ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 35, 1, 55—70, 1987
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

O ODDZIAŁYWANIACH WEWNĘTRZNYCH W OŚRODKU NASYCONYM CIECZĄ

JÓZEF KUBIK i MIECZYSŁAW CIESZKO (POZNAŃ)

W pracy przedyskutowano przyczyny oraz charakter oddziaływań wewnętrznych w izotropowym, odkształcalnym ośrodku porowatym nasyconym cieczą. Rozważania przeprowadzono przy założeniu, że struktura porów ośrodka scharakteryzowana jest dwoma parametrami: porowatością objętościową i efektywną porowatością powierzchniową, co prowadzi do kinematycznego podziału ośrodka różnego od podziału fizycznego. Określono jawną postać funkcji intensywności wymiany masy między składnikami kinematycznymi i stwierdzono, że wymiana ta zależy od szybkości zmian stosunku gęstości składników fizycznych oraz zmian parametrów struktury. Wykazano, że wzajemne oddziaływanie pomiędzy porowatym szkieletem i cieczą obejmuje nie tylko siły dyfuzyjne i siły związane z niejednorodnością struktury, ale również efekt sprzężenia dynamicznego i siły wywołane wymianą masy w ośrodku.

1. Wstęp

Przy opisie deformacji ośrodków porowatych wypełnionych cieczą istotnym zagadnieniem jest pełna charakterystyka zjawiska ruchu cieczy przez porowaty szkielet oraz przekazywanie pędu pomiędzy składnikami. W obu przypadkach decydującą rolę odgrywa wewnętrzna struktura porowatego szkieletu.

Celem niniejszej pracy jest przedyskutowanie wpływu geometrycznej struktury porów na transport masy (zwłaszcza fazy ciekłej) w takim ośrodku oraz wymianę pędu pomiędzy poszczególnymi składnikami.

W ramach dotychczas sformułowanej teorii ośrodków porowatych z parametrem objętościowym opartej na mechanice mieszanin(1) [1–6] przyjmuje się, że porowaty szkielet i ciecz wypełniająca pory charakteryzuje się odpowiednio jednym makroskopowym polem prędkości. Całkowitą wymianę pędu pomiędzy składnikami reprezentuje wielkość konstytutywna, w której daje się wyróżnić siłę dyfuzji wywołaną ruchem względnym składników oraz siłę wynikającą z niejednorodności składników.

(1) W języku ang. — the volume fraction theory. W dalszej części tekstu będziemy używali terminu — teoria objętościowa.

Przy tak przyjętej kinematyce ośrodka równania ciągłości wyrażają zasadę zachowania masy każdego ze składników przy braku reakcji chemicznych, natomiast istnienie sił wzajemnego oddziaływania w równaniach ruchu poszczególnych składników uzasadnia się oporami przepływu w ruchu względnym lepkiej cieczy przez pory oraz niejednorodnością porowatości objętościowej.

Wspomniana teoria objętościowa nie uwzględnia ograniczeń nakładanych przez strukturę porów na ruch fazy ciekłej, których wynikiem jest kinematyczny rozdział cieczy na części poruszające się z niezależnymi prędkościami [7, 8 i 9]. Tym samym nie uwzględnia przekazywania masy pomiędzy takimi częściami w procesie deformacji ośrodka. W odniesieniu do wymiany pędu teoria ta nie obejmuje oddziaływań dynamicznych, które są cechą charakterystyczną większości ośrodków porowatych. Nie uwzględnia także oddziaływań wynikających z wymiany masy w ośrodku, będącej następstwem zmiany struktury porów w procesie deformacji.

Efekty oddziaływania dynamicznego pomiędzy porowatym szkieletem i przepływającą przez pory cieczą, w ramach liniowej, izotropowej teorii konsolidacji przewidział Biot [10] wprowadzając pojęcie masy pozornej. Oddziaływanie to jest następstwem przyjętej przez Biota energii kinetycznej dla całego ośrodka w postaci pełnej formy kwadratowej. Brak jednak w tym przypadku bezpośredniego związku pomiędzy tak przyjętą formą energii i geometryczną strukturą porów, która jest źródłem sprzężenia dynamicznego (por. [11]). Zagadnienie zmian masy sprzęgającej oraz oddziaływania wynikające z takich zmian nie były rozważane w ramach teorii Biota.

Możliwość bardziej wyczerpującej analizy kinematycznej ruchu składników ośrodka oraz oddziaływań siłowych pomiędzy cieczą i porowatym szkieletem daje rozwijana w ostatnich latach mechanika ośrodków porowatych, uwzględniająca dwuparametrową charakterystykę geometrycznej struktury porów. Impulsem do takich badań była praca Derskiego [7], w której autor podał liniowe równania ruchu dla ośrodka izotropowego, postulując podział cieczy na swobodną charakteryzującą się własnym polem prędkości oraz uwięzioną w porach szkieletu i poruszającą się z jego prędkością. Równania te, równoważne równaniom Biota [10], były następnie potwierdzone w pracach [12 i 13], jednakże zagadnienie wymiany pędu i jego związek ze strukturą nie były istotą tych rozważań.

Należy nadmienić, że opierając się na wynikach Biota oraz na koncepcji Derskiego zagadnienie sprzężenia przez masę w ośrodku porowatym dyskutował Kowalski [8] w ramach teorii mieszanin, wykorzystując współrzędne normalne. Uwzględniał przy tym możliwość wymiany masy pomiędzy cieczą swobodną i uwięzioną nie analizując przyczyn takiej wymiany. Otrzymane w [8] siły oddziaływania nie czynią zadość wymaganiu obiektywności. Jest to skutkiem uwzględnienia w równaniach ruchu tylko części sił oddziaływania, będących następstwem wymiany masy. Stan taki odpowiada bardzo szczególnej sytuacji fizycznej, gdy wymieniana masa pozostaje w spoczynku względem układu odniesienia.

W pracach [9, 11 oraz 14–16] zaproponowano opis deformacji ośrodka porowatego nasyconego cieczą charakteryzując geometryczną strukturę porów szkieletu dwoma parametrami makroskopowymi: porowatością objętościową f_v i tensorem strukturalnej przepuszczalności $\mathbf{P}$ zdefiniowanym w [17 i 18]. Posługując się procedurami uśredniania objętościowego i powierzchniowego wykazano [18], że tensor $\mathbf{P}$ wiąże średnią objętościową prędkość cieczy z jej średnią powierzchniową prędkością w ruchu względem porowatego szkieletu i przy odpowiednich założeniach wielkość ta nie zależy od warunków brzegowych przepływu; reprezentuje wyłącznie geometryczne właściwości porów. W przypadku izotropowej struktury porów tensor $\mathbf{P}$ jest tensorem izotropowym, którego wartość główna reprezentuje efektywną porowatość powierzchniową λ. Takie strukturalne podejście umożliwiło w pierwszym rzędzie jasną fizyczną interpretację makroskopowych wielkości kinematycznych (gęstości i prędkości) i dynamicznych (sił powierzchniowych i masowych) używanych w teorii ośrodków porowatych. Następnie pozwoliło uzasadnić założenie Derskiego o kinematycznym podziale cieczy. Dalszym istotnym efektem uwzględnienia dwuparametrowej charakterystyki struktury porów jest możliwość określenia i interpretacji występujących oddziaływań pomiędzy fazą ciekłą i porowatym szkieletem.

Próbę określenia oddziaływań podejmowano w pracach [9 i 11]. Siły oddziaływania otrzymane w [9] nie są jednak obiektywne z tych samych przyczyn jak w pracy [8]. Natomiast sposób otrzymania równań ruchu [11] na podstawie bilansu energii całkowitej ośrodka nie daje możliwości wyspecyfikowania sił oddziaływania wynikających z wymiany masy w ośrodku.

W niniejszej pracy przeanalizujemy transport masy w izotropowym ośrodku porowatym, którego wewnętrzna struktura scharakteryzowana jest dwoma parametrami: f_v i $\mathbf{P} = \lambda\mathbf{1}$. Ponadto przedstawimy bogatszy zbiór wzajemnych oddziaływań porowatego szkieletu na ciecz — w porównaniu z równaniami teorii objętościowej oraz wymienionymi wyżej pracami.

2. Podstawowe równania objętościowej teorii ośrodka porowatego

Przy formułowaniu równań mechaniki odkształcalnych ośrodków porowatych nasyconych cieczą za punkt wyjścia przyjmuje się teorię mieszanin sformułowaną przez Truesdella i Toupina [19] lub równoważną sformułowaną przez Greena i Naghdiego [20 i 21]. Ośrodek traktowany jest jako superpozycja dwóch kontinuów utożsamianych ze składnikami ośrodka rozróżnialnymi z punktu widzenia ich stanu skupienia. W niniejszej pracy będziemy je nazywać składnikami fizycznymi.

Cechą charakterystyczną odróżniającą taki ośrodek od klasycznej mieszaniny jest to, że porowaty szkielet i ciecz są składnikami nierozpuszczalnymi (*immiscible mixture*) i w czasie deformacji zachowują nie tylko niezależne własności fizyczne ale również odrębne objętości. Ten fakt uzasadnia uwzględnienie w teorii dodatkowej wielkości polowej — porowatości objętościowej — określającej objętościowe udziały poszczególnych faz w jednostce objętości ośrodka. Wówczas podstawowe równania bilansu masy i pędu dwuskładnikowej, chemicznie obojętnej mieszaniny mają postać [1, 2, 4 i 11]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}[(1-f_v)\varrho^s]+\operatorname{div}[(1-f_v)\varrho^s\mathbf{v}^s]=0,\\ &\frac{\partial}{\partial t}(f_v\varrho^f)+\operatorname{div}(f_v\varrho^f\mathbf{v}^f)=0; \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{T}^s+(1-f_v)\varrho^s\mathbf{b}+\boldsymbol{\pi}^s=(1-f_v)\varrho^s\frac{D\mathbf{v}^s}{D^s t},\\ &\operatorname{div}\mathbf{T}^f+f_v\varrho^f\mathbf{b}+\boldsymbol{\pi}^f=f_v\varrho^f\frac{D\mathbf{v}^f}{D^f t}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie

$$\frac{D}{D^\alpha t}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}^\alpha\cdot\operatorname{grad}(\cdot),\qquad (\alpha=s,f).$$

W równaniach (2.1) i (2.2) wielkości kinematyczne poszczególnych składników; gęstości ϱ^α oraz prędkości $\mathbf{v}^\alpha$ mają charakter średnich objętościowych wielkości [2 i 11] (uśrednionych w obrębie reprezentatywnego obszaru). Siły $\boldsymbol{\pi}^f$ i $\boldsymbol{\pi}^s(\boldsymbol{\pi}^f=-\boldsymbol{\pi}^s)$ są siłami wzajemnego oddziaływania składników, natomiast $\mathbf{b}$ jest siłą masową odniesioną do jednostki masy. Fazowy tensor naprężenia $\mathbf{T}^\alpha$ spełnia związek Cauchyego

$$\mathbf{t}^\alpha=\mathbf{T}^\alpha\cdot\mathbf{n}, \tag{2.3}$$

przy czym wektor naprężenia $\mathbf{t}^\alpha$ jest rozumiany jako wektor dla którego iloczyn $\mathbf{t}^\alpha\cdot\mathbf{v}^\alpha$ reprezentuje moc sił powierzchniowych przekazywaną przez jednostkę powierzchni ośrodka.

Przy takim opisie ośrodka porowatego równania (2.1) wyrażają zasadę zachowania masy każdego ze składników fizycznych i składniki takie są układami o stałej masie. Wymianę pędu w jednostce czasu pomiędzy składnikami fizycznymi reprezentuje wielkość konstytutywna $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}^f=-\boldsymbol{\pi}^s$, która przy pominięciu efektów wyższego rzędu najczęściej przedstawiona jest w postaci [1 i 22]

$$\boldsymbol{\pi}=\alpha\operatorname{grad}(\varrho^f-\varrho^s)+\beta(\mathbf{v}^f-\mathbf{v}^s), \tag{2.4}$$

gdzie α i β są stałymi współczynnikami.

Alternatywna postać siły wzajemnego oddziaływania π jest [4 i 21]

$$\pi = p \operatorname{grad}(f_v) + \beta(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s), \tag{2.5}$$

gdzie p przedstawia część kulistą tensora naprężenia cieczy.

Wzory (2.4) i (2.5) wskazują, że wzajemne oddziaływanie pomiędzy składnikami fizycznymi obejmuje siłę dyfuzji związaną z oporami przepływu lepkiej cieczy przez pory i zależną od prędkości względnej oraz siłę wynikającą z niejednorodności porowatości objętościowej lub gęstości składników. Jest więc widoczne, że w ramach objętościowej teorii ośrodków porowatych wektor π nie obejmuje niestety oddziaływań dynamicznych, które są cechą charakterystyczną większości materiałów porowatych nasyconych cieczą i są następstwem kinematycznego podziału cieczy.

Należy przy tym podkreślić, że z omawianych równań (2.1) i (2.2) nie można otrzymać równań liniowej teorii Biota, pomimo że w obu przypadkach stosowane wielkości kinematyczne i dynamiczne są identyczne.

Bardziej wnikliwą analizę oddziaływań pomiędzy składnikami ośrodka porowatego będzie można przeprowadzić w ramach teorii uwzględniającej dwuparametrową charakterystykę geometrycznej struktury porów, co będzie przedmiotem dyskusji w dalszej części pracy.

3. Kinematyczny podział ośrodka. Efekt wymiany masy

Zasadniczy wpływ na zjawiska mechaniczne w odkształcalnych ośrodkach porowatych, a zwłaszcza na ruch cieczy względem porowatego szkieletu, ma geometryczna struktura porów. W pracy [18] wykazano, że przy przepływie cieczy newtonowskiej przez porowaty szkielet, przy niewielkich liczbach Reynoldsa, strukturę należy charakteryzować dwoma parametrami; porowatością objętościową f_v oraz tensorem strukturalnej przepuszczalności $\mathbf{P}$ (w przypadku anizotropowej struktury) definiowanym wcześniej [9 i 17] na drodze czysto geometrycznej. Dla materiałów z izotropową strukturą porów tensor $\mathbf{P}$ jest tensorem izotropowym, $\mathbf{P} = \lambda\mathbf{1}$, gdzie λ reprezentuje efektywną porowatość powierzchniową.

Wówczas, w ogólnym przypadku, pęd fazy ciekłej w ruchu względem szkieletu spełnia następującą zależność

$$\bar{\varrho}^f \mathbf{u} = \bar{\varrho}^f \frac{1}{f_v} \mathbf{P} \overset{*}{\mathbf{u}}, \tag{3.1}$$

natomiast dla ośrodka z izotropową strukturą spełniony jest związek w postaci

$$\bar{\varrho}^f \mathbf{u} = \bar{\varrho}^f \varkappa \overset{*}{\mathbf{u}}, \tag{3.2}$$

gdzie

$$\bar{\varrho}^f = f_v \varrho^f, \qquad \varkappa = \frac{\lambda}{f_v},$$

przy czym względna prędkość cieczy $\mathbf{u}$ określona jest przez średnie objętościowe prędkości cieczy i szkieletu $\mathbf{u} = \mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s$, natomiast $\overset{*}{\mathbf{u}}$ oznacza względną prędkość cieczy odniesioną do powierzchni porowatego szkieletu.

Wykorzystując (3.2) można wykazać, że całkowity pęd cieczy złożony jest z dwóch pędów składowych:

$$\bar{\varrho}^f \mathbf{v}^f = (1-\varkappa)\bar{\varrho}^f \overset{1}{\mathbf{v}} + \varkappa \bar{\varrho}^f \overset{2}{\mathbf{v}}, \tag{3.3}$$

gdzie

$$\overset{1}{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}^s, \qquad \overset{2}{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^s + \overset{*}{\mathbf{u}}.$$

Pierwszy wyraz prawej strony (3.3) przedstawia pęd części cieczy „stowarzyszonej" ze szkieletem i poruszającej się z prędkością $\overset{1}{\mathbf{v}}$. Drugi wyraz jest pędem pozostałej części cieczy — cieczy swobodnej — poruszającej się z prędkością $\overset{2}{\mathbf{v}}$. Poszczególne udziały masowe $(1-\varkappa)\bar{\varrho}^f$ i $(\varkappa\bar{\varrho}^f)$ występujące w (3.3) są zbieżne odpowiednio z fazową gęstością cieczy uwięzionej i swobodnej postulowanymi w teorii konsolidacji przez Derskiego [7]. Postulat ten znajduje więc uzasadnienie strukturalne i na podstawie (3.3) jest poprawny nie tylko w zakresie liniowej teorii ośrodków porowatych.

Na podstawie równania (3.3) stwierdzamy, że ciecz jako składnik fizyczny jest złożeniem cieczy swobodnej i uwięzionej i jej prędkość $\mathbf{v}^f$ ma charakter prędkości barycentrycznej.

Otrzymane wyżej wyniki dają podstawę do traktowania ośrodka porowatego wypełnionego cieczą jako złożenia dwóch składników rozróżnialnych z kinematycznego punktu widzenia (rys. 1). Pierwszy składnik kinematyczny(1) tworzy szkielet i ciecz uwięziona o gęstości $\overset{1}{\varrho} = \bar{\varrho}^s + (1-\varkappa)\bar{\varrho}^f$, któremu odpowiada prędkość $\overset{1}{\mathbf{v}}$. Drugim składnikiem kinematycznym jest ciecz swobodna o gęstości $\overset{2}{\varrho} = \varkappa\bar{\varrho}^f$, której odpowiada pole prędkości $\overset{2}{\mathbf{v}}$.

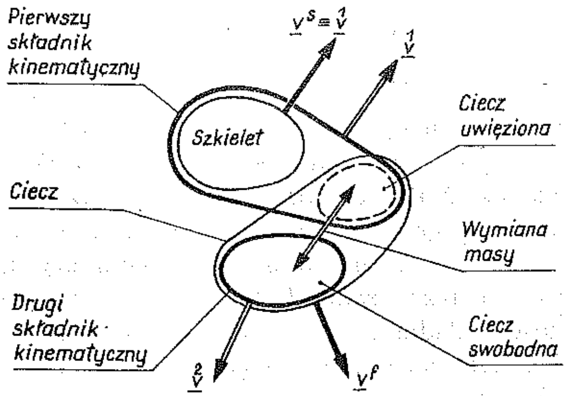
Należy zauważyć, że przy założeniu $\varkappa = 1\,(f_v = \lambda)$ na podstawie (3.2) i (3.3) otrzymujemy

$$\mathbf{u} = \overset{*}{\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{v}^f = \overset{2}{\mathbf{v}}.$$

i wówczas składniki kinematyczne ośrodka utożsamiają się ze składnikami fizycznymi.

Uwzględniając kinematyczny podział ośrodka równania ciągłości dla poszczególnych składników można napisać w następującej postaci:

(1) Nazwę „składniki kinematyczne" przyjęto za pracą [8].



Rys. 1. Kinematyczny i fizyczny podział ośrodka.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \overset{1}{\varrho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overset{1}{\varrho}\overset{1}{\mathbf{v}}) = \overset{1}{g},\\
(3.4)\qquad &\\
&\frac{\partial \overset{2}{\varrho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overset{2}{\varrho}\overset{2}{\mathbf{v}}) = \overset{2}{g}.
\end{aligned}
$$

gdzie funkcje $\overset{1}{g}$ i $\overset{2}{g}$ reprezentują intensywności wymiany masy pomiędzy składnikami i spełniają warunek

$$\overset{1}{g} + \overset{2}{g} = 0.$$

Występowanie funkcji $\overset{1}{g}$ i $\overset{2}{g}$ w równaniach (3.4), pomimo braku reakcji chemicznych w ośrodku, uzasadnione jest możliwością wymiany masy pomiędzy cieczą uwięzioną i swobodną w procesie deformacji.

Celem wyspecyfikowania funkcji $\overset{1}{g}$ i $\overset{2}{g}$ wykorzystamy równanie ciągłości $(2.1)_2$ oraz równanie (3.3). Mamy równanie

$$(3.5)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\overset{2}{\varrho}) + \operatorname{div}(\overset{2}{\varrho}\overset{2}{\mathbf{v}}) = -\left\{\frac{\partial}{\partial t}[(1-\varkappa)\bar{\varrho}^f] + \operatorname{div}[(1-\varkappa)\bar{\varrho}^f\overset{1}{\mathbf{v}}]\right\}.$$

Ponieważ równania (3.4) i (3.5) muszą być spełnione jednocześnie, przeto otrzymujemy

$$(3.6)\qquad g \equiv \overset{1}{g} = -\overset{2}{g} = \frac{\partial}{\partial t}[(1-\varkappa)\bar{\varrho}^f] + \operatorname{div}[(1-\varkappa)\bar{\varrho}^f\overset{1}{\mathbf{v}}],$$

lub po wykorzystaniu $(2.1)_1$ funkcja g przyjmuje postać

$$(3.7)\qquad g = \bar{\varrho}^s \frac{\overset{1}{D}}{Dt}\left[(1-\varkappa)\frac{\bar{\varrho}^f}{\bar{\varrho}^s}\right],$$

gdzie

$$\frac{\overset{1}{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overset{1}{\mathbf{v}} \cdot \operatorname{grad}(\cdot).$$

Z powyższych rozważań wynika, że z kinematycznym podziałem ośrodka porowatego w ogólnym przypadku związany jest efekt wymiany masy pomiędzy składnikami. Wówczas składniki kinematyczne należy traktować jako układy o zmiennej masie. O wielkości wymienianej masy w jednostce czasu decydują szybkości zmian parametrów charakteryzujących strukturę geometryczną porów reprezentowanych przez $\varkappa$ oraz szybkość zmian ilorazu efektywnych gęstości składników fizycznych $\bar{\varrho}^f/\bar{\varrho}^s$. Efekt wymiany masy w ośrodku zanika, jeśli porowatość objętościowa i efektywna porowatość powierzchniowa są sobie równe.

Rozważmy z kolei kilka szczególnych przypadków wymiany masy.

3.1. Brak wymiany masy; $g = 0$

Wówczas równanie (3.7) redukuje się do warunku

$$\frac{\varrho^f}{\varrho^s} \frac{f_v(1-\varkappa)}{1-f_v} = \mathrm{const} \qquad (\varkappa \neq 1). \tag{3.8}$$

Jeśli dodatkowo założymy $\varkappa = \mathrm{const} \neq 1$ i $f_v = \mathrm{const}$, to otrzymamy warunek

$$\frac{\varrho^f}{\varrho^s} = \mathrm{const},$$

który charakteryzuje taki rodzaj deformacji ośrodka, przy którym zawartość cieczy w każdym jego punkcie w trakcie deformacji nie ulega zmianie [9].

3.2. Materiał szkieletu i ciecz są nieściśliwe; $\varrho^f \neq \varrho^s = const$

Funkcja (3.7) przyjmuje postać

$$g = \varrho^f(1-f_v)\frac{\overset{1}{D}}{Dt}\left[\frac{f_v(1-\varkappa)}{1-f_v}\right], \tag{3.9}$$

na podstawie której stwierdzamy, że wymiana masy jest następstwem wyłącznie zmian geometrycznej struktury porów.

3.3. Porowaty szkielet jest nieodkształcalny i jednorodny; $\varkappa = const \neq 1$, $f_v = const$, $\varrho^s = const$

W takim przypadku mamy

$$g = f_v(1-\varkappa)\frac{\partial \varrho^f}{\partial t} \tag{3.10}$$

i widzimy, że efekt wymiany masy jest skutkiem lokalnych zmian gęstości cieczy.

3.4. Pomijalnie małe zmiany porowatości i gęstości cieczy; $(1-\varkappa)\varrho^f \approx$ $\approx$ *const*

Założenie takie jest uzasadnione zwłaszcza w ramach teorii małych odkształceń. Wówczas funkcja wymiany masy określona jest w postaci

$$g = (1-\varkappa)\,\bar{\varrho}^f \operatorname{div}(\overset{1}{\mathbf{v}});$$

i dla małych odkształceń przyjmuje postać

$$g = (1-\varkappa)\,\bar{\varrho}^f \dot{\varepsilon}. \tag{3.11}$$

Z powyższego wzoru wynika, że intensywność wymiany masy jest wprost proporcjonalna do prędkości zmian dylatacji szkieletu.

5. Proces stacjonarny

Wówczas wielkości określające funkcję g nie zależą od czasu i wzór (3.7) przyjmuje postać

$$g = \varrho^s \overset{1}{\mathbf{v}} \cdot \operatorname{grad}\left[(1-\varkappa)\frac{\bar{\varrho}^f}{\bar{\varrho}^s}\right]. \tag{3.12}$$

Na podstawie powyższego wzoru widzimy, że stacjonarność zjawiska nie wyklucza efektu wymiany masy w ośrodku porowatym.

4. Równania ruchu. Wymiana pędu

4.1. Fazowe tensory naprężenia

Celem sformułowania równań ruchu dla składników kinematycznych ośrodka porowatego konieczne jest zdefiniowanie odpowiednich wielkości dynamicznych: fazowych wektorów i tensorów naprężenia odpowiednio $\overset{k}{\mathbf{t}}$ i $\overset{k}{\mathbf{T}}$ $(k = 1, 2)$ oraz sił masowych sprzężonych z określonymi wcześniej wielkościami kinematycznymi.

Po raz pierwszy równania ruchu dla kinematycznego podziału ośrodka w ramach liniowej, izotropowej teorii konsolidacji zaproponował Derski [7]. Równania te zostały następnie potwierdzone w pracach [12 i 13]. Jednakże przyjęte w pracach [7, 12 i 13] definicje tensorów naprężenia budzą zastrzeżenia, gdyż nie reprezentują pełnej postaci tensorów naprężenia dla składników kinematycznych. Wymiana pędu i jego związek ze strukturą nie były istotą tych rozważań.

Definicje tensorów naprężenia $\overset{k}{\mathbf{T}}$ oparte na bilansie mocy sił zewnętrznych dla składników fizycznych i kinematycznych zaproponowano (w różniący się od siebie sposób) w pracach [8 i 9].

W pracy [8], korzystając z własności sił i prędkości uogólnionych, otrzymano związki pomiędzy diwergencjami tensorów $\overset{k}{\mathbf{T}}$ i $\mathbf{T}^{\alpha}$, w których współczynniki mogą w ogólności zależeć od kierunku. Taki sposób definiowania tensorów $\overset{k}{\mathbf{T}}$ budzi wątpliwości, gdyż diwergencje $\overset{k}{\mathbf{T}}$ mogą być w ogólnym przypadku funkcjami wektora normalnego $\mathbf{n}$, co przeczy niezależności tensorów naprężenia od $\mathbf{n}$. Ponadto nawet dla współczynników stałych względem miejsca i kierunku, tensor $\overset{k}{\mathbf{T}}$ jest określony z dokładnością do funkcji tensorowej, której diwergencja jest równa zeru.

W niniejszej pracy przyjmujemy sposób określenia wielkości $\overset{k}{\mathbf{t}}$ i $\overset{k}{\mathbf{T}}$ zaproponowany w [9]. Wykorzystamy warunek, że łączna moc sił powierzchniowych składników fizycznych jest równa mocy sił powierzchniowych składników kinematycznych zawartych w tej samej objętości ośrodka, czyli

$$\mathbf{t}^s \cdot \mathbf{v}^s + \mathbf{t}^f \cdot \mathbf{v}^f = \overset{1}{\mathbf{t}} \cdot \overset{1}{\mathbf{v}} + \overset{2}{\mathbf{t}} \cdot \overset{2}{\mathbf{v}}. \tag{4.1}$$

Po podstawieniu (3.3) otrzymujemy

$$\overset{1}{\mathbf{t}} = \mathbf{t}^s + \left(\mathbf{1} - \frac{1}{f_v}\mathbf{P}\right)\mathbf{t}^f, \quad \overset{2}{\mathbf{t}} = \frac{1}{f_v}\mathbf{P}\mathbf{t}^f, \tag{4.2}$$

i uwzględniając (2.3) mamy

$$\overset{1}{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^s + \left(\mathbf{1} - \frac{1}{f_v}\mathbf{P}\right)\mathbf{T}^f, \quad \overset{2}{\mathbf{T}} = \frac{1}{f_v}\mathbf{P}\mathbf{T}^f, \tag{4.3}$$

przy czym spełnione są następujące warunki:

$$\overset{1}{\mathbf{t}} + \overset{2}{\mathbf{t}} = \mathbf{t}^s + \mathbf{t}^f, \quad \overset{1}{\mathbf{T}} + \overset{2}{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^s + \mathbf{T}^f.$$

Dla ośrodka z izotropową strukturą związki (4.3) mają postać

$$\overset{1}{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^s + (1-\varkappa)\mathbf{T}^f, \quad \overset{2}{\mathbf{T}} = \varkappa\mathbf{T}^f. \tag{4.4}$$

Siły masowe natomiast spełniają tożsamościowo warunek:

$$\varrho^s \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}^s + \varrho^f \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}^f = \overset{1}{\varrho}\mathbf{b} \cdot \overset{1}{\mathbf{v}} + \overset{2}{\varrho}\mathbf{b} \cdot \overset{2}{\mathbf{v}}. \tag{4.5}$$

4.2. *Równania ruchu*

Jak stwierdziliśmy w p. 3 tej pracy składniki kinematyczne ośrodka są układami o zmiennej masie, zatem poprawne sformułowanie równań bilansu pędu dla tych składników wymaga uwzględnienia wymiany pędu w następstwie efektu wymiany masy. W tym celu wykorzystamy zależność określającą przyrost pędu dla ciała o zmiennej masie. Oznaczając przez m i $\mathbf{v}$ odpowiednio masę ciała i prędkość jego środka masy oraz przez $\frac{dm}{dt}$ i $\mathbf{w}$ odpowiednio zmianę masy ciała w jednostce czasu i prędkość odłączanej (lub przyłączanej) masy równanie równowagi dynamicznej przyjmuje postać

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}+(\mathbf{w}-\mathbf{v})\frac{dm}{dt}, \tag{4.6}$$

gdzie $\mathbf{F}$ jest sumą sił zewnętrznych działających na masę m, a ostatni wyraz w (4.6) reprezentuje siłę nazywaną w klasycznej mechanice siłą odrzutu.

Uwzględniając wzór (4.6) równania ruchu składników kinematycznych możemy napisać jak następuje:

$$\begin{aligned}\overset{1}{\varrho}\frac{\overset{1}{D}\overset{1}{\mathbf{v}}}{Dt}&=\operatorname{div}\overset{1}{\mathbf{T}}+\overset{1}{\varrho}\mathbf{b}+\overset{1}{\mathbf{r}}+\overset{1}{g}(\mathbf{w}-\overset{1}{\mathbf{v}}),\\ \overset{2}{\varrho}\frac{\overset{2}{D}\overset{2}{\mathbf{v}}}{Dt}&=\operatorname{div}\overset{2}{\mathbf{T}}+\overset{2}{\varrho}\mathbf{b}+\overset{2}{\mathbf{r}}+\overset{2}{g}(\mathbf{w}-\overset{2}{\mathbf{v}}).\end{aligned}\tag{4.7}$$

W równaniach (4.7) siły $\overset{1}{\mathbf{r}}$ i $\overset{2}{\mathbf{r}}$ ($\overset{1}{\mathbf{r}}=-\overset{2}{\mathbf{r}}$) przedstawiają wzajemne oddziaływanie pomiędzy składnikami wynikające z przyczyn nie związanych z wymianą masy, natomiast $\mathbf{w}$ oznacza prędkość masy wymienianej. Występujące w (4.7) siły $\overset{1}{g}(\mathbf{w}-\overset{1}{\mathbf{v}})$ i $\overset{2}{g}(\mathbf{w}-\overset{2}{\mathbf{v}})$, będące skutkiem zmian masy składników w czasie deformacji, mają różne wartości; tak więc nie są siłami wzajemnego oddziaływania.

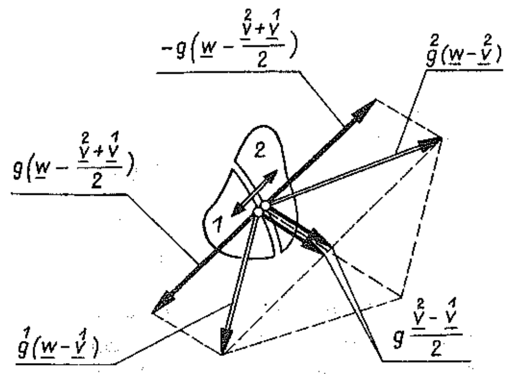
Siły te, uwzględniając (3.6), można jednak przedstawić w postaci następującej sumy:

$$\begin{aligned}\overset{1}{g}(\mathbf{w}-\overset{1}{\mathbf{v}})&=g\left[\mathbf{w}-\frac{1}{2}(\overset{1}{\mathbf{v}}+\overset{2}{\mathbf{v}})\right]+\frac{1}{2}g(\overset{2}{\mathbf{v}}-\overset{1}{\mathbf{v}}),\\ \overset{2}{g}(\mathbf{w}-\overset{2}{\mathbf{v}})&=-g\left[\mathbf{w}-\frac{1}{2}(\overset{1}{\mathbf{v}}+\overset{2}{\mathbf{v}})\right]+\frac{1}{2}g(\overset{2}{\mathbf{v}}-\overset{1}{\mathbf{v}}),\end{aligned}\tag{4.8}$$

gdzie pierwsze z tych składowych są siłami wzajemnego oddziaływania w następstwie wymiany masy, a pozostałe składowe charakteryzują się tym, że ich działanie na każdy składnik jest jednakowe, co do kierunku i wartości. Rozkład (4.8) przedstawiono na rys. 2.

Wykorzystując (4.8) równania (4.7) przyjmą postać

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\overset{1}{\mathbf{T}}+\overset{1}{\varrho}\mathbf{b}+\overset{1}{\mathbf{r}}{}^{c}&=\overset{1}{\varrho}\frac{\overset{1}{D}\overset{1}{\mathbf{v}}}{Dt}+\frac{1}{2}g(\overset{1}{\mathbf{v}}-\overset{2}{\mathbf{v}}),\\ \operatorname{div}\overset{2}{\mathbf{T}}+\overset{2}{\varrho}\mathbf{b}+\overset{2}{\mathbf{r}}{}^{c}&=\overset{2}{\varrho}\frac{\overset{2}{D}\overset{2}{\mathbf{v}}}{Dt}+\frac{1}{2}g(\overset{1}{\mathbf{v}}-\overset{2}{\mathbf{v}}),\end{aligned}\tag{4.9}$$



Rys. 2. Rozkład sił wynikających z wymiany masy

gdzie wektory

$$\overset{1}{\mathbf{r}}{}^c = \overset{1}{\mathbf{r}} + g\left[\mathbf{w} - \frac{1}{2}(\overset{1}{\mathbf{v}} + \overset{2}{\mathbf{v}})\right], \quad \overset{2}{\mathbf{r}}{}^c = \overset{2}{\mathbf{r}} - g\left[\mathbf{w} - \frac{1}{2}(\overset{1}{\mathbf{v}} + \overset{2}{\mathbf{v}})\right],$$

są całkowitymi siłami wzajemnego oddziaływania pomiędzy składnikami kinematycznymi. Prędkość $\mathbf{w}$ występująca w tych siłach wymaga specyfikacji i będzie to przedmiotem oddzielnej pracy poświęconej dyskusji wielkości konstytutywnych. Otrzymana postać równań ruchu (4.9) jest zgodna z równaniami otrzymanymi przez jednego z autorów [11], gdzie punktem wyjścia był bilans energii dla całego dwuskładnikowego ośrodka. Jest przy tym widoczne, że siły wzajemnego oddziaływania w [11] nie można utożsamiać wyłącznie z siłami oporu dyfuzyjnego.

Należy nadmienić, że we wcześniej sformułowanych równaniach ruchu [8, 9 i 13] całkowite siły wzajemnego oddziaływania odpowiadają sytuacji, w której $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Ten fakt pociąga za sobą nieobiektywność sił oddziaływania.

4.3. Siły oddziaływania pomiędzy składnikami fizycznymi

Sformułowane dotychczas równania ruchu oraz dyskutowane siły wzajemnego oddziaływania dotyczyły składników kinematycznych. Stanowią one wygodny punkt wyjścia dla uzyskania równań ruchu składników fizycznych oraz wyspecyfikowania wzajemnych oddziaływań pomiędzy takimi składnikami.

Wykorzystując wzory (4.3) można równania (4.9) napisać w następującej postaci

$$\operatorname{div} \mathbb{T}^s + \bar{\varrho}^s \mathbb{b} + \overset{*}{\pi}{}^s = \bar{\varrho}^s \frac{\overset{1}{D}\overset{1}{\mathbf{v}}}{Dt},$$

(4.10)
$$\operatorname{div} \mathbf{T}^f + \bar{\varrho}^f \mathbf{b} + \overset{*}{\pi}{}^f = \bar{\varrho}^f \left[(1-\varkappa) \frac{\overset{1}{D}\overset{1}{\mathbf{v}}}{Dt} + \varkappa \frac{\overset{2}{D}\overset{2}{\mathbf{v}}}{Dt} \right] + g\,(\overset{1}{\mathbf{v}} - \overset{2}{\mathbf{v}}).$$

W powyższych równaniach siły $\overset{*}{\pi}{}^s$ i $\overset{*}{\pi}{}^f$ ($\overset{*}{\pi}{}^s = -\overset{*}{\pi}{}^f$) są siłami wzajemnego oddziaływania pomiędzy składnikami fizycznymi ośrodka i mają one postać

(4.11)
$$\overset{*}{\pi}{}^f = -\overset{*}{\pi}{}^s = \frac{1}{\varkappa} [\overset{2}{\mathbf{r}} + \overset{2}{\mathbf{T}} \operatorname{grad} (\varkappa)] - \varrho^f (1-\varkappa) \left[\frac{\overset{2}{D}\overset{2}{\mathbf{v}}}{Dt} - \frac{\overset{1}{D}\overset{1}{\mathbf{v}}}{Dt} \right] + g\,[(\mathbf{w} - \overset{1}{\mathbf{v}}) - (1-\varkappa)(\overset{2}{\mathbf{v}} - \overset{1}{\mathbf{v}})].$$

We wzorze (4.11) można wyodrębnić trzy rodzaje oddziaływań, którym odpowiadają wyrazy ujęte w nawiasy kwadratowe. Pierwszy wyraz oznacza siły dyfuzyjne wynikające ze względnego ruchu składników oraz siły związane z niejednorodnością geometrycznej struktury porów ośrodka; drugi wyraz jest siłą sprzężenia dynamicznego składników, ostatni zaś siłą związaną ze zmianą zawartości cieczy uwięzionej w szkielecie w trakcie procesu deformacji.

Ten istotny rezultat wskazuje na to, że przy analizie zagadnień w odniesieniu do składników fizycznych, sił wzajemnego oddziaływania nie można, w ogólnym przypadku, ograniczać wyłącznie do sił dyfuzyjnych i efektu niejednorodności struktury. Konieczne jest uwzględnienie sił sprzężenia dynamicznego i oddziaływań wynikających z wymiany masy w ośrodku. Pominięcie dwóch ostatnich rodzajów oddziaływań jest możliwe w zagadnieniach quasi — ustalonych i przy zaniedbaniu wymiany masy.

Z równań (4.10) możemy otrzymać dwa szczególne przypadki równań ruchu napisanych dla składników fizycznych rozważanego ośrodka. Pierwsze z nich otrzymamy zakładając efektywną porowatość powierzchniową równą porowatości objętościowej, $\varkappa = 1$. Wówczas równania (4.10) redukują się do znanych równań teorii objętościowej (2.2) i we wzorze (4.11) znika sprzężenie dynamiczne oraz siła związana z efektem wymiany masy.
W drugim przypadku, w ramach teorii liniowej dla małych odkształceń z równań (4.10) otrzymamy

(4.12)
$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{T}^s + \bar{\varrho}^s \mathbf{b} + \frac{1}{\varkappa} \overset{1}{\mathbf{r}} + \frac{1}{\varkappa} (1-\varkappa) \bar{\varrho}^f \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) = \bar{\varrho}^s \frac{\partial \mathbf{v}^s}{\partial t}, \\ &\operatorname{div} \mathbf{T}^f + \bar{\varrho}^f \mathbf{b} + \frac{1}{\varkappa} \overset{2}{\mathbf{r}} - \frac{1}{\varkappa} (1-\varkappa) \bar{\varrho}^f \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) = \bar{\varrho}^f \frac{\partial \mathbf{v}^f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Jeżeli oznaczymy

$$\frac{1}{\varkappa} \overset{2}{\mathbf{r}} = -b\,(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s), \qquad -\frac{1}{\varkappa} (1-\varkappa) \bar{\varrho}^f = \varrho_{12},$$

to równania (4.12) utożsamiają się z równaniami otrzymanymi na innej drodze przez Biota [10], w których uwzględnia się sprzężenie dynamiczne.

5. Uwagi końcowe

W pracy przedyskutowano przyczyny oraz charakter oddziaływań wewnętrznych w izotropowym odkształcalnym ośrodku porowatym wypełnionym cieczą.

Skutkiem założonej dwuparametrowej charakterystyki struktury porów (porowatość objętościowa i efektywna porowatość powierzchniowa) jest podział ośrodka na dwa składniki kinematyczne; porowaty szkielet i związaną z nim ciecz oraz ciecz swobodną. Wykazano, że składniki te są układami otwartymi i w czasie procesu deformacji mogą wymieniać masę między sobą, przy czym przebieg wymiany zależy od zmian stosunku gęstości składników fizycznych w czasie oraz zmian porowatości charakteryzujących wyłącznie geometryczne własności porów.

Sformułowanie równań ruchu dla składników kinematycznych jako układów o zmiennej masie umożliwiło poprawne określenie sił oddziaływania pomiędzy składnikami przy spełnieniu wymagań obiektywności. Taki opis ośrodka pozwolił następnie w odniesieniu do składników fizycznych na wyspecyfikowanie całkowitych oddziaływań siłowych pomiędzy fazą ciekłą i porowatym szkieletem. Wykazano, że w odróżnieniu od objętościowej teorii mieszanin, oddziaływania oprócz sił dyfuzyjnych będących następstwem ruchu względnego składników i sił związanych z niejednorodnością struktury porów, powinny uwzględniać efekty sprzężenia dynamicznego i siły wynikające ze zmiany zawartości cieczy uwięzionej w szkielecie w czasie procesu deformacji.

Jest widoczne, że strukturalne podejście do opisu ośrodka porowatego daje możliwość wyjaśnienia występujących w takim ośrodku sprzężeń, których uwzględnienie w ramach teorii objętościowej lub klasycznej teorii mieszanin było niemożliwe.

Literatura cytowana w tekście

1. R. M. Bowen, *Compressible porous media models by use of the theory of mixtures*, Int. J. Engng Sci., **20**, 6, 697–735, 1982.
2. J. H. Prevost, *Mechanics of continuous porous media*, Int. J. Engng Sci., **18**, 787–800, 1980.
3. D. S. Drumheller, *The theoretical treatment of a porous solid using a mixture theory*, Int. J. Solids Structures **14**, 441–456, 1978.
4. G. Szefer, *Nonlinear problems of consolidation theory*. Problemes de Reologie, Symposium Franco–Polonais, Cracovie 1977, PWN, Warszawa 1978.
5. L. W. Morland, *A simple constitutive theory for a fluid-saturated porous solid*, J. Geoph. Research, **77**, 5, 890–900, 1972.
6. G. A. Ramirez, *Constitutive equations for the flow of incompressible fluids through an elastic porous solid*, Israel J. Technology, **9**, 5, 411–425, 1971.
7. W. Derski, *Equations of motion for a fluid-saturated porous solids*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Tech., **26**, 1, 11–16, 1978.

8. S. T. Kowalski, *Współrzędne normalne i warunki brzegowe w teorii mieszanin*, Prace IPPT, Nr 5, 1980.
9. J. Kubik, *Mechanika silnie odkształcalnych ośrodków o anizotropowej przepuszczalności*, Prace IPPT, Nr 29, 1981.
10. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid*, J. Acoust. Soc. Am., **28**, 2, 168–191, 1956.
11. J. Kubik, *On internal coupling in dynamic equations of fluid-saturated porous solid*, Int. J. Engng Sci. **24**, 6, 981–989, 1986.
12. W. Derski, H. I. Ene, *Les equations du movement dans les milieux poreux*, Studia geot. et mech., **2** 19–27, 1979.
13. W. Derski, S. J. Kowalski, *On the motion and mass continuity equations in a porous fluid-saturated medium*, Studia geot. et mech., **2**, 3–12, 1980.
14. J. Kubik, *Large elastic deformations of a fluid-saturated porous solid*, J. de Mec., N. special, 1982.
15. J. Kubik, A. Sawczuk, *A theory of anisotropic consolidation*, Ingenieur–Archiv, 53, 1983.
16. J. Kubik, *A dynamic theory of fluid-porous solid composition. I. Motion equations*, Arch. Mech., 3, 1985.
17. J. Kubik, *Permability tensor and porosity of material with rectilinear channels*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. tech., **27**, 10–11, 445–453, 1979.
18. J. Kubik, *A macroscopic description of geometrical pore structure of porous solids*, Int. J. Engn Sci., **24**, 6, 971–980, 1986.
19. C. Truesdell, R. A. Toupin, *The elastical field theories*. In: Handbuch der Physik, Vol. III/1 Ed. S. Flüge, Springer–Verlag, 1960.
20. A. E. Green, P. M. Naghdi, *A dynamical theory of interacting continua*, Int. J. Engng Sci., 3, 231–241, 1965.
21. A. E. Green, P. M. Naghdi, *The flow of fluid through an elastic solid*, Acta Mech., 9, 329–340, 1970.
22. R. M. Bowen, *Theory of mixtures*, in: Continuum Physics, Edited by A. C. Eringen, Academic Press, New York, San Francisco, London 1976.
23. P. A. C. Raats, *Forces acting upon the solid phase of a porous medium*, ZAMP, 19, 606–613, 1968.

Резюме

О ВНУТРЕННИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ НАСЫЩЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе обсуждены причины и характер внутренних взаимодействий в изотропной, деформируемой пористой среде насыщенной жидкостью. Рассуждения проведены при предположении, что структура поров среды схарактеризована двумя параметрами: объемной пористостью и эффективной поверхностной пористостью, что приводит к кинематическому разделению среды отличающемуся от физического разделения. Определен явный вид функции интенсивности массообмена между кинематическими компонентами и констатировано, что этот обмен зависит от скорости изменений отношения плотности физических компонентов и изменений параметров структуры. Показано, что взаимодействие между пористым скелетом и жидкостью охватывает не только диффузные силы и силы, связанные с неоднородностью структуры, но тоже эффект динамического сопряжения и силы, вызванные массообменом в среде.

Summary

ON INTERNAL FORCES IN A POROUS, LIQUID-SATURATED MEDIUM

The character of internal interactions occurring in an isotropic, deformable liquid-saturated porous medium is discussed. The pore structure of the medium is assumed to be characterized by two parameters: the volume porosity and the effective surface porosity: the resulting kinematic subdivision of the medium is different from the physical one. Explicit formula is given for the mass exchange intensity between the individual kinematical components, and it is found to depend on the rate of variation of the density ratios of the physical components and on the changes of the structural parameters. It is shown that the mutual interactions between the porous skeleton and the liquid embraces not only the forces of diffusion and the forces connected with nonhomogeneity of the structure, but also the effects of dynamic coupling and the forces produced by the mass exchange taking place in the medium.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1985 r.