphi) - az]\bar{D}w}{aw - az};$$

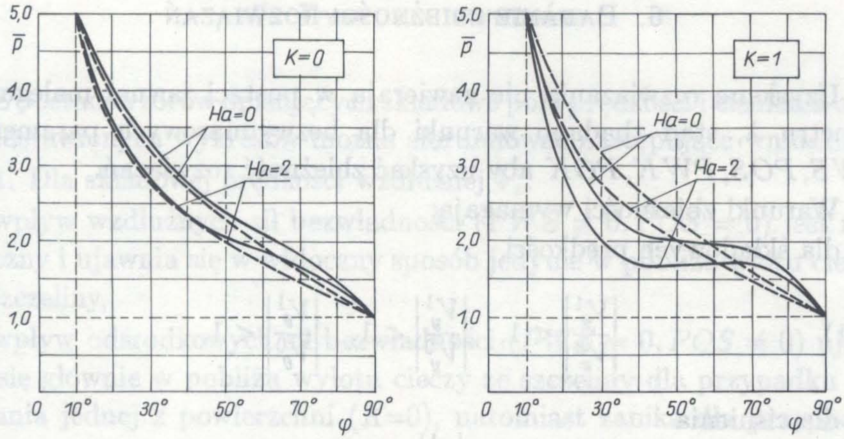
gdzie

$$Ap = \frac{aw - az}{\bar{p}w - 1}, \quad Ba = \frac{aw - az}{\bar{p}w - 1} \frac{[\bar{p}w - 1 - (\bar{B}w - \bar{B}z)]^2}{[1 + \dfrac{mw - mz}{aw - az}]^2},$$

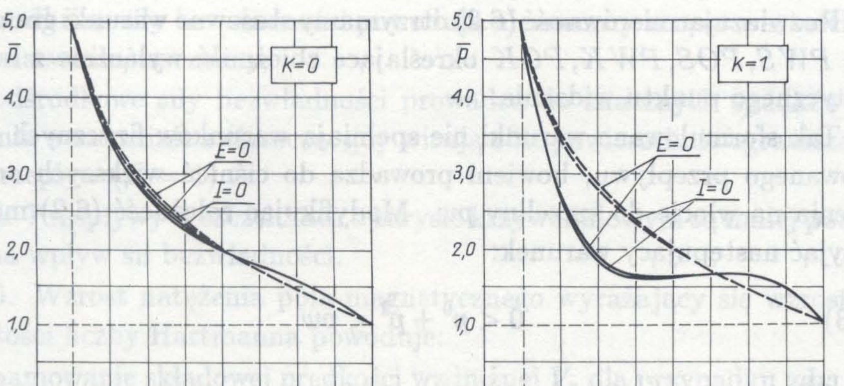
$$
\begin{aligned}
a(\varphi) &= \ln|\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}|, \quad aw = a(\varphi), \quad az = a(\varphi), \\
\bar{B}(\varphi) &= -E\mathrm{Ha}\sin(\varphi w)\ln|\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}|, \quad \bar{B}w = \bar{B}(\varphi w), \quad \bar{B}z = \bar{B}z(\varphi z), \\
& \mathrm{Ha} = B_0 h\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \\
E &= \frac{E_y \sin(\varphi z)\sqrt{\sigma\mu}}{hpz}, \\
m(\varphi) &= -\frac{1}{6}\mathrm{Ha}^2\sin^2(\varphi w)\int\frac{d\varphi}{\sin^3(\varphi)}, \quad mw = m(\varphi w), \quad mz = m(\varphi z), \\
\bar{Z}(\varphi) &= 1 + \frac{m(\varphi) - mz}{a(\varphi) - az}, \quad \bar{W}(\varphi) = 1 + \frac{m(\varphi) - mw}{a(\varphi) - aw}, \\
\bar{D}(\varphi) &= PWSfw\frac{1}{\sin^2(\varphi)} + POSfo\sin^2(\varphi), \quad \bar{D}w = \bar{D}(\varphi), \quad \bar{D}z = \bar{D}(\varphi), \\
fw &= -\frac{3}{35}\frac{[\bar{p}w - 1 - \bar{B}w + \bar{B}z]^2}{[1 + \frac{mw - mz}{aw - az}]^2}, \quad fo = \frac{1}{40}[(1-K)^2 + 5(1+K)^2], \\
K &= \frac{\omega_2}{\omega_1}, \\
PWK &= \frac{\rho pz^2h^4}{\mu^2 R_0^2\sin^2(\varphi z)(aw - az)^2}, \quad POK = \frac{\rho\omega_1 R_0^2\sin^2(\varphi z)}{pz}.
\end{aligned}
$$



Rys. 13. Wpływ sił bezwładności na profil ciśnienia $\bar{p}$ (Ha = 2, I = 0)



Rys. 14. Wpływ wartości liczby Hartmanna na profil ciśnienia $\bar{p}$
$(PWK = 0,023, POK = 10, I = 0), (- - - - - PWK = POK = 0)$



Rys. 15. Profil ciśnienia $\bar{p}$
$(PWK = 0,023, POK = 10, \mathrm{Ha} = 2), (- - - - - PWK = POK = 0)$

Z uwagi na to, że wykresy rozkładów prędkości dla przepływu cieczy w szczelinie między powierzchniami kulistymi jakościowo nie różnią się od rozkładów prędkości dla przepływu cieczy w szczelinie stożkowej, wykresami zilustrowano jedynie formuły określające profile ciśnień (rys. 13-15).

6. Badanie zbieżności rozwiązań

Uzyskane rozwiązania nie zawierają w postaci jawnej małego parametru λ, stąd zbadano warunki dla bezwymiarowych parametrów PWS, POS, PWK, POK aby uzyskać zbieżność rozwiązań.

Warunki zbieżności wymagają:

dla składowych prędkości

$$\left|\frac{V_x^1}{V_x^0}\right| < 1, \quad \left|\frac{V_y^1}{V_y^0}\right| < 1, \quad \left|\frac{V_\theta^1}{V_\theta^0}\right| < 1, \tag{6.1}$$

dla ciśnienia

$$\left|\frac{p^1}{p^0}\right| < 1. \tag{6.2}$$

Ponieważ zbieżność rozwiązań dla składowych prędkości wynika ze zbieżności rozwiązań dla ciśnienia, poniżej przedstawiono analizę zbieżności w odniesieniu do funkcji ciśnienia.

Rozwiązując nierówność (6.2) otrzymamy stosowne warunki graniczne dla PWS, POS, PWK, POK określające zbieżność wyłącznie z matematycznego punktu widzenia.

Tak sformułowane warunki nie spełniają warunków fizycznych analizowanego przepływu, bowiem prowadzą do ciśnień większych od ciśnienia na wlocie do szczeliny pw. Modyfikując zależność (6.2) można przyjąć następujący warunek:

$$0 < p^0 + p^1 < pw \tag{6.3}$$

lub

$$\begin{aligned} p^0 + p^1_{\mathrm{wzd}} &< pw, \\ \left|p^0 + p^1_{\mathrm{ods}}\right| &> 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

p_{wzd}, p_{ods} oznaczają ciśnienia związane z oddziaływaniem wzdłużnych bądź odśrodkowych sił bezwładności.

Nierówności (6.4) pozwalają rozważyć warunki zbieżności odrębnie dla parametrów PWS, PWK i POS, POK. Wykorzystując zależności (6.4) wyznaczono graniczne wartości PWS, POS, PWK, POK ze względu na zbieżność uzyskanych rozwiązań.

7. Dyskusja wyników

Z postaci wzorów opisujących składowe pola prędkości i ciśnienia oraz przedstawionych wykresów można sformułować następujące wnioski:

1. Dla składowej prędkości wzdłużnej $\bar{V}_x$:

wpływ wzdłużnych sił bezwładności ($PWS \neq 0, POS = 0$) jest nieznaczny i ujawnia się w widoczny sposób jedynie w pobliżu wlotu cieczy do szczeliny,

wpływ odśrodkowych sił bezwładności ($PWS = 0, POS \neq 0$) ujawnia się głównie w pobliżu wylotu cieczy ze szczeliny dla przypadku wirowania jednej z powierzchni (K=0), natomiast zanika dla przypadku wirowania obu powierzchni ($K = 1$).

2. Dla składowej prędkości obwodowej $\bar{V}_\theta$:

wpływ wzdłużnych sił bezwładności jest istotny tylko w pobliżu wlotu cieczy do szczeliny.

3. Dla ciśnienia:

wzdłużne siły bezwładności powodują nieznaczny wzrost wartości ciśnienia wzdłuż szczeliny,

odśrodkowe siły bezwładności prowadzą do znacznych spadków ciśnienia w szczelinie zwłaszcza, gdy wirują obie powierzchnie ograniczające przepływ ($K = 1$).

4. Przepływy w szczelinach o zarysie krzywoliniowym są mniej podatne na wpływ sił bezwładności.

5. Wzrost natężenia pola magnetycznego wyrażający się wzrostem wartości liczby Hartmanna powoduje:

hamowanie składowej prędkości wzdłużnej $\bar{V}_x$ dla przypadku gdy $I = 0$ i $E = 0$,

przyśpieszanie składowej prędkości obwodowej $\bar{V}_\theta$ zarówno dla przypadku gdy $I = 0$, jak również gdy $E = 0$,

spadek ciśnienia wzdłuż szczeliny.

6. Stan zwarcia w obwodzie, w porównaniu z obwodem elektrycznym otwartym powoduje:

hamowanie składowej prędkości wzdłużnej $\bar{V}_x$,

przyspieszanie składowej prędkości obwodowej $\bar{V}_\theta$,

nieznaczny wzrost wartości ciśnienia wzdłuż szczeliny w porównaniu z obwodem otwartym ($I = 0$).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. C.W.SUTTON, A.SHERMAN, *Engineering magnetohydrodynamics*, Mc.Graw-Hill, New York 1969.

2. А.Б.Батажин, Г.А.Любимов, Ц.А.Регирер, Магнитогидродинамические течения в каналах, Наука, 1970.

3. S.J.PAJ, *A review of elektro-magneto-fluid dynamics problems*, Mec. Apliquee, 19, 1, 1974.

4. W.F.HUGHES, F.J.YOUNG, *Elektromagnetodynamics of fluids*, J.Wiley, London 1966.

5. E.WALICKI, *Ruch płynów lepkich w szczelinach wzdłużnych łożysk ślizgowych*, Zesz. Nauk. Akad. Techn. - Roln., 50, 18, 1977.

Резюме

ЛАМИНАРНОЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛИ МЕЖДУ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В работе рассматривается стационарное течение вязкой жидкости в щели между криволинейными вращательными поверхностями. Для решения задачи использованы уравнения пограничного слоя в криволинейной системе координат x, θ, y. Уравнения пограничного слоя решены методом малого параметра. Полученные формулы определяют такие параметры, как составляющие скорости $\bar{V}_x, \bar{V}_\theta, \bar{V}_y$ и давление $\bar{p}$.

SUMMARY

LAMINAR MAGNETOHYDRODYNAMICS FLOW OF VISCOUS FLUID THROUGH A SLOT BETWEEN CURVILINEAR SURFACES OF REVOLUTION

Steady flow of viscous fluid through a slot between the curvilinear surfaces of revolution is considered. The boundary layer equations are expressed in terms of the intrinsic curvilinear orthogonal coordinate system x, θ, y. The method of perturbation is used to solve the boundary layer equations. As a result, the formulae defining such parameters of the flow as the velocity components $\bar{V}_x, \bar{V}_\theta, \bar{V}_y$ and pressure $\bar{p}$ are obtained.

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA, BYDGOSZCZ

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 stycznia 1990 r.